Matematikatörténet

Pejó Balázs

1. Ókori matematika

1.1. Előzménye

Egyiptomi és mezopotámiai civilizációk mezőgazdasághoz szükséges öntözéshez, naptárkészítésre csillagászati matematikára volt szükség. A papok művelték e tudományt. A piramisok építéséhez sík- és tértani ismeretekre volt szükség, például a csonkagúla térfogatára($V = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2 + ab)$, ahol a és b az alapuk hossza, míg m a csonkagúla magassága), mely a moszkvai papíruszokon maradtak fent. Pi-re a $\pi \approx (4/3)^4 \approx 3,16$ értéket használták, mely a Rhinden papiruszokon maradt fent. A babiloniaiak ismertek egy hatékony eljárást a gyök keresésére : $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \beta/x_n)$, ahol β gyökét keressük, és x_0 tetszőleges.

1.2. Számírás

- Summérok
  60-as számrendszert használtak, és ismerték a tizedestört elődjét. Számjegyek helyett számjeleket használtak, nem ismerték a nullát.
- Görögök
  ABC első 10 betüje 1-9, következő 10 betű 10-90 ig, miután körbeértek, elölről kezdték a betű elé egy vesszőt téve.

1.3. Görög geometria

- Rájötterk, hogy szükség van bizonyítást nem igénylő axiómák bevezetésére, és ezekből a tételeket be kell bizonyítani.
- Thalész (kb. i.e. 585) : első volt, aki komondott, és be is bizonyított tételeket, róla kapta a nevét az a tétel ,mely azt mondja ki, hogy a félkörív átmérőjéből a félkörív bármely pontja derékszögben látszik.
- Püthagorasz (kb i.e. 550) : A róla elnevezett tétel azt mondja ki, hogy a derégszögű háromszög befőgóinak a négyzetösszegének a gyöke az átfogó. A húrhossz, és a zenei harmónia közötti összefüggést ő fedezte fel. Az egyik észrevétele, hogy ha egy húrt megfelezünk, akkor kétszer nagyobb rezgésszámú hangot ad, mely egybehangzik az eredetivel.

- Platón (i.e. 427-347) : oktatója Theaitosz (kb 414-369), aki felfedezte a 4. és 5. szabályos poliédert, azaz az okta- és ikozaédert.
- Eudoxosz (kb i.e. 410-355) : Megalkotta az első kozmikus modellt.
- Euklidész (kb i.e. 300) : Fő műve az elemek, mely a geometria axiómatikus felépítését is tartalmazza. Már ő is tudta, hogy a párhuzamossági axióma különbözik a többitől.
- Apollonisz (i.e. 262-190) : Az ókor legnagyobb geométere, a kúpszeletekkel foglalkozott. tétele az $y^2 = 2px$ fekvő parabola felső ágának x_0 beli érintője y tengelyt $y_0/2$-ben metszi.

1.4. Számelmélet

Ezeket mint tartalmazza az Elemek :

- $x^2 = 2$ megoldása nem írható fel két szám hányadosaként.
- végtelen sok prím van
- a pitagoraszi számhármasok a következő alakúak : $x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2$, ahol m>n, különböző paritásúak.
- $p = 2^{n+1} - 1$ prím, akkor $p2^n$ tökéletes.

1.5. Görög analízis

- Zénon (i.e. 460) : 4 híres paradoxona közül az egyik : hiába fut kétszer gyorsabban Akhilleusz mint a teknősbéka, soha nem éri utol. E a végtelen sor összegét kiszámítva megoldódik, melyet a 17.sz.-ig nemtudtak.
- Eudoxosz : egy kör kerülete az átmérűje négyzetével arányos.
- Arhimédész (i.e.287-212) : A görög matematika csúcsa
  - az egységsugarú körbe írt szabályos n illetve 2n oldalú sokszög fél oldalhosszai között a következő rekurzió érvényes:

    $$a_{2n} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}{2}}, A_{2n} = \frac{\sqrt{1 + A_n^2} - 1}{A_n}$$

    E közelítés a 96 oldalú szabályos sokszög használatával ezt a becslést adja : $\frac{10}{71} < \pi < \frac{10}{70}$
  - Legyen r_n, R_n egy n-oldalú szabáyos sokszögbe írt és körülírt körének sugara. Ekkor a ugyanekkora kerületű, duplaannyi oldalú sokszögre az alábbi igaz:

    $$r_{2n} = \frac{r_n + R_n}{2}, R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}$$

  - R sugarú félgömb térfogat az R sugarú, R magasságú henger térfogatának 2/3-ada.
  - a cos görbe alatti terület [0,x] szakaszon épp sin(x).

- ismerték a szögfüggvényeket, és az adiciós tételeket, melyek segítségével kiszámolták a cos(0.5), mely segítségével értéket kaptak a többi szöghöz is.

1.6. Hanyatlás

- Külső okai : városállamok szétesése, római birodalom terjeszkedése
- Belső okai : nem használhattak változókat, mert a számokat is betűk jelölték. Nem ismerték a negatív számokat.

2. Középlori matematika

2.1. Kína

Hasonló a matematikájuk a mezopotámiaiakéhoz az, valószínüleg az öntözéses gazdálkodás maitt. Jó közelítésdel ismerték a π-t($\frac{355}{113}$). A kínai maradéktétel, és a Horner-módszer is tőtük származik. A pascal háromszöget is ismerték, de az Európai matematikára semmilyen hatást nem gyakorolt, mivel mire a felfedezés eljutott oda, addigra már a Névadóik is kitalálták azokat.

2.2. India

Brahmagupta (kb 682 körül) élt indiai matematikus, ki ismerte a Heron-képletet, de hibásan általánosította azt négyszögekre(húrnégyszögekre igaz).

2.3. Hindu számok

Arabok által kitalált számokat használunk napjainkban is, mely a 7.sz.-ban kezdett megjelenni indiában, később majd arab közvetítéssel európában is. Előlnye, hogy az első 9 szám egyjelű, és egymásmögé írva könnyen álltalánosítható.

2.4. Iszlám

Az arab hódításoknak köszönhetően ismertük meg az arab számokat, és nekük köszönhető, hogy az ókori írásokat lefordították, hogy fenntmaradhassanak. Euklidész Elemek című művét maga II. Szilveszter pápa is fordította, ki Istvánnak koronát küldött. Al-Hvárizmi, arab matematikus, kinek a nevéből alakult ki a mai algoritmus szó. Algebrát probálta kialakítani, a könyve címéből ered az algebra szó. Al-Kásit használta először a tizedestörteket, mely segítségével az eddigieknél a legpontosabb becslést adta a π-re. A közelítő négyzetgyökvonási eljárása a binomális tétel elődjének tekinthetjük. Végül, megjelent a zérus.

2.5. Európa

Sorra alakultak az egyetemek. Leonardo Pisano (Fibonacci, kb 1180-1250), aki az arab világban tanult, kitűnő tankönyvet írt, mely népszerű lett, mert nagyon megkönnyítette a számolást, de később betiltották, mert alkalmazásávan könnyű volt hamisítani a könyvelést. A róla elnevezett számokat egy nyulas szaporodós példávalvezette be. A logaritmus felfedezése elött a szorzást addiciós tételek segítségével írták át összeadássá. Két püspöknek, Bradwardine (1290-1349), és Oresme (1323-1382) -nek köszönhetjük a logaritmust, kik fizikai úton, a sebesség, az erő, és az ellenállás közti összefüggéssel az alábbi képletre bukkantak (hibásan) :

$$xv = xV\left(\left(\frac{F}{R}\right)^x\right), \frac{F_2}{R_2} = \left(\frac{F_1}{R_1}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}$$

Oresme igazolta, hogy a természetes számok repiprokösszege divergens.

3. Újkori matematika kezdete

Ekkor volt a reneszánsz, az egyházi kultúra melett megjelent a világi, fejlődött a kézművesség, kereskedelem, megjelentek az államok, Guttemberg feltalálta a könyvnyomtatást, Kolombusz felfedezte amerikát, Magellán körbehajózza a földet.

3.1. Harmadfokú megoldóképlet

- Girolamo Cardano (1501-1576), olasz matematikus találta meg a megoldást. A négyzetes tag egy helyettesítéssel kiküszöbölhető ($x = y - a/3$), sőt, elég az $x^3 + ax = b$ egyenletet vizsgálni. A megoldás kulcsa a szimmetriában rejlik, azaz x=v-u. Az esetszétválasztás miatt be kell vezetnünk a diszkriminánst : $\Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$. Ekkor, ha ez pozitív, akkor az egyenletnek egy valós, és kér komplex gyöke van, $\Delta < 0$ esetén pedig mind a 3 gyök valós. Ekkor még a komplex számok és az algebra alaptétele bővebb tárgyalása még várat magára. Cardanorol nevezték el a kardáncsuklót is.

- A harmadfokú megoldoképletet felhasználva Ludovic Ferrari (1522-1566) már könnyen belátta azt negyedfokúra. Az ötödfokú egyenlet megoldhatatlanságának a bizonyítása még váratott magára.

- Francois Viete (1540-1503) volt az első, aki következetesen megkülönböztette a paramétereket a változóktól(magánhangzó : változó, mássalhamgzó : paraméter). Észrevette az eggyütthatók, és a megoldások közti összefüggést. Visszavezette a 3-adfokú egyenletet szögharmadolásra : $x^3 + ax + b = 0$ egyenlet a $4y^3 - 3y = c$ alakra hozható. TFH. |c|<1. $y = \cos(\varphi)$ helyettesítéssel, és az addiciós tételek segítségével $\cos(3\varphi) = c$-t kapjuk. Viete leglátványosabb geometriai felfedezése, a binomiális tétel előfutára :

$$\sin(nx) = n\cos^{n-1}(x)\sin(x) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}(x)\sin^3(x) + \ldots$$

- Albert Girard (1590-1939) kimondta az n-edfokú polinom gyökei és eggyütthatói közötti összefüggéseket. Megtalálta az n-edfokú, szimmetrikus ($\sum a_i z^i$) a megoldási módszert rekurzió segítségével($s_r = \sum z_i^r$) : $a_n s_n + \ldots + a_0 s_{m-n} = 0$, ha m>n, egyébként $a_n s_m + \ldots + a_{n-m+1} s_1 + m a_{n-m} = 0$
- Rene Descartes (1599-1650) felfedezte, hogy ha egy p_n-nek gyöke az a, akkor létezik olyan p_{n-1}-edfokú polinom, melyre : $p_n = (x-a)p_{n-1}$

3.2. Logaritmus

- Szorzatot tudtak összeggé bontani, de osztást még nem. John Napier (1550-1617) és Jobst Bürgi (1552-1632) egymástól függetlenül fedeztél fel. MIvel nem mindenhol a 10-es alapú számrendszert használtál (pl nagybritannia),így egy összefoglaló táblázat sokáig váratott magra. Végül, hasonló módszerrel mint a görögök a szögfüggvényeket, készítettek egy logaritmustáblázatot. Napier nem jutott el az e számig, mert megált a $n = 10^7$-nél. Felírt egy mozgásegyenletet : $x' = -x$.
- Jakob Bernoulli (1654-1705) heurisztikus bizonyítást adott az $e(x) = \lim(1 + \frac{x}{n})^n$ határérték létezésére. Tulajdonságai :
  - e(1)=e
  - e(x)>0
  - e(x)e(y)=e(x+y)
  - e(0)=1
  - e(-x)=1/e(x)
  - e'(x)=e(x)

3.3. binomiális tétel

$$(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k, \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Váratlan kapcsolat a kombinatorika és az algebra között. Pascal használta először a teljes indukciót. $S_n^r = \sum k^r =$ az első n szám r-edik hatványösszege. Pascal belátta az alábbi egyenletet is :

$$\sum \binom{r+1}{j} S_n^{r+1-j} = (n+1)^{r+1} - (n-1)$$

3.4. Számelmélet

- Marin Mersenne (1588-1648) -ről elnevezett prímek ($M_p = 2^p - 1$) miatt érdekes, illetve sejtéseiben meglepően kevés hibát vétett.
- Fermat két tétele :
  - kis fermat tétel : p prím, akkor minden a esetén $a^p - a$ osztható p-vel. Fermat prímek : $F_n = 2^{2^n} + 1$, mely n=5-re már nem prím.
  - $x^4 + y^4 = z^4$ egyenletnek nincs természetes megoldása.

  Utobbit állítás n-re a felrmat sejtés, melyenek tudta a bizonyítását(rosszul), de mivel nem fért ki a margóra, nem írta le.

3.5. Koordinátageometria

Descartes mutatott rá először, hogy a geometriai problémák így módon algebraivá tehetők. Descartes nem közölte a pontos analízisbeli hátterét elméletének, hogy más azt ne tulajdoníthassa magáénak. Levelezés utján terjedtek a jelölések,felfedezések.

3.6. Elemi analízis

- Egy x^a hatványfüggvény x pontbeli érintőjének meredeksége ax^{a-1}. Fermat a következöt állította : $a < b, \alpha \neq -1$. Ekkor x^α alatti előjeles terület a-b között : $(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})/(\alpha+1)$.
- Az $\alpha = -1$ esetet G. Saint-Vincent (1622-1647) látta be, azaz hogy : $\int_1^x t^{-1} = \log(x)$. Ő számolta ki a végtelen tagú hatványsor összegét is.

4. Kalkulus

A görögök ismerték a kúpszeletek érintőit, és az alattuk lévő területet. Fermat a polinomoknak tudta ugyanezen függvényeit. Newton dinamikus fizikai feladatok révén, míg Leibniz gondokodással jutott ugyanarra az eredményre.

4.1. Deriválás

Végtelen kicsi mennyiségek már önmagukban ingoványos talajt képeztek, nemhogy a hányadosuk. Ekkoriban úgy fogták fel, hogy y nem x-től függ, hanem mindkettő az időtől, így a meredekség mindkét irányba való elmozdulás hányadosa, azaz dy/dx. Mind Newton, mint Leibniz kidongozta azt a szabályrendszert, amit ma is tanulnak az egyetemeken. Ismerték a láncszabályt. Newton binomiális tétele:

$$(1+h)^a = 1 + \sum \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} h^k \to f(x_0+h) = \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

Ekkoriban merült fel az interpoláció fontossága is(osztott diferenciák módszer), és e sort átalakítva, és h-val a 0-ba tartva kapta Brook Taylor (1685-1731) a róla elnevezett interpolációs polinomot, ahol még konvergenciával nem törödtek. Pontosabban $\Delta f(x) = f(x+b) - f(x)$
$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+b) - \Delta f(x)$, és

$$f(a+h) = \sum \frac{h(h-b)\dots(h-(k+1)b)}{k! b^k} \Delta^k f(a)$$

4.2. Integrálás

Fermat már látta a deriválás és az integrálás közötti összefüggést, de csak polinomokra. Leibniz és Newton ezt az eredményt általánosította azzal, hogy a görbe alatti területet a következőképpen definiálta:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_1^m f_i \Delta x_i, f_i \in [f(x_i), f(x_{i+1})], a = x_0 < \dots < x_m = b$$

Ekkor beszélhetünk a Newton-Leibniz tételről, azaz ha f folytonos a korátos [a,b]-n, és itt megegyezik egy másik függvény érintőivel(F'(x)=f(x)), akkkor $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. A szorhatfüggvény integrálására parciális, míg a láncszabály helyett a helyettesítése integrálást használták. Leibniz eggyik fő eredménye a π közelítése végtelen sorösszegel, de ez nagyon lassan konvergál.

4.3. Alkalmazások

A gyökkeresési algoritmusoknál a Newton módszer a érintőtulajdonságot használja, azaz $x_{n+1} = x_n - (f(x_n))/(f'(x_n))$. Ekkriban kezdik megemlíteni a differenciálegyenleteket, ahol nem csak változók, hanem azok deriváltjai is szerepelnek. Leibniz tétele a szétválasztható esetről : $x'(t) = g(t)h(t)$, akkor az $x_0 = x(0)$ kezdeti értékkel a megoldás : $\int_{x_0}^x 1/h(\xi)d\xi = \int_0^t g(\tau)d\tau$. A logaritmusfüggvény inverzével nem foglalkoztak végtelen soros formában. Newton 1687-ben publikálta a Principiát, első könyvét, mely számos törvényre ad magyarázatot, többek között igazolja Kepler első törvényét, és meghatározza a kozmikus sebebeséget(amivel el lehet hagyni a földet).

4.4. Prioritási vita

Newton a fényelméletes felfedezései révén publikált elöször, amikor is összeütközésbe került Hooke-kal, így ezekután kevesebet publikált. Habár elöbb találta ki a kalkulus elméletét mint Leibniz, de ő jobb jelöléseket használt. Leibniz Pascal számologépe tökéletesítéséért tagja lett a Királyi társaságnak, ahol ismerkedett meg Newton műveivel. A két tudós hívei kezdeményezték a vitát, ahol Newton jött ki győztesként.

5. Mátrixok

5.1. Lineáris eggyenletek

Már az ókorban foglalkoztak többismeretlenes eggyenletredszerekkel. Cardano már 1545-ben megfogalmazta a 2×2-es mátrixokra a Cramer-szabályt, melyet a névadó, Gabriel Cramer (1704-1752) álltalánosít $n \times n$-es mátrixokra. A determináns definicióját egy japán, Szeki Takakazu (kb 1642-1708) mondja ki. A dupla index jelölés is Leibniztől származik. Nem mint önnálló tdomány, hanem mint eszköz, a többi feladat megoldásáa jött létre, így a fejlődése lasabb. Louis-Joseph Lagrange (1736-1813) vette észre, hogy 3 dimenziüs térben az oszlopok álltal kifeszített paralelepipedon térfogata a determináns. Gauss szabadosan kiküszöbölés módszeréval mindegyik megoldást megkaphatjuk, a Cramerrel ellentétben. Míg kortársai már anyanyelvükön, Gauss még latinul publikált. Mint oly sor mást, ezt a témakört is Augustin-Cauchy (1789-1857) fektetette biztos definiciós alapokra.

5.2. Lineáris differenciáleggyenletek

- Leonard Euler (1707-1783) álltalánosította a differenciál eggyenleteket magasabbrendűvé, Jonatak Bernoulli (1667-1748)-val, Jakob öccsével a lehajló rúd kihajlásának problémájárl jutott el egy negyedrendú egyenlethez. Hatványsoros módszerrel eljutott 4 megoldáshoz, de csak későb látta köztük meg az összefüggést, nevezetesen, hogy $x^{(n)} = \sum a_k x^{(k)}$ homogén lináris differenciálegyenlet álltalános megoldása $\lambda^n = \sum a_k \lambda^k$, karakterisztikus egyenlet gyökeiből(λ_k) a következőképpen adódik : $x(t) = \sum \xi_k e^{\lambda_k t}$, ahol $x^{(j)}(0) = \sum \xi_k \lambda_k^j$. Azt is észrevette, hogy ha multiplicitás van a karakterisztikus polinom gyökei között, akkor az ahoz tartozó megoldásokat meg kell szorozni rendre $1, t, t^2, \ldots$-al.

- Lagrange a többváltozós elsőrendű differenciálegyenletekkel foglalkozott, nevezetesen az $x' = Mx$ egyenletnek az $x(t) = e^{Mt}x_0$ a megoldása, ahol $e^{Mt} = \sum M^k t^k / k!$. Ez az eredmény vezetett el a sajátértékekhez, illetve a sajátvektorokhoz, azaz, hogy hogyan lehet egy mátrixot gyorsan hatványozni. Ezek ismeretében az $x' = Mx$ egyenletmegoldása n db lineárisan független sajátvektor esetén $x(t) = \sum \xi_k v_k e^{\lambda_k t}$, ahol $x_0 = \sum v_k \xi_k$.

- A nem homogén esettel D'Alembert foglalkozott : $x' - Mx = g$ egyelnet megoldásai legfeljebb a homogén megoldásban különbözhet egymástól.

5.3. Lineáris algebra

- Homogén lineáris transzformáció : tükrözs, nyújtás, forgatás.
- Hasonlósági transzformációt először Cauchy használt.
- Artur Cayley (1821-1896) definiálta az $m \times n$-es mátrixokat, és megmutatta, hogy a kvadratikus alakok ennek speciális esete. Bevezette a mátrixalgebra, a mátrixmüveleteket, és az inverz fogalmát is. Cayle-Hamilton : minden négyzetes mátrix kielégíti a karakterisztikus polinomját. A bizonyításban megelégednek az n=2 esettel.
- A mátrix rangját James Sylvester (1814-1897) definiálta.
- A vektortér fogalmát Leibniz sugallta, de a cikk halála után jelent meg. Hamilton írt az n-dimenziós vektorterekről. A komplex számokat, mint valós test feletti kétdimenziós vektorokat írta le, de fő célját, a komplex számok háromdimenziós általánosítását nem érte el. Ezzelszemben négydimenziós számokat talált, az ugynevezett kvaterniókat($i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$). Az életét ezeknek, a nemkommutatív testnek szentelte ezután.
- Hermann Günther Grassman (1809-1877) középiskolai matematikatanár már vektorokkal írta le a mechanika egyenleteit, és expliciten rögzítette a vektorösszeadás kommutativitását és asszociativitását. Azonban a hírnév csak később jött el, amikor már sikeresen foglalkozott okortudománnyal, így nem érdekelte az elismerés.

6. Variációszámítás

Már az ókorban is foglalkoztak optimalizálási feladatokkal, többekközött az izopermetikus feladattal(adott kerülető síkidomok közül melyik a legnagyobb területű).

- Euklidesz is tudta már, hogy a tükörbe beeső-, és visszaverödési szöge ugyanannyi. Heron felismerte, hogy a tárgy és a kép között a tükröt érintő fény útja minimális.
- Snellius és Descartes azt vették észre, hogy a levegő és a víz határfelületén a beesési szögek szinuszának hányadosa állandó. Fermat felfedezte, hogy ebben az esetben is érvényes a minimum elv, csak az időre

: inhomogén közegben két pont között a fény a legrövidebb útpályán terjed(Fermat-elv[Leibniz első kalkuluscikkében pont ezt bizonyította be az eddigieknél sokkal egyszerűbben]). Fermat azt is tudta, hogy konvex tükör esetében a leghosszabb utat választja a fény, azaz mindig valami szélsőértéket.

- Newton oldotta meg az első igazi variációfeladatot a Principiában : melyik forgástestnek van a minimális közegellenállása, ha a forgástengely irányába haladunk.
- Brachisztochron feladat : homogén nehézségi erőtérben két pont között melyik a leggyorsabb lesiklást biztosító görbe? A feladatot még Galilei tette fel, és a negyedkört adta meg válasznak. Johann Bernulli megtalálta az igazi megoldást, és tett egy felhivást, hogy ki tudja még megoldani. Newton, Jacob Bernoulli, Leibniz és l'Hopital oldotta még meg(a megoldás a ciklois).

Johann Bernoulli vetette fel a geodéziai felületek legrövidebb pályáinak a problémáit tanítványának, Eulernek. Euler megfogalmazta a variációszámítás alapfeladatát, és megoldotta a legáltalánosabban vett izopermetikus feladatot : $\int_0^x f(x, y(x), y'(x))dx \to$ max. Euler a Bernoulli-féle diszkretizációs eljárást használva felfedezte a variációszámítás alaptételét, melyet Lagrange bizonyított : $f'_y(x, y, y') = (d/dx)f'_{y'}(x, y, y')$(Euler-Lagrange differenciálegyenlet).

6.1. Kapcoslatok

- A két testvér Johann és Jakob(13 évvel idősebb) Leibniz melett áltak a prioritási vitában. Amikor a fiatalabbik a báttya babérjaira tört, a bátty féltékenységből megprobált minnél több részt kihasítani öccse sikereiből. Johann fia, Daniel írt egy munkát a hidrodinamikáról, de azt késői publikálása miatt megprobálta apja a magáévá tenni, de ezzel a lépéssel saját eredményeit sem ismerték el.
- Lagrange és Euler lelkesen leveleztek, és Euler átadta a publikálás lehetőségét Eulernek a variációszámítással kapcsolatban. Együtt kidolgozták a fizikai variációs elvet, mely Newton erőtőrvényeit álltalánosítja. Voltaire azonban rosszakat írt Eulerről.

7. Kalkulustól az analízisig

A kalkulust nagy kritika érte, mert homályos fogalmakkal dolgozott, a gondolatmenetei zavarosak voltak.

7.1. Euleri heurisztika

Pietro Mengoli (1625-1686) fogalmazta meg a kérdését a természetes számok reciprokösszegéről, melyet Euler bizonyított, hogy $\pi^2/6$, bár ez a bizonyítás hagy maga után kivetnivalót. Később, sokan indultak el ezen a heurisztikus úton, majd sikerült is bebizonyítania sin függvény Taylor-sorával, azazhogy a természetes számok ^{4} reciprokösszege $\pi^4/90$.

7.2. Függvénysorok

- A rezgő húrt leíró parciális differenciálegyenletek : $\partial^2 y/\partial t^2 = a^2\partial^2 y/\partial x^2$, ahol a peremfeltételek $y(t,0) = y(t,l) = 0$, ahol l a húr hossza, és $f(x) = y(0,x), y_t'(0,x) = 0$. d'Alambert talált egy megoldást, Euler ebből egy másikat(Daniel Bernoulli Euler megoldását álltalánosította, felfedezte, hogy nem csak folytonos függvényre ésvényes a formula). Euler egy új fejezetét nyitotta meg ezzel az analízisnek.

- Ezt az eredményt felhasználva Joseph Fourier (1768-1830), a hővezetés parciális difegyenletét tanulmányozva felfedezte a fourier-sorokat, mely bizonyítását igencsak hiányosan hagyta. Euler kiszámolta a fourier-eggyütthatók értékét f-től függően.

- Niels Abel (1802-1829) belátta, hogy $(\pi - x)/2 = \sum \sin(kx)/k$, ha $[0, 2\pi]$-n nézzük, de más eredményre jutunk a $[-\pi, \pi]$-n. Abel arra is rájött, hogy ha egy hatványsor konvergál r-ben, akkor [-r,r]-en is. Azt hitték, hogy folytonos függvények határértéke is folytonos. Cauchy adott először elfogadható definiciót a folytonosságra.

- Lejeune Dirichlet (1805-1859) azt állította, hogy ha f véges monoton szakaszból áll, akkor a fourier sora konvergál hozzá. Az egyenletes konvergencia($\forall\epsilon\exists N : n > N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$) definicióját és szükségességét, habár Karl Weierstrass (1815-1897) is tudta már, Philipp Seidel (1821-2896) publikálta csak, és jó időbe telt, mire elfogadták. Seidel azt is állította, hogy ha f_n egyelnletesen konvergál, akkor f folytonos.

- Eduard Heine (1821-1881) igazolta, hogy az egyenletesen konvergen függvények fourier sora eggyértelmű. Gasston Garboux (1842-1917) pedig, hogy egyenletes konvergencia esetén a függvénysor tagjai egyenként deriválhatóak. Cesare Arzela (1847-1912)-nek sikerült arra az esetre álltalánosítania, amikor a határfüggvény Riemann-integrálható.

- Marc-Antoine Parseval (1755-1836) jött rá, hogy $1/\pi \int_0^{2\pi} f^2 = 2a_0^2 + \sum(a_k^2 + b_k^2)$. aul du Bois-Reymond (1831-1883) megmutatta, hogy vannak olyan folytonos függvények, melyek fourier sorai végtelen sok pontban divergálnak. Fejér Lipót (1880-1959) belátta, hogyha a fourier sor konvergál, akkor magához a függvényhez konvergál.

7.3. Határérték

- Cauchy vezette be a deriváltat, mint differenciálhányados értékét. Ő hozta aklap alá a határozott integrál fogalmát, melyet Bernhadr Riemann (1826-1866) álltalánosított folytonos függvényekről tetszülegesre. Cauchy szabatosan definiálja a határértéket, míg Weierstrass már a mai, ϵ-os definicióval. Cauchy visszatért a görög szigorhoz, definició-tétel-bizonyítás alaú fogalmakhoz.

- A valós számok fogalmát Georg Cantor (1845-1918) és Richard Dedekind (1831-1916) definiálta helyesen: akárhogy osztjuk ketté a racionáli s számok halmazát, úgy, hogy A beliek kisebbek legyenem a B belieknél, ha A nak van legnagyobb, vagy B nek legkisebb eleme, akkor a vágás racionális, egyébként irracionális. Az így modon definiált valós számok testet alkotnak.

- Arhimedeszi tulajdonság : midnen x,y számhoz létezik olyan n, hogy nx>y, ahol midne a 3 szám pozitív. Bernhard Bolnazo (1781-1848) volt az első, aki sehol sem deriválható, folytonos függvényre példát mondott. Henri Poincare (1852-1912) és Charles Hermite (1822-1901) azt mondta, a mai matematikusok nem azért találnak ki függvényeket, hogy egy problémát megoldjanak, ahnem az elődjeiket cáfolják.

- Dirichlet függvénye, majd később a Brown mozgás(atomok, és a tözsdei árfolyamok mozgásának leírása) is sehol sem diffható, folytonos függvény. Abraham Robinson (1918-1972) megalkotta a nemszetenderd analízis axiomarendszerét, melytől sokat vártak, de nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket.

8. Komplex

- A harmadfokú egyenlet megoldoképletában már megkerülhetetlenül megjelennek a komplex számok, de a szabatos tárgyalásukig az 1800-as évekig várni kelett.

- Bomelli felfedezte, hogy a műveletek továbbra is érvényesek maradnak, és disztributívak.

- d'Alembert belátta, hogy z^w szintén a+bi alakban irható fel.

- Girard már 1629-ben felfedezte a negatív számegyenest, de a komplex számsíkot csak később, két amatőr matemaikus, Caspar Wessel (1745-1818) és Jean Robert Argand (1768-1822) fedezte fel.

- De moviere, habár konkrétan nem írta le, utalt a következő érvényes képletre : $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

- Amíg nem látták gyakorlati hasznukat a komplex számoknak, elég különös dolgot magyaráztak beléjük, Leibniz maga istent látta bennük.

8.1. Függvénytan

- A logaritmus értelmezése jelentett csak igazi kihívást, amin Johann Bernoulli és Leibniz sokat vitatkoztak, hogy log(x<0)=valós (Ber.) vagy komplex(LE.). A halálukig senki nem adott rá megoldást, majd Euler felfedezte, hogy $\log(-1) = i\pi(2k+1)$. Euler az exponenciális függvény hatványsorából rájött, hogy $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \to e^{i\pi} = -1$. Ezt heurisztikusan Newton társa, Roger Cotes (1682-1716) is ismerte.
- Alexis Claude Clairaut (1713-1765) (x,y) síkbeli erőteret modellezett, és észrevette, hogy ha az energia megmarad, pontosan független a munka integrálja az úttól, ha $P = \partial f/\partial x, Q = \partial f/\partial y \to \partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. d'Alembert ugyanerre jutott plusz egy feltétellel : =0.
- f holomorf, ha $\lim(f(z+h)+f(z))/h$ létezik. Euler rájött, hogy érdemes külön foglalkozni a képzetes, és valós résszel, így kapta meg a Cauchy és Riemann a róluk elnevezett egyenleteket : $du/dx = dv/dy, dv/dx = -du/dy$ ahol $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$.
- Cauchy további eredménye, hogy reguláris tartományon zárt görbe integrálja zérus, amiből következik hogy a vonalintegrál értéke független az úttól.
- analitikus egy függvény, ha midnen pontja körül sorba fejthető. Cauchy:midnen diffható függvény analitikus.
  fourier-transzformáció:
  $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$
  laplace-transzformáció:
  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
- Simeon-Denis Poisson (1782-1840) észrevette, hogy fordítva is igaz, azaz hogy $f(s) = 1/2\pi i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(t)e^{st}ds$, ahol a elég nagy valós szám.
- Algebra alaptételét Gauss mondta ki, és bizonyította. Rouche azt mondta ki, hogy egy reguláris tartományon. ekkor ha a határán g-nek nincs gyöke, akkor f+g.nek ugyanannyi gyöke van mint f nek a tarotmányon.

9. Számelmélet

9.1. Euler

- Fermat eredményei nem sok figyelmet keltettek, míg Euler indult el ezen az úton, többekközött Christian Goldbach (1690-1764) -nak köszönhetően, kinek a nevét a máig bizonyítatlan sajtéséről ismerhetjük : minden páros szám felbontható két prím összegére.

- Ő látta be a fermat-számokról, hogy az 5. már nem prím(máig nem ismerünk több prímet az első 4-en kívül).
- Ő látta be azt is, hogy nincs más páros tököpetes szám a $(2^{n+1}-1)2^n$-n kívül(máig sejtés, hogy nincs páratlan tökéletes szám).
- Bevezette a $\varphi(x)$ számelméleti függvényt, mely x nél kisebb, hozzá relatív prímek számát adja meg.
- A kongruencia fogalmát Gauss vezette be, melynek segítségével Euler belátta, hogy $a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\ m)$.
- Ő látta be fermat sejtését($x^n + y^n = z^n$) n=3 esetre, és (tévesen) az alábbi állítást is kimondta : $x^4 + y^4 + z^4 = u^4$ nem megoldható.
- Ő vezette be a (Riemannről elnevezett) zeta-függvényt : $\varsigma(s) = \prod(1-1/p^s)^{-1} = \sum 1/n^s, 1 < s \in R$.
- A következő becslést adta a prímszámok reciprokösszegére : $\log\log n - 2 < \sum 1/p < \log\log n + c$
- Igazolta az exponenciális függvény hatványsoráról, hogy e irracionális. Johann H. Lambert (1728-1777) igazolta ugyanezt a π-ről is.

Ernst Kummer (1810-1893) bevezette az ideálok fogalmát, és jelentősen kiterjesztette a fermat sejtés érvényességét, de azt csak az ezredforduló környékén sikerült Andrew Wiles (1953-) -nek.

- Gauss bevezette a $\pi(x)$ függvényt, az x nél kisebb primszámok számára, és asszimptotikus becslést adott rá : $\lim \pi(x)/(x/\log(x)) = 1$. gauss hárommillióig ellenőrizte(Ezt Riemann bizonyította be, elemi módszerekkel először meg Erdős Pál.). Ennél pontosabb becslést is adott : $li(x) = \int_0^x dt/\log(t)$. Ez a Gauss-féle legaritmikus integrál.
- Pafnutyij Csebicsev (1821-1894) belátta, hogy $0.9 < \pi(x)/(x/\log(x)) < 1.1$. Ő igazolta Joseph Bertrand (1822-1900) sejtését is, miszerint minden n, és 2n között van prím.
- Euler különböztette meg elöször a transzcendens és az algebrai számokat. Legendre azt sejtette, hogy π transzcendens. Először Joseph Liounville (1809-1882) konstruált ilyen számokat($\sum 10^{-k}$). Hermite később belátta, hogy az e transzcendens, ileltve Ferdinand Lindemann (1852-1939) pedig hogy a π is. Ebből következik, hogy a kör nem négyzetesíthető(nem lehet szabályos szerkesztési eszközökkel adott kerülető körből ugyanakkora kerületű négyzetet csinálni).

- Ekkor jött létre a halmazelmélet Cantor által, aki megmutatta, hogy tövv transzcendens szám van, mint algebrai.

- David Hilbert (1862-1943) a problémáiról híres, melyek közül a 7.-et(ha egy számot irracionális számra emelünk, akkor az eredmény transzcendens) Alexandr Gelfont (1906-1968) és Theodor Schneider (1911-1988) bizonyította. Hilbert úgy gondolta, hogy a Riemann-sejtést 10, a fermat sejtést 50, míg a 7. sejtését 100 éven belül nem oldják meg, de minden pont fordítva történt.

10. Valószínűségszámítás

Cardano irta a szerencsejátékokról egy elég felöletes könyvet. Az első igazi valószínűségi feladatot Pascal és Fermat oldotta meg : ha 1. játékosnak m, a 2.-nak n játszmára van szögsége a nyeréshez, akkor az 1. játékos győzelni esélyei: $p_1 = 2^{-(m+n-1)} \sum_{j=n}^{m+n-1} \begin{pmatrix} m+n-1 \\ j \end{pmatrix}$. A köztük zajló levelezés egy híres mondata : "Látom, hogy az igazság ugyanaz Párizsban, mint Touluseban.". Jakob Bernoulli definiálta először a klasszikus valószínűséget, mely után Laplache fogalmazta meg az "ideális/összes" elvet.

10.1. Paradoxonok

- Két ember igazságosaj játszik. 6 győzelem után vége a játéknak. 5-3 az állás. Hogy osszák el a nyereményt? Mivel legfeljebb 3 játék van már hátra, és annak 8 kimenetele lehet, és csak 1 kedvező a 3-asnak, így 7-1 arányban kell osztozniuk.

- szentpétervár paradoxon : ha a tétet folyamatosan duplázom, akkor biztos nyerek. Ez igaz, de a tét várható értéke ∞, ennyi tőkéje meg senkinek nincs.

- 3 doboz, eggyik nyer, választasz eggyet. A másik kettőből megmutatnak egy üreset. Érdemes e váltani?Igen.

- Családnevek kihalásáról : midnen 25 évben egy férfinek születik 0,1,... gyereke. Mi annak a valószínűsége, hogy kihal a családnév?

d'Alembert szerint két érme feldobásának 3 kimenetele van. Daniel Bernoulli bevezette a Neumann-Morgenstein haszonfüggvény elődjét azt állította, hogy a nyeremény hasznossága a nyeremény nagyságával nem egyenesen arányos, hanem csak logaritmikusan. Thomas Bayes (1702-1761) fogamlazta meg a feltételes valószinűség tételét. Ő folytonos, egyenletes eloszlású voltozókat vizsgált.

10.2. Nagy számok törvénye

- Jakob Bernoulli : n kisérlet alatt k szor siker következik be, azzak a valószinűsége $p_{k,n} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k q^{n-k}$. Nagy számok gyenge törvénye : $\forall \epsilon, \delta > 0 \exists N_{\epsilon,\delta}$, hogyha n nagyobb ennél, és a kirsérletet annyiszor megismételjük, akkor k/n relatív gyakoriság eltérése a p-től legalább $1 - \delta$ valószinűséggel kisebb lesz mint ϵ.

- Centrális határeloszlás(De Moviere) : Legyen X_n egy standarizált(0 várható értékkel, 1 szórással) véletlen valószinűségi változó. Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

  ahol Φ a Gauss-féle hibafüggvény, F_n pedig eloszlásfüggvénye X_n-nek.

- Legendre és Gauss a valószinűségszámítás alaperedményeiből jött rá a legkisebb négyzetek módszerére.

- A valószinűségszámítás klasszkus axiómatikus felépítése jóval elmaradt a többi területétől, ami ahoz vezetett, hogy a matematikusok nem fogadták el tényleges tudományágként. Hilbert híres problémáinak az eggyike ennek az axiomatizálása. Ezt Andrej N. Kolmogorov (1903-1987) meg is tette azt, mértékelméleti alapokra helyezve azt.

- Nagy számok erős törvénye : Ha a független X_i val.változóknak, melyeknek van várható értékük, akkor az $s_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$, ezek szorzata majdnem biztosan tart a közös várható értékhez.

11. Lehetetlenségi tételek

11.1. 5-ödfokú egyenlet

A negyedfokú egyelnet megoldóképlete után 2 évszázadig sikertelenül próbálták megoldani az 5-ödfokút. Langrange rakta le a csoportelmélet alapkövét, melyet vele párhuzamosan Theophile Vandermonde (1765-1822) is kodolgozott. Paolo Ruffni (1765-1822) bebizonyította, hogy az 5-ödfokú egyenlet gyökeinek nincsenek olyan nem triviális függvényei, amelyek 5-nél kevesebb értéket vesznek fel. Abel adta meg e bizonyítást helyesen. Evariste Galois (1811-1832) elmélete oldotta meg teljesen ezt a problémakört, szedettvedett jegyzetében, amit Liounville adott ki jóval a halála után. A csoportelmélet Gauss, Abel, Galois és Cauchy munkáiban lehet felfedezni.

- A permutációcsoportokat csoport mivoltát Dedekind bizonyította.

- Lagrange definiálta a rang, és a részcsoportot, és ezek segítségével kimondta, hogy a részcsoport rendje osztja a csoport rendjét.

- Galois vezette be a normálosztó definicióját.
- Abel : midnen véges kommutatív csoport felbontható prímhatványrendú csoportok direkt szorzatára.
- Cayley : Midnen véges csoport reprezentálható permutációcsoportokkal.
- Dedekind megalkotta a véges absztrakt csoportot.
- Felix Klein (1849-1925) bevezette a végtelen transzformácoócsoportokat, és ennek segítségével osztályozta a geometriákat.
- Sophus Lie (1842-1899) észrevette, hogy az integrálható közönséges differenciálegyenletek invariánsak a folytonos transzformációcsoportokra.
- Poincare : A csoportelmélet az egész matematika megtisztítva anyagától, és tiszta formájára egyszerüsítve

11.2. Sokszögek szerkesztése

Gauss dolgozata szabályos sokszögek körzővel és vonalóval való szerkesztéséről, illetve ami vele ekvivalens, az $y^n - 1 = 0$ alakú egyenletek gyökeinek kifejezéséről négyzetgyökök segítségével. Gauss kimondta, hogy midnen $n = 2^\alpha p_1 \dots$ -oldaló szabályos sokszög megszerkeszthető, ahol p_i-k különböző fermat prímek(azaz a 17, 257, és a 65537). A tétel megfordítását Pierre Wantzel (1814-1848) látta be.

- a kockafelezés nem megoldható
- 60 fokos szöget nem lehet harmadolni
- szabályos 9 szöget nem lehet szerkeszteni

11.3. Párhuzamossági axióma

Már Euklidész is külön tárgyalja az Elemek című művében ezt a posztulátumot. Sokáig azt hitték levezethető a többiből, Gerolamo Saccheri (1667-1737) belátta, hogy a háromszög belső szögei nem lehetnem nagyobb mint 180 fok. Ugyanakkor tévesen zárta ki a kisebb mint 180 fok lehetőségét. Lambertot már foglalkoztatta a gondolat, egy olyan geometria felépítése, amelyben nem igaz a párhuzamossági axióma, de visszariatt a forradalmi ujjítástól. Egymástól függetlenül Bólyai János (1802-1860) és Nyikoláj Lobacsevszkij (1793-1856) dolgozta ki a nemeuklideszi geometria alapjait, mely iránt Gauss méltatlanul szólt. Később, mikor Riemann előált a Riemann-geometria alapötletével, az idősödő Gauss arról már megbecsülően beszélt.

11.4. Kontinuum-hipotézis

A fourier sor konvergenciatartományát vizsgálva Cantor elkezdte a számosságelméletét kifejleszteni. Két halmaz egyenlő számosságú, ha kölcsönösen eggyértelmű megfeleltetés létesíthető az elemei között.

- A racionális számok számossága azonos a természetes számokéval.
- A valós számok számossága nagyobb, mint a természetes számoké.
- Az egységnégyzet pontjainak a száma megegyezik az egységszakaszéval.
- Minden halmaz részhalmazaiból álló halmaz számossága nagyobb, mint az eredeti halmaz számossága.
- sejtés : Létezik-e számosság, mely nagyobb mint a megszámlálható, de kisebb mint a kontinuum? Cantor azt hitte belátta, késöbb azt, hogy megcáfolta, majd mindkét bizonyításáról belátta hogy hibás.
- Russel : A borbély azokat borotválhatja meg, akiknem meguk borotválkoznak. Mit tegyen a borbély önmagával?
- Leopold Kronecker (1823-1891) támadta a leghevesebben Cantort.
- Cantor eredményei annyira meglepték önmagát is, hogy "látom, de nem hiszem", írta barátjának, Dedekindnek.
- Az ellentmondásmentessék kiküszöbölése végedz egy szükebb axiómarendszerre volt szükség, melyet Adolf Fraenkel (1891-1965) és ernst Zermelo (1871-1956) teremtett meg.
- Kurd Gödel (1906-1978) belátta, hogy midnen artimetikát is magába foglaló axiomatikus matematikai rendszerben vannak eldönthetetlen állítások. Gödel igazolta, hogy nem cáfolható: van olyan halmazelméleti modell, amelyben a sejtés igaz. Viszont Paul Cohen (1934-2007) "ellenkező" eredményt igazolta: van olyan halmazelméleti modell, amelyben nem igaz.

12. Mérték és funkcionál

12.1. Mértékelmélet

Első lépést Guseppe Peano (1858-1932) tette a mértékelmélet felé, a síkbeli halmaz belső, illetve külső mértékével. A mérték fogalmát Borel definiálta, majd a tanítványa Henri Lebesque (1875-1931) ért el kimagasló eredményeket.

- definiálta a külsö mérték fogalmát, és a λ-mértéket. A mérhető függvény kifejezés is téle származik.

- Giuseppe Vitali (1875-1932) fedezte fel, hogy bármely eltolásinvariáns mérték esetében maradnak mérhetetlen halmazok.

- Ha egy korlátos és mérhető függvény Riemann-integrálható, akkor Lebesgue-integrálható, és a két érték azonos. Kimondta a róla elnevezett konvergenciatételét is. Definiálta a majdnem mindenütt kifejezést.

- Pierre Fatou (1878-1929) jelentős eredményeket ért el a mértékelmélet terén.

12.2. Funkcionálanalízis

13. Csillagászat

13.1. Görögök

- Platon : minden égitest gömb alakú, 5 szabályos poliéder van -> 5 elem van (föld, víz, tűz, levegő, lélek)

- Arisztotelész : geocentrikus világkép : nehezebb testek gyorsabban esnek, egyenes vonalú egyenletes mozgás fenntartásához erő kell, a föld küröl kering minden

- Ptolemaiosz dolgozta ki ezt a világképet : a hold és a nap egyenletesen kering a föld körül, a hold havonta ujjászületik, a csillagok rögzítve vannak, az 5 bolygó előre-hátra mozog az égen

- Arisztarkhosz (kb. i.e. 310-230) azt mondta, hogy a Föld saját tengelye körül forogva kering a Nap körül.

- Eratosztenész egész jó becslést adott a nap-föld távolságra

13.2. Kopernyikusz-korszak

- Mikolaj Kopernyikusz (1473-1543) előált a heliocentrikus világképpel, azazhogy : a nap a világegyetem központja, a nap körül forog a föld, a föld körül meg a hold, a csillagok mérhetetlen távol vannak

- parallaxis:a csillagok ugyanugy látszanak tavasszal és összel

- Az egyház nem támadta, csak a protestánsok

- Tycho de Brahe (1541-1601) kombinálta a földközpontú, és a napközpontú világképeket. Mindenelett az eddigieknél jobb méréseket végzett. Ezek alapján már csak egy modell jöhetett szóba : Johannes Kepler (1571-1630) elmélete, mely azt mondja, hogy a volygól elipszispályán keringenek a nap körül, és a nap a fókuszban van, minden bolygó pillanatnyi sebessége fordítottan arányos a naptól vett távolságával, és a naprendszer bármelyik bolygójának a keringési idejének a négyzetét elosztva az elipszis nagytengelyének a köbével, ugyanazt a számot kapjuk

- Galilei : felfedezte, hogy a holdnak vannak kráterei, és hegyei, a jupiternek vannak holdjai
- Newton az egész Kepleri rendszert fizikai alapokra helyezte, és bebizonyította.

13.3. Kopernyikusz után

- Max Planck, a kvantumfizika attya aztmondta, hogy a tudományos igazságokat nem az új igazságok győzik le, hanem a képviselőik halnak meg
- Frederick Herschel (1738-1822) felfedezte a naprendszer új bolygóját(Uránusz).
- Friedrick Bessel (1784-1846) igazolta a parallaxist.
- Urbain Leverrier (1811-1877) megjósolta a még ismeretlen neptunusz helyét
- Albert Eistein (1879-1955) az álltalános relativitáselméletet használva bebizonyította a Newtoni elmélet utolsó rejtélyét : a merkur perihéliumát, melyret Levierre tévesen egy másik bolygóval magyarázott
- Az első naprendszeren kívüli bolygót az ezredforduló környékén fedezték csak fel
- Az eggyház ujratárgyalta Galileo perét 2000-ben, és felmentette őt, míg Kopernyikusz könyvét 1822-ben vették le a tiltólistáról