1. Integrálási szabályok, Alap integrálok

$$\int cf(x)\ dx = c\int f(x)\ dx \tag{1}$$

$$\int f(x) \pm g(x)\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx \tag{2}$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\ dx \tag{3}$$

$$\int f^n(x)\cdot f'(x)\ dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C \tag{4}$$

$$\int \frac{f'}{f}\ dx = \ln|f(x)| + C \tag{5}$$

$$\int f(ax+b)\ dx = \frac{F(ax+b)}{a} \tag{6}$$

$$\int 1\ dx = +C\ dx \tag{7}$$

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \in \mathcal{R}, n \neq -1 \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C \tag{9}$$

$$\int e^x\ dx = e^x + C \tag{10}$$

$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \tag{11}$$

$$\int \sin(x)\ dx = -\cos(x) + C \tag{12}$$

$$\int \cos(x)\ dx = \sin(x) + C \tag{13}$$

$$\int \mathrm{tg}\ (x)\ dx = -\ln|\cos(x)| + C \tag{14}$$

$$\int \mathrm{ctg}\ (x)\ dx = \ln|\sin(x)| + C \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\ dx = -\mathrm{ctg}\ (x) + C \tag{16}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx = \mathrm{tg}\ (x) + C \tag{17}$$

$$\int \mathrm{sh}\ (x)\ dx = \mathrm{ch}\ (x) + C \tag{18}$$

$$\int \mathrm{ch}\ (x)\ dx = \mathrm{sh}\ (x) + C \tag{19}$$

$$\int \mathrm{th}\ (x)\ dx = \ln|\mathrm{ch}\ (x)| + C \tag{20}$$

$$\int \mathrm{cth}\ (x)\ dx = \ln|\mathrm{sh}\ (x)| + C \tag{21}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2\ (x)}\ dx = -\mathrm{cth}\ (x) + C \tag{22}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}\ ^2(x)}\ dx = \mathrm{th}\ (x) + C \tag{23}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arc tg}\,(x) + C \tag{24}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} \text{arcth}\,(x)+C & |x|<1 \\ \text{ar cth}\,(x)+C & |x|>1 \end{array}\right\} = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \tag{25}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arc sin}\,(x) + C \tag{26}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \text{ar sh}\,(x) + C \tag{27}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} \text{ar ch}\,(x)+C & x<1 \\ \text{ar ch}\,(x)+C & x>1 \end{array}\right\} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

2. Integrálszámítás

- Valós együtthatós racionális törtfüggvények: $R(x) = r(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$ alakba hozható, ahol $P(x)$ fokú mint$Q(x)$.$Q(x)$ pedig parcionális törtekre bontahtók, úgy hogy a nevezők első vagy másod fokúak, vagy azok hatványai. Megoldható az egyenletrendszer az együtthatókraés külön integrálni őket, a következő alapján:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| \tag{30}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)} \tag{31}$$

$$\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{B}{2}\ln|x^2+bx+c| + \frac{C-\frac{Bb}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\cdot \text{arc tg}\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) \tag{32}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^l}\,dx = \frac{B}{2}\frac{(x^2+bx+c)^{1-l}}{1-l} + \left(C-\frac{Bb}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \tag{33}$$

  Ekkor az új integrál rekurzívan megszünethető.

- Trigonometrikus függvények:

  1. Ha tg $\left(\frac{x}{2}\right) = t$helyettesítést alkalmazzuk, minden ilyen alakú visszavezethető az előzőkre.

  $$\sin(x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin^2(x) = \frac{4t^2}{1+2t^2+t^4} \qquad \cos^2(x) = \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} \qquad dx = \frac{2}{1-t^2}\,dt$$

  2. Ha $\sin(x)$ és $\cos(x)$ csak páros hatványon szerepelnek érdemes tg $(x) = t$-t helyettesíteni.

  $$\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{t^2+1} \qquad dx = \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

- Exponenciális függvények: $R(e^x)$-ből$e^x = t$ helyettesítéssel racionális törtfüggvényt alakíthatunk.

- Hiperbolikus függvények: th $\left(\frac{x}{2}\right) = t$ helyettesítéssel visszavezethető törtfüggvényre

  $$\text{sh}\,(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{ch}\,(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{sh}^2\,(x) = \frac{4t^2}{1+2t^2+t^4} \qquad \text{ch}^2\,(x) = \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} \qquad dx = \frac{2}{1-t^2}\,dt$$

  Vagy mivel ezek valójában exponenciálisfüggvények lehet őket exponenciális ötlettel is integrálni. $e^x = t$

- Irracionális függvények: Ezek a következő helyettesítésekel „valószínűleg” visszavezethetők törtfüggvényekre:

1. $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$alakúak $\frac{x}{a} = sin(t)$helyettesítéssel
2. $R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$alakúak $\frac{x}{a} = sh(t)$ helyettesítéssel
3. $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$alakúak $\frac{x}{a} = ch(x)$, ha $x \geq 0$, és $\frac{x}{a} = -ch(x)$, ha $x \leq 0$
4. $R(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}})$ alakúakat $x = t^q$helyettesítéssel, ahol q a q_i-k legkisebb közös többszöröse.
5. Euler féle helyettesítés:
   $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ alakúak valamelyik helyettesítéssel „valószínűleg" törtfüggvény lesz:
   (a) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a} \quad a > 0$
   (b) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm x\sqrt{c} \quad c > 0$
   (c) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x + x_0) \quad x_0$ ahol x_0 az $ax^2 + bx + c$ egyenlet egy valós gyöke.

3. Határozott integrál

1. Terület:

   (a) $f(x),\ g(x)$ görbék és $x = a,\ x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe:

   $$T = \left| \int_b^a f(x) - g(x)\ dx \right|$$

   (b) $x = x(t),\ y = y(t) \quad t \in [a, b]$ paraméteres alakban megadott görbe alatti terület:

   $$T = \int_b^a x'(t)y(t)\ dt$$

   (c) $x = x(t),\ y = y(t) \quad t \in [a, b]$ paraméteres alakban megadott szektor szektor területe:

   $$T = \frac{1}{2} \int_b^a x'(t)y(t) - x(t)y'(t)\ dt$$

   (d) $r(\varphi) \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$ polárkoordinátásan megadott szektor területe:

   $$T = \frac{1}{2} \int_b^a r^2(\varphi)\ d\varphi$$

2. Ívhossz:

   (a) ha $f(x)$ függvény $[a, b]$-n folytonos és korlátos, akkor az ívhossz:

   $$s = \int_b^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

   (b) $x = x(t),\ y = y(t) \quad t \in [a, b]$ paraméteres alakban megadott ív hossza:

   $$s = \int_b^a \sqrt{(x'(t))^2 + (y(t))^2}\ dt$$

   (c) $r(\varphi) \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$ polárkoordinátásan megadott ív hossza:

   $$s = \int_\beta^\alpha \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi)^2)}\ dt$$

3. Forgástest felszíne:

   (a) Ha az x tengelyre forgásszimmetrikus test palástjának a tengellyel párhuzamos ívét a folytonos $f(x)$ függvény írja le, akkor a tengely $[a, b]$ szakasza körüli palást felszíne:

   $$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

(b) Az $x = x(t),\ y = y(t) \quad \in [a, b]$ paraméteres alakban megadott folytonos ív x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest palástjának felszíne:

$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt$$

4. Forgástest térfogata:

(a) ha a folytonos $f(x)$ írja le egy forgástest x tengellyel párhuzamos palástjának ívét, akkor ennek a forgásttestnek az x tengely $[a, b]$ intervallumra eső térfogata:

$$V = \pi \int_b^a f^2(x)\ dx$$

(b) ha $x = x(t),\ y = y(t)$ paraméterrel megadott folytonos ív írja le egy forgástest x tengellyel párhuzamos palástját, akkor ennek a forgástestnek az x tengely $[a, b]$ intervallumára eső térfogata:

$$V = \pi \int_b^a y^2(t)x'(t)\ dt$$