Ergodelmélet és dinamikai rendszerek
II. rész

Szász Domokos, Bálint Péter
BME Matematika Intézet

2011. március 28.

Készült a

TÁMOP-4.1.2.-08/2/A/KMR-2009-0027

pályázat támogatásával

Lektorálta: Krámli András

Tartalomjegyzék

1. Birkhoff–Hincsin tétel

A Birkhoff-Hincsin ergodtétel ([13] 2.14 tétele) az ergodelmélet egyik legalapvetőbb tétele. Mi itt nem az eredeti bizonyítást követjük, hanem Katznelson és Weiss érvelését ([7]), amely talán jobban rámutat a jelenségekre.

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus **ergodikus**. Ebben az esetben a Birkhoff-Hincsin ergodtétel így szól:

1.1. állítás: *$\forall f \in L_1$-re μ-majdnem minden x-re*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) \overset{n\to\infty}{\to} \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $f \geq 0$, ellenkező esetben felbontjuk a függvényt pozitív és negatív részek összegére, és ezekre külön bizonyítunk.
Legyen

$$f^{+(-)}(x) = \limsup\,(\liminf)\,\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x)$$

1. $$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j T x) = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(T^i x) - \frac{f(x)}{n+1}\right)$$

   miatt $f^+(Tx) = f^+(x)$, $f^-(Tx) = f^-(x)$ μ-majdnem mindenütt. Így az ergodicitás miatt μ-majdnem mindenütt $f^+, f^- = \text{const}$.

2. Elegendő belátni: $f^+ \leq \displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu \leq f^-$, mivel akkor a triviális $f^- \leq f^+$ miatt $f^- = f^+$ μ-majdnem mindenütt.

3. Legyen $\varepsilon > 0$ fix. Az alábbi 1.-4. lépésekben belátjuk, hogy $f^+ \leq \int f \,\mathrm{d}\mu + 3\varepsilon$. Az 5. lépésben vázoljuk, hogy hasonló érveléssel $f^- \geq \int f \,\mathrm{d}\mu - 3\varepsilon$.

1. lépés: Legyen $n\colon M \to \mathbb{Z}_+$

$$n(x) := \inf\left\{ n \geq 1 \;\middle|\; f^+ \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) + \varepsilon \right\}.$$

Nyilván

$$n(x) f^+ \leq \sum_{j=0}^{n(x)-1} f(T^j x) + \varepsilon n(x). \tag{1.1}$$

2. lépés: $n(x)$ helyett korlátos függvényt veszünk. Először is, ε-hoz válasszunk egy $N(= N_\varepsilon) > 0$ számot, melyre az $A(= A_\varepsilon) = \{x \in M \mid n(x) > N\}$ halmaznak már nagyon kicsi a mértéke. Konkrétan, legyen N olyan nagy, hogy

$$\mu(A) < \frac{\varepsilon}{f^+}. \tag{1.2}$$

Ekkor bevezethetjük a következő új függvényeket:

$$\hat{n}(x) = \begin{cases} n(x) \\ 1 \end{cases} \quad \text{és} \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin A \\ \max\{f(x), f^+\} & x \in A. \end{cases}$$

A defininícióból közvetlenül következik, hogy $\hat{n}(x) \leq N$, tehát korlátos függvény.

Továbbá a (1.1)-ből

$$\hat{n}(x) f^+ \leq \sum_{j=0}^{\hat{n}(x)-1} \hat{f}(T^j x) + \varepsilon \hat{n}(x). \tag{1.3}$$

Másrészt $x \in A$ esetén $f(x) \leq f(x) + f^+$, így (1.2)-ből

$$\int \hat{f}\, \mathrm{d}\mu \leq \int_{\overline{A}} f\, \mathrm{d}\mu + \int_A f\, \mathrm{d}\mu + \int_A f^+ \leq \int f\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon. \tag{1.4}$$

3. lépés: $\hat{f}$ és $\hat{n}$ bevezetésével az ergodikus átlag és f^+ eltérését szabályos időközönként kontrolálni tudjuk: most választunk egy kellően nagy $L(= L_\varepsilon)$ számot, hogy L hosszú időre átlagolva ez az eltérés már elenyésző legyen. Konkrétan

$$\frac{N f^+}{L} < \varepsilon \tag{1.5}$$

Definiáljuk rekurzíve a következő $n_k(x)\colon M \to \mathbb{Z}_+$ megállási időket: $(k \geq 0)$

$$\begin{aligned} &n_0(x) = 0 \\ &n_1(x) = n_0(x) + \hat{n}(T^{n_0(x)} x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &n_k(x) = n_{k-1}(x) + \hat{n}(T^{n_{k-1}(x)} x). \end{aligned}$$

Továbbá

$$k(x) = \sup\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid n_k(x) \leq L - 1\}.$$

Az A halmaz definíciója alapján

$$\hat{n}(x) \leq N \left[\begin{array}{ll} \rightsquigarrow n_k - n_{k-1} \leq N & \quad (\forall k \geq 1), \\ \rightsquigarrow L - n_{k(x)} \leq N. & \end{array} \right.$$

Tehát

$$Lf^+ = \sum_{k=1}^{k(x)} f^+(n_k(x) - n_{k-1}(x)) + f^+(L - n_{k(x)}(x)),$$

ami (1.3) miatt

$$\le \sum_{k=1}^{k(x)} \left[\sum_{j=n_{k-1}(x)}^{n_k(x)-1} \left(\hat{f}(T^j x) + \varepsilon \hat{n}(T^{n_{k-1}(x)} x) \right) \right] + f^+ N \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{L-1} \hat{f}(T^j x) + \varepsilon L + f^+ N. \tag{1.6}$$

4. lépés: (1.6)-t integrálva μ szerint

$$Lf^+ \le L \int \hat{f} \, \mathrm{d}\mu + L\varepsilon + f^+ N$$

azaz (1.4) és (1.5) alapján

$$f^+ \le \int \hat{f} \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon + f^+ \frac{N}{L} \le \int f \mathrm{d}\mu + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon. \tag{1.7}$$

5. lépés: Annak igazolása, hogy $f_- \ge \int f \, \mathrm{d}\mu$, a fenti 1.–4. lépések mintájára történik (persze fordított irányú egyenlőtlenségekkel). Csak néhány apróbb részlet változik, például az A halmazon az $\tilde{f}$ függvényt 0-nak definiáljuk (f-ről eleve feltettük, hogy nemnegatív). Vázlatosan:

$$n(x) := \inf \left\{ n \ge 1 \,\middle|\, \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} f(T^i x) \le f^- + \varepsilon \right\} \tag{A}$$

$$\sum_{0}^{n(x)-1} f(T^i x) \le n(x) f^- + n(x) \cdot \varepsilon. \tag{B}$$

Legyen

$$A = (n(x) > N), \quad \int_A f(x) \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon, \text{ és } x \in A\text{-ra } \tilde{f}(x) = 0, \ \tilde{n}(x) = 1$$

$$\text{míg } x \notin A\text{-ra } \tilde{f}(x) = f(x), \ \tilde{n}(x) = n(x) \tag{C}$$

$$\sum_{0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{f}(T^i x) \le \tilde{n}(x) \cdot f^- + \tilde{n}(x) \cdot \varepsilon \tag{D}$$

$$\int \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu \ge \int f \, \mathrm{d}\mu - \int_A f \, \mathrm{d}\mu \ge \int f \, \mathrm{d}\mu - \varepsilon \tag{E}$$

$$Lf^- = f^- \sum_{k=1}^{k(x)} (n_k(x) - n_{k-1}(x)) + f^-(L - n_k(x))$$

$$Lf^- \geq \sum_0^{L-1} \tilde{f}(T^i x) - L \cdot \varepsilon - Nf^-$$

integrálva majd átosztva

$$f^- \geq \int f \,\mathrm{d}\mu - 3\varepsilon$$

$$f^- \geq \int f \,\mathrm{d}\mu. \tag{F}$$

2. Szubadditív ergodtétel

A szubadditív sorozatok fontos szerepet töltenek be az analízisben, az erog-elméletben pedig különösen nagy a jelentőségük (többek között az entrópia vagy a Ljapunov exponensek definíciójánál, vizsgálatánál kerülnek elő). Kezelésük kiindulópontja az alábbi alapvető lemma.

2.1. lemma: (Szubadditivitási lemma (Fekete Mihály, 1923)) *Legyen* $a\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ *és tegyük fel, hogy* $\forall n, m \in \mathbb{Z}_+$*-ra*

$$a_{n+m} \le a_n + a_m.$$

Akkor

$$\lim \frac{a_n}{n} \exists \textit{ és } = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}.$$

Bizonyítás:
Tegyük fel,, hogy $\alpha = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} \right\} > -\infty$. ($\alpha = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} \right\} = -\infty$ esetén analóg a bizonyítás.)
Ekkor $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ m$, hogy $\frac{a_m}{m} < \alpha + \varepsilon$.
Rögzítsük az m-t, továbbá egy $r = 0, 1, ..., (m-1)$ számot. Tekintsük $n = l \cdot m + r$, $(l \to \infty)$ indexű elemek részsorozatát.

$$\begin{aligned} a_n &\le l a_m + a_r \\ \frac{a_n}{n} &\le \frac{lm}{lm + r} \cdot \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$l \to \infty$-esetén látszik, hogy a részsorozat mentén $\limsup \frac{a_n}{n} \le \alpha + \varepsilon$, és mivel r választása tetszőleges volt m-hez, továbbá tetszőleges ε-hoz van alkalmas a_m, adódik

$$\begin{aligned} &\limsup_n \frac{a_n}{n} \le \alpha + \varepsilon \\ \rightsquigarrow \ &\limsup \frac{a_n}{n} \le \alpha = \inf \frac{a_n}{n}. \end{aligned}$$

□

2.2. tétel: (Szubadditív ergodtétel (Kingman, 1963)) *Legyen* $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ *ergodikus endomorfizmus. Tegyük fel, hogy* $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in L_1$ *szubadditív, azaz* $\forall n, k \ge 1$

$$F_{n+k}(x) \le F_k(x) + F_n(T^k x) \qquad \mu\textit{-majdnem mindenütt.} \tag{2.2}$$

Akkor

- $\exists \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, *hogy*

$$\lim_n \frac{1}{n} F_n(x) = \lambda \qquad \mu\text{-}\textit{majdnem mindenütt}$$

- $\lambda = \inf \left\{ \frac{1}{n} \int F_n \, \mathrm{d}\mu \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$.

Megjegyzés: Ha (2.2)-ben egyenlőtlenség helyett egyenlőség áll, szüségképpen $F_n(x) = F_1(x) + F_1(Tx) + ... + F_1(T^{n-1}x)$, továbbá μ invarianciája miatt $\frac{1}{n} \int F_n \, \mathrm{d}\mu = \int F_1 \, \mathrm{d}\mu \; \forall n$, és így $\lambda = \int F_1 \, \mathrm{d}\mu$. Tehát ebben a speciális esetben éppen a Birkhoff-Hincsin ergodtételt kapjuk vissza (az $F_1 \in L_1$ függvényre).

A szubadditív ergodtételre is Katznelson és Weiss bizonyítását követjük.
Bizonyítás: (2.2)-ből

$$\int F_{n+k} \, \mathrm{d}\mu \leq \int F_k \, \mathrm{d}\mu + \int F_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Így a 2.1. Lemma miatt

$$\lambda = \inf \left\{ \frac{1}{n} \int F_n \, \mathrm{d}\mu \;\middle|\; n \geq 1 \right\} = \lim \frac{1}{n} \int F_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Belátjuk, hogy ezzel igaz az állítás.

Jelölés:

$$F^+(x) = \limsup \frac{1}{n} F_n(x)$$
$$F^-(x) = \liminf \frac{1}{n} F_n(x).$$

1. lépés: F^+ és F^- invariáns függvények.
Ugyanis: $\dfrac{F_{n+1}(x)}{n+1} \leq \dfrac{F_1(x)}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} \dfrac{F_n(Tx)}{n}$
Így

$$\limsup\,(\liminf)\, \frac{F_n(x)}{n} \leq \limsup\,(\liminf)\, \frac{F_n(Tx)}{n}$$

azaz

$$F^-(x) \leq F^-(Tx) \qquad\qquad F^+(x) \leq F^+(Tx)$$

de

$$\int F^-(x) \, \mathrm{d}\mu = \int F^-(Tx) \, \mathrm{d}\mu \quad \rightsquigarrow \quad F^-(x) = F^-(Tx),$$

(F^- interálhatóságát a Fatou lemma biztosítja) és ugyanígy

$$F^+(x) = F^+(Tx).$$

Így az ergodicitás miatt $F^+(x) = F^+$ és $F^-(x) = F^-$ valamilyen konstansokra, μ- majdnem mindenütt. Van tehát három számunk: λ, F^+ és F^-, ezek egyenlőségét kell belátni.

2. lépés: Először belátjuk, hogy $F^+ \leq \lambda$.

Könnyen adódik, hogy $F^+ \leq \int F_1 \, \mathrm{d}\mu$, ugyanis (2.2)-ből

$$\frac{1}{n} F_n(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F_1(T^j x) \tag{2.3}$$

így Birkhoff–Hincsin ergodtétele miatt

$$F^+ \leq \int F_1 \, \mathrm{d}\mu$$

Legyen $N > 1$ tetszőleges rögzített: belátjuk, hogy $F_+ \leq \frac{1}{N} \int F_N \, \mathrm{d}\mu$.

Legyen egyelőre n is rögzített, de később $n \to \infty$-t fogunk venni.

$\forall 1 \leq i \leq N$-re nézzük az $i,\ i+N,\ i+2N, \ldots, i+m_iN \leq n-N$ (viszont $n - N < i + (m_i + 1)N$) számtani sorozatokat. (2.2)-ből

$$F_n(x) \leq F_i(x) + \sum_{l=0}^{m_i} F_N(T^{i+lN}x) + F_{n-(i+m_iN)}(T^{i+m_iN}x).$$

Ezeket összegezve $1 \leq i \leq N$-re

$$NF_n(x) \leq \sum_{i=1}^{N-1} F_i(x) + \sum_{j=0}^{n-N} F_N(T^j x) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i(T^{n-i}x)$$

azaz

$$\frac{1}{n} F_n(x) \leq \underbrace{\frac{1}{N}\left[\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-N} F_N(T^j x)\right]}_{\mathbf{I}} + \frac{1}{n}\left[\underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i(x)}_{\mathbf{II}} + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i(T^{n-i}x)}_{\mathbf{III}}\right]. \tag{2.4}$$

Most tekintsük az $n \to \infty$ viselkedést: Birkhoff–Hincsin ergodtétele miatt $\mathbf{I} \to \dfrac{1}{N} \displaystyle\int F_N \, \mathrm{d}\mu$ μ-majdnem minden x-re. Másrészt nyilvánvalóan μ-majdnem minden x-re $\mathbf{II} \to 0$ és $\mathbf{III} \to 0$.

Tehát $F^+ \leq \dfrac{1}{N} \displaystyle\int F_N \, \mathrm{d}\mu \quad \forall N \geq 1$-re.

Innen

$$F^+ \leq \lambda = \inf_N \frac{1}{N} \int F_N \, \mathrm{d}\mu. \tag{2.5}$$

3. lépés: (2.5) fényében elég belátni, hogy $\lambda \leq F^-$. $-\infty = \lambda$ esetén ez automatikusan teljesül, így feltehető, hogy $-\infty < \lambda$.
Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített: be fogjuk látni, hogy $\lambda \leq F^- + 3\varepsilon$. A Birkhoff-Hincsin tétel bizonyításánál látott gondolatmenetet fogjuk követni. Legyen tehát

- $$n(x) = \min\left\{ n \geq 1 \;\middle|\; \frac{1}{n}F_n(x) \leq F^- + \varepsilon \right\} \tag{2.6}$$
- $A = \{x \in M \mid n(x) > N\}$

ahol az $N > 1$ számot (ε-hoz) úgy választjuk, hogy

$$\int_A (|F_1(x)| + |F^-|)\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Legyen

$$\tilde{F}^-(x) = \begin{cases} F^- \\ F_1(x) \end{cases} \qquad \text{és} \quad \tilde{n}(x) = \begin{cases} n(x) & x \notin A \\ 1 & x \in A. \end{cases}$$

Mármost a definíció szerint $F^- \leq \tilde{F}^-(x)$ (ugyanis $x \in A$-ra $n(x) > 1$, így $F_1(x) > F^- + \varepsilon$). Ugyanakkor (2.7) miatt

$$\int \tilde{F}^-\,\mathrm{d}\mu \leq F^- + \varepsilon. \tag{2.8}$$

4. lépés: (2.6)-ből és a definíciókból $x \notin A$-ra $\tilde{n}(x) = n(x)$, és így

$$\begin{aligned} F_{n(x)}(x) &\leq n(x)F^- + \varepsilon n(x) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + n(x)\varepsilon = \sum_{j=0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \tilde{n}(x)\varepsilon. \end{aligned}$$

Ugyanakkor $x \in A$-ra $F_{\tilde{n}(x)}(x) = F_1(x) = \tilde{F}^-(x)$. Tehát

$$F_{\tilde{n}(x)}(x) \leq \sum_{j=0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \varepsilon\tilde{n}(x) \tag{2.9}$$

μ majdnem minden x-re.
Most $L > N$-hez vezessük be, ugyanúgy, mint Birkhoff–Hincsin ergodtétel bizonyításában a 3. lépésben, az $n_0(x), n_1(x), ...n_k(x)$ megállási időket és $k(x)$-t.
A szubadditivitást használva

$$F_L(x) \leq F_{\tilde{n}(x)}(x) + F_{\tilde{n}(T^{n_1(x)}x)}(T^{n_1(x)}x) + ... + F_{\tilde{n}(T^{n_{k-1}(x)}x)}(T^{n_{k-1}(x)}x) + F_{L-n_k(x)}(T^{n_k(x)}x).$$

Ebből (2.9) alapján és kihasználva, hogy $L - n_k \leq N$

$$F_L(x) \leq \sum_{j=0}^{L-N} \tilde{F}^-(T^j x) + \varepsilon L + \sum_{j=L-N}^{L} |F_1(T^j x)|.$$

Integrálva és L-lel osztva

$$\lambda \leq \int \frac{1}{L} F_L \, \mathrm{d}\mu \leq \int \tilde{F}^- \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon + \frac{N}{L} \int |F_1| \, \mathrm{d}\mu.$$

Most $L \to \infty$ esetén (2.8) miatt

$$\lambda \leq F^- + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad \lambda \leq F^-.$$

Megjegyzés: Ha $\lambda > -\infty$, akkor L_1-konvergencia is igaz. Ugyanis a (2.3) Formula alapján $\frac{1}{n}(F_n)_+$ (itt g_+ a g függvény a pozitív része) egyenletesen integrálható. $\square$

Fő lépések (Összefoglaló)

1. F^+ és F^- invariáns függvények.

2. $\forall N$-re $F^+ \leq \frac{1}{N} \int F_N$, így $F^+ \leq \lambda$.

3. $\lambda \leq F^-$ bizonyításához bevezetjük az $n(x)$, $A = A(\varepsilon)$, $\tilde{F}^-$, $\tilde{n}$ mennyiségeket, melyekre:

- $F^- \leq \tilde{F}^-(x)$
- $\int \tilde{F}^- \, \mathrm{d}\mu \leq F^- + \varepsilon$
- $F_{\tilde{n}(x)}(x) \leq \sum_{j=0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \tilde{n}(x) \cdot \varepsilon.$

4. Mint Birkhoff–Hincsin ergodtételében

$$F_L(x) \leq \sum_{j=0}^{L-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \varepsilon L + N F^- + \sum_{j=L-N}^{L} F_1(T^j x).$$

Tehát integrálva és L-lel osztva

$$\lambda \leq \frac{1}{L} \int F_L \, \mathrm{d}\mu \leq \int \tilde{F}^- \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon + \varepsilon \leq F^- + 3\varepsilon$$

$$\lambda \leq F^-.$$

3. Oseledec multiplikatív ergodtétele

Ebben a fejezetben a dinamikai rendszerek egy nagyon fontos osztályával, a sima dinamikai rendszerekkel foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy a fázistér, M kompakt Riemann sokaság, a dinamika pedig egy $f\colon M \circlearrowleft M$ C^1-diffeomorfizmus. $\mathcal{B}$ jelöli a Borel σ algebrát, így $(M, \mathcal{B}, f)$ nyilván automorfizmus. További jelölések:

T_xM az M sokaság x ponthoz tartozó érintőtere;

D_xf: differenciál, vagy érintőleképezés:$T_xM \to T_{fx}M$ lineáris operátor;

$D_x(f^n) = (D_{f^{n-1}x}f) \cdot (D_{f^{n-2}x}f) \cdots (D_{fx}f) \cdot (D_xf)$.

ami a láncszabály egyszerű következménye.

Fürstenberg–Kesten tétel (1960)

Ha μ ergodikus mérték, akkor $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D_xf^n\| = \lambda \quad \mu\text{-majdnem minden } x\text{-re.} \tag{3.1}$$

Értelmezés: A Riemann struktúra meghatároz egy belső szorzatot az érintő nyaláb $\forall T_xM\colon x \in M$ fibrumán. (Felületek esetén ez az ún. első alapforma.)

$\|D_xf^n\|$ a $D_xf^n\colon T_xM \circlearrowleft$ lineáris leképezés normája az indukált norma szerint.

Nyilván ha más, ekvivalens Riemann-metrikát választunk, akkor $\log \|D_xf^n\|$ változása csak korlátos, így $\frac{1}{n} \log \|D_xf^n\|$ limesze ugyanaz.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a szubadditív ergodtételt az $(M, \mathcal{B}, \mu)$-re $F_n(x) = \log \|D_{f^nx}\|$-szel $(n \geq 1)$. A tétel feltételei valóban teljesülnek:

- Mivel f^n diffeomorfizmus, a $||D_xf^n||$ pozitív függvény M-en, ami M kompaktsága miatt 0-tól és ∞-től is el van választva, így $F_n \in L_1$.
- Továbbá
$$\|D_xf^{n+k}\| = \|D_{f^nx}f^kD_xf^n\| \leq \|D_{f^nx}f^k\|\|D_xf^n\|,$$
logaritmust véve éppen F_n szubadditivitását kapjuk.

Tehát μ-majdnem minden x-re $\exists \lambda = \lim \frac{1}{n} \| \log D_xf^n\|$. $\square$

Legyen $\|Df^{-1}\| = \sup\{\|D_x f^{-1}\| \mid x \in M\}$, ez a mennyiség, mivel F diffeomorfizmus és M kompakt, nyilván véges. $\|Df^{-1}\|$ segítségével alsó becslést adhatunk λ-ra:

$$\frac{1}{\|Df^{-1}\|^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{láncszabály}}}{\leq} \frac{1}{\|D_{f^n x}(f^{-1})^n\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per. def.}}}{\leq} \|D_x f^n\|$$

ezért $\forall n \geq 1$-re

$$-\log\|Df^{-1}\| \leq \frac{1}{n} F_n(x) = \frac{1}{n}\log\|D_x f^n\|$$

azaz $\lambda \geq -\log\|Df^{-1}\|$.

Oseledec tétele felületekre (1960)

A továbbiakban feltesszük, hogy $f\colon M \circlearrowleft C^1$-diffeomorfizmus, M kompakt *felület*, μ-ergodikus mérték f-re.

3.1. állítás: *Az alábbi két eset valamelyike biztosan megvalósul.*

(Különböző Ljapunov exponensek.) $\exists \lambda_1 > \lambda_2$, *és* $\exists T_x M = E_x^1 \oplus E_x^2$ *mérhető felbontás, hogy* μ*-majdnem minden* x*-re*

$$\begin{aligned} &\forall v_1 \notin E_x^2\text{-re} \quad \lim \frac{1}{n}\log\|Df^n(v_1)\| = \lambda_1, \\ &\forall v_2 \in E_x^2\text{-re} \quad \lim \frac{1}{n}\log\|Df^n(v_2)\| = \lambda_2. \end{aligned}$$

(Azonos Ljapunov exponensek.) A fenti állításban $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, *ahol* λ *a Fürstenberg-Kesten tételben szereplő* λ. *Pontosabban,* μ *m.m.* $x \in M$ *esetén* $\forall v \in T_x M$ *vektorra*

$$\lim \frac{1}{n}\log\|Df^n(v)\| = \lambda.$$

Oseledec általánosan (1968)

$f\colon M \circlearrowleft M$ C_1-diffemorfizmus, M kompakt Riemann sokaság, μ-ergodikus mérték.

$$\exists\ \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k \qquad (k \leq d)$$

$$\exists\ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+ : n_1 + \cdots + n_k = d$$

$$\exists\ T_x M = E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^k \quad \text{mérhető, invariáns felbontás,}$$

hogy

$$\dim E_x^j = n_j \quad \text{és} \quad D_x f E_x^j = E_{fx}^j$$

legyen és μ-majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n(v)\| = \lambda_l$$

amennyiben $v \in E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^l$ de $v \notin E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^{l-1}$.

Megjegyzések:

1. A $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számokat az f diffeomorfizmus μ-mértékre vonatkozó Ljapunov-exponenseinek hívjuk, n_i a λ_i multiplicitása. A Ljapunov exponensek jelentése: az E_x^i irányban f aszimpotitkusan λ_i exponenciális rátával tágít.

2. μ nyilván ergodikus mérték az f^{-1} inverz dinamikára is, ennek Ljapunov exponensei $-\lambda_k, \ldots, -\lambda_1$.

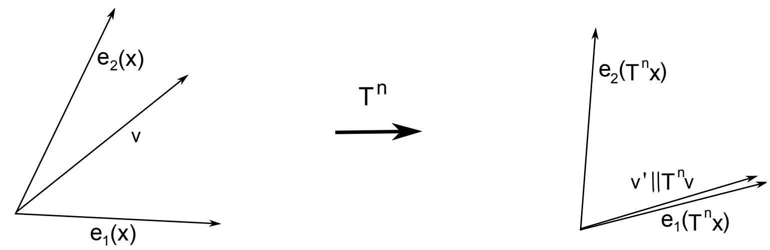
3. Ha f-re a Riemann mérték invariáns és ergodikus, akkor $\sum n_j \lambda_j = 0$.

Megjegyzés: Az éles szemű olvasó bizonyára észrevette, hogy a kétdimeziós esetre vonatkozó 3.1. tételben (szemben az általános esettel) nem szerepelt a felbontás invarianciája. Ez már csak azért is feltünő lehet, mert így az E_x^1 alterek megválasztása nem egyértelmű – igazából tetszőleges, E_x^2-re egyenletesen transzverzális (mérhető) altérmezőre igaz marad a tétel állítása. A 3.1. tétel feltételei mellett valójában az (egyértelmű) E_x^2 altérmező invariáns (azaz $D_x f E_x^2 = E_{fx}^2$), az E_x^1 altérmezőt pedig lehet (egyértelműen) úgy megválasztani, hogy invariáns legyen. Ezzel a választással kapnánk vissza a 2 dimenziós állítást, mint a d dimenziós tétel speciális esetét. Bizonyításunk azonban nem (feltétlenül) ezt az E_x^1 altérmezőt konstruálja meg: az alább konstruált E_x^1 mindenütt merőleges E_x^2-re, ami az invariáns altérmezőkre nem feltétlenül teljesül.

Az 1 ábrán az invariáns altérmezőket ábrázoljuk az x és a $T^n x$ pontokban. Tetszőleges $E_2(x)$-re transzverzális v vektort felbonthatunk E_1-gyel, illetve E_2-vel párhuzamos komponensekre; az előbbi aszimptotikusan λ_1^n-szeresére, az utóbbi λ_2^n-szeresére tágul. Mivel $\lambda_1 > \lambda_2$, a $v' || DT^n v$ vektor egyre inkább $E_1(T^n x)$ irányába áll be.

Bizonyítás: ($d = 2$)

A bizonyítás során használni fogjuk a következő konvenciókat. C-vel jelöljük az univerzális konstansokat, melyek konkrét értékének nincs jelentősége: alkalmas megválasztásukkal teljesülnek az egyes becslések. C értéke a különböző



1. ábra. Az invariáns altérmezők

formulákban különböző lehet. Hasonlóképpen, „$n \gg 1$ (vagy $C \gg 1$) esetén teljesül X" alatt azt értjük, ha az adott mennyiséget elég nagyra választjuk (a korábbi konstans választásainkhoz képest), akkor teljesül X.

Először felidézzük lineáris algebrából az alábbi lemmát:

3.2. lemma: *Ha B négyzetes mátrix, akkor $\exists A \geq 0$ (szimmetrikus pozitív definit mátrix), hogy*

- $A^2 = B^* B$,
- $\|Av\| = \|Bv\|$.

(Itt A a B polár felbontásában – $B = U \cdot A$, ahol A szimmetrikus pozitív definit, U pedig izometria – az abszolút érték, és A sajátértékei a B mátrix szinguláris értékei).

Jelölés:

$$\begin{aligned} B_n &= D_x f^n, \qquad n \geq 1 \\ A_n &= (B_n^* B_n)^{1/2} \\ A_n e_i^{(n)} &= \mu_i^{(n)} e_i^{(n)} i = 1,2, \quad (\|e_i^{(n)}\| = 1), \quad e_1^{(n)} \perp e_2^{(n)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Feltesszük: $\mu_1^{(n)} \geq \mu_2^{(n)}$.

1. lépés: Meghatározzuk, mik a λ_1, λ_2 számok.

- 3.2. lemma és Fürstenberg–Kesten tétel miatt μ-majdnem minden x-re
$$\lambda_1 = \lim_n \frac{1}{n} \log \|B_n\| \exists \text{ és } = \lim_n \frac{1}{n} \log \|A_n\| = \lim_n \frac{1}{n} \log \mu_1^{(n)}$$
- f helyett f^{-1}-t véve μ-majdnem minden x-re
$$\exists \lim \frac{1}{n} \log \|D_x f^{-n}\| = -\lambda_2.$$

Első eset: $\lambda_1 > \lambda_2$

2. lépés: $T_x M = E_x^1 \oplus E_x^2$ konstrukciója:

$$E_i^{(n)} = \operatorname{span} e_i^{(n)}, \qquad i = 1, 2.$$

3.3. szublemma: $E_i^{(n)} : n \geq 1$ *Cauchy* $(i = 1, 2)$.

Megjegyzés: Ehhez elég belátni, hogy $\exists \delta > 0$, $C > 0$, hogy $\forall n \geq 1$-re

$$\left\| e_1^{(n)} - e_1^{(n+1)} \right\| \leq C e^{-n\delta} \qquad (\delta > 0). \tag{3.3}$$

Valóban, akkor

$$\left\| e_1^{(n)} - e_1^{(n+k)} \right\| \leq \frac{C e^{-n\delta}}{1 - e^{-\delta}}. \tag{3.4}$$

Bizonyítás:

$$1 = \left\| e_1^{(n+1)} \right\|^2 = \left\| \left(e_1^{(n)}, e_1^{(n+1)} \right) \right\|^2 + \left\| \left(e_2^{(n)}, e_1^{(n+1)} \right) \right\|^2,$$

hiszen (e_1^n, e_2^n) ortonormált bázist alkotnak. Bevezetve a $\sin\varphi = \left(e_2^{(n)}, e_1^{(n+1)} \right)$ jelölést:

$$\begin{aligned} \left\| e_1^{(n)} - e_1^{(n+1)} \right\|^2 &= 2 \left[1 - \left(e_1^{(n)}, e_1^{(n+1)} \right) \right] = 2(1 - \cos\varphi) \leq \\ &\leq C |\sin\varphi|, \end{aligned}$$

ha $\sin\varphi$ kicsi.

Legyen $\varepsilon > 0$.

A Fürstenberg-Kesten tétel – a (3.1) Formula – alapján már tudjuk , hogy ha n elég nagy, akkor

$$\left| \lambda_1 - \frac{1}{n} \log \mu_1^{(n)} \right| < \varepsilon.$$

A definíciókból, valamint a (3.2) Formulából következik, hogy:

$$\left| \left(e_1^{(n+1)}, e_2^{(n)} \right) \right| = \left| \left(\frac{A_{n+1} e_1^{(n+1)}}{\mu_1^{(n+1)}}, e_2^{(n)} \right) \right| \leq \frac{\left| \left(e_1^{(n+1)}, A_{n+1} e_2^{(n)} \right) \right|}{e^{(n+1)(\lambda_1 - \varepsilon)}}.$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \left| \left(e_1^{(n+1)}, A_{n+1} e_2^{(n)} \right) \right| &\leq \left\| A_{n+1} e_2^{(n)} \right\| = \left\| B_{n+1} e_2^{(n)} \right\| \leq \\ &\leq \| D_{f^n x} f \| \left\| B_n e_2^{(n)} \right\| = \| D_{f^n x} f \| \left\| A_n e_2^{(n)} \right\|. \end{aligned}$$

Jelölés: $D = \sup\{\|D_y f\| \mid y \in M\}$.

Ha $n \gg 1$, akkor

$$\left\|A_n e_2^{(n)}\right\| = \mu_2^{(n)} \leq e^{(\lambda_2+\varepsilon)n} \tag{3.5}$$

tehát

$$\left\|\left(e_1^{(n+1)}, e_2^{(n)}\right)\right\| \leq \frac{D}{e^{\lambda_1-\varepsilon}} e^{-n(\lambda_1-\lambda_2-2\varepsilon)}.$$

Innen (3.3) és az 1. szublemma következik. Tehát: $E_x^1 = \lim E_n^1$. □

3. lépés:

3.4. szublemma: *μ-majdnem minden x-re $\forall u \in E_1$-re*

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \|B_n u\| = \lambda_1$$

Bizonyítás: Tegyük fel: $\|u\| = 1$.

Becsüljük:

- $\left|\|B_n u\| - \left\|B_n e_1^{(n)}\right\|\right| \leq \left\|B_n \left(u - e_1^{(n)}\right)\right\|$
- (3.4) $\rightsquigarrow$ $\left\|e_1^{(n)} - u\right\| \leq \dfrac{Ce^{-n\delta}}{1-e^{-\delta}}$ ha $n \gg 1$.
- $\|B_n\| \leq e^{\left(\lambda_1+\frac{\delta}{2}\right)n}$
- $\left\|B_n e_1^{(n)}\right\| = \left\|A_n e_1^{(n)}\right\| = \mu_1^{(n)}$
- Legyen $\varepsilon' < \dfrac{\delta}{2}$. Akkor $n \gg 1$-re

  $$e^{(\lambda_1-\varepsilon')n} \leq \mu_1^{(n)} \leq e^{(\lambda_1+\varepsilon')n}$$

A fentieket összefoglalva

$$e^{(\lambda_1-\varepsilon')n} - C \cdot \frac{e^{\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)n}}{1-e^{-\delta}} \leq \|B_n u\| \leq e^{(\lambda_1+\varepsilon')n} + C \cdot \frac{e^{\left(\lambda_1-\frac{\delta}{n}\right)n}}{1-e^{-\delta}}$$

azaz

$$\begin{aligned} &\limsup \log \frac{1}{n} \|B_n u| \leq \lambda_1 + \varepsilon' \\ &\liminf \qquad\qquad \geq \lambda_1 - \varepsilon'. \end{aligned}$$

□

3.5. lemma:

$$\lim_n \frac{1}{n} \lim \mu_2^{(n)} \exists (= \lambda_2). \tag{3.6}$$

Bizonyítás: (Simon Károlytól származik) Legyen $\tilde{B}_n(x) = D_x f^{-n}$ és $\tilde{\mu}_1^{(n)}(x) \geq \tilde{\mu}_2^{(n)}(x)$ a $\tilde{B}_n(x)$ szinguláris értékei. Fürstenberg–Kesten tételéből $\rightsquigarrow$

$$\exists \lim_n \frac{1}{n} \log \tilde{\mu}_1^{(n)} = \tilde{\lambda}_1. \tag{3.7}$$

3.6. állítás: *μ-majdnem minden $x \in M$-re*

$$\lim \frac{1}{n} \log \mu_2^{(n)}(x) \exists = (-\tilde{\lambda}_1 = \lambda_2).$$

Birkhoff–Hincsin tételéből $\rightsquigarrow \exists$

$$\lambda^* = \lim_n \frac{1}{n} \log |\det B_n(x)| = \lim_n \frac{1}{n} \log |\mu_1^{(n)}(x) \mu_2^{(n)}(x)|$$

Tehát:

$$\lim_n \frac{1}{n} \mu_2^{(n)}(x) = \lambda^* - \lambda_1. \tag{3.8}$$

Mivel $\forall x \in M_1$, $\forall n \geq 0$-ra $B_n(x) = \tilde{B}_n^{-1}(f^n x)$ azért

$$\mu_2^{(n)}(x) = \frac{1}{\tilde{\mu}_1^{(n)}(f^n x)} \tag{3.9}$$

Felidézzük Jegorov tételét: ha μ valószínűségi mérték, és a g_n mérhető függvények sorozatára $g_n \to g$ μ-majdnem mindenütt, akkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ halmaz, hogy az A halmazon a konvergencia egyenletes.

Jegorov tételéből, valamint a (3.7) és a (3.8) formulákból: $\exists H \subset M$, $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(H) > 1 - \varepsilon$, továbbá $\forall n > N$-re $\forall x \in H$-ra

$$e^{n(\tilde{\lambda}_1 - \varepsilon)} \leq \tilde{\mu}_1^{(n)}(x) \leq e^{n(\tilde{\lambda}_1 + \varepsilon)} \tag{3.10}$$

$$e^{n(\lambda^* - \lambda_1 - \varepsilon)} \leq \mu_2^{(n)}(x) \leq e^{n(\lambda^* - \lambda_1 + \varepsilon)} \tag{3.11}$$

Másrészt a Poincaré rekurrencia tételből következik, hogy majdnem minden $x \in H$-ra $f^m x \in H$ végtelen sok $m > N$ esetén. Ekkor alkalmazva (3.10)-t $f^m x$-re, (3.9)-ből

$$e^{-n\tilde{\lambda}_1 - n\varepsilon} \leq \mu_2^{(n)}(x) \leq e^{-n\tilde{\lambda}_1 + n\varepsilon}$$

egy részsorozat mentén, és mivel a határérték létezik, és ε tetszőleges volt, adódik

$$\lambda^* - \lambda_1 = -\tilde{\lambda}_1 = \lambda_2. \qquad \square$$

4. lépés: Ha $v \notin E_x^2$, akkor $v = \alpha e_1 + \beta e_2$, $\alpha \neq 0$, és $\|B_n v\|$ növekedését nyilván $\|B_n e_1\|$ határozza meg. Hasonlóan, a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ esetben

$$u = \alpha_n e_1^{(n)} + \beta_n e_2^{(n)}$$

és $\|B_n u\|$ becslése adódik $\left\|B_n e_1^{(n)}\right\|$ és $\left\|B_n e_2^{(n)}\right\|$ becsléséből.

Oseledec még általánosabban

$(M, \mathcal{F}, \mu, f)$ endomorfizmus.

$$A\colon M \to GL(n, \mathbb{R}) \text{ mérhető}$$

és

$$A_x^n = A(f^{n-1}x) \dots A(x) \quad \text{(mérhető kociklus)}$$

Feltevés:

$$\log^+ \|A(\cdot)\| \in L_1(M, \mu).$$

3.7. állítás: *$\exists \Gamma \subset M$, hogy $\mu(\Gamma) = 1$ és $\forall x \in \Gamma$-ra*

a.) $\lim_n \left[(A_x^n)^* A_x^n\right]^{1/2n} = \Lambda_x \; \exists$

b.) *Legyenek* $\exp \lambda_x^{(1)} < \cdots \exp \lambda_x^{(s)}$ Λ_x *sajátértékei* $(\lambda_x^{(1)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$

$$U_x^{(1)}, \dots, U_x^{(s)} \text{ a sajátalterek}$$

és

$$\dim U_x^{(r)} = n_x^{(r)}.$$

Akkor

$$n_x^{(r)}, \lambda_x^{(r)} \text{ invariánsak.}$$

c.) *Ha* $V_x^{(0)} = \{0\}$, $V_x^{(r)} = U_x^{(1)} + \cdots + U_x^{(r)}$, *akkor*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| = \lambda_x^{(r)}$$

ha

$$v \in V_x^{(r)} \setminus V_x^{(r-1)}.$$

4. Topologikus dinamikai alapfogalmak

Ebben a fejezetben topologikus dinamikai rendszerekkel foglalkozunk. Ez alatt azt értjük, hogy a fázistér, M egy kompakt metrikus tér, $\mathcal{F}$ a Borel-féle σ-algebra, $T : M \to M$ pedig folytonos leképezés. Jellemzően nem rögzítünk az endomorfizmusra invariáns mértéket, azonban a Krylov-Bogoljubov tétel alapján tudjuk, hogy (legalább egy) invariáns mérték létezik. Invertálható esetben (automorfizmusra) feltesszük, hogy T^{-1} is folytonos, tehát ilyenkor T homeomorfizmus.

Néhány fontos példa:

1. A körvonal forgatása, $M = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1$, $T_\alpha x = x + \alpha (\mod 1)$.

2. A bináris leképezés, $M = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1$, $T_2 x = 2x (\mod 1)$.

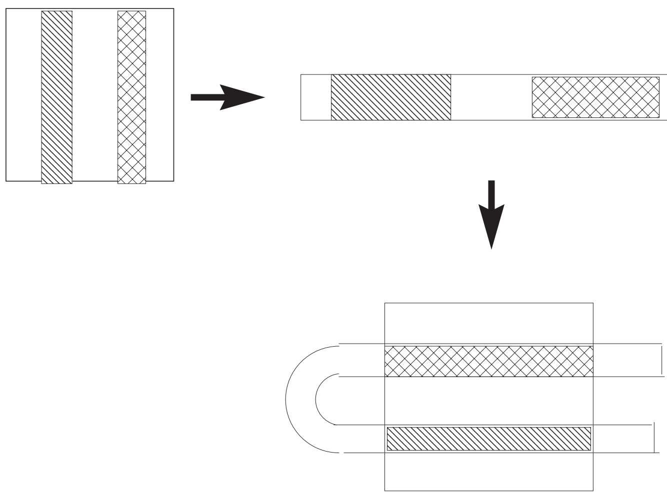
3. A féloldali shift leképezés, $\Sigma_+ = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$, azaz a $0-1$ sorozatok tere: $\Sigma_+ \ni \underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$. $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_+$ esetén legyen $i_0 = \min\{i \geq 1 : x_i \neq y_i\}$, ekkor Σ_+ a $d(\underline{x}, \underline{y}) = 2^{-i_0}$ metrikával kompakt metrikus tér. (Megjegyzés: ez a metrika éppen a szorzattopológiát generálja Σ_+-n: így a Tyihonov tételből is tudjuk, hogy Σ_+ kompakt. Másképp is szoktak definiálni metrikát Σ_+-n, ezek mindegyike ugyanezt a topológiát generálja.) A dinamika Σ_+-n a shift leképezés: $\sigma : \Sigma_+ \to \Sigma_+$, $(\sigma\underline{x})_i = x_{i+1}$, azaz a sorozatot eggyel elcsúsztatjuk. Mivel az első elemét elfelejtjük, ez a leképezés nem invertálható.

4. A kétoldali shift leképezés, $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, azaz a kétirányban végtelen $0-1$ sorozatok tere: $\Sigma \ni \underline{x} = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$. $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma$ esetén legyen $i_0 = \min\{i \geq 1 : x_i \neq y_i, \text{ vagy } x_{-i} \neq y_{-i}\}$, ekkor Σ a $d(\underline{x}, \underline{y}) = 2^{-i_0}$ metrikával szintén kompakt metrikus tér. A dinamika Σ-n is a shift leképezés: $\sigma : \Sigma \to \Sigma$, $(\sigma\underline{x})_i = x_{i+1}$, ami azonban ezúttal invertálható.

   Megjegyzés: Értelemszerűen tekinthetjük a a shift leképezéseket 2 helyett K szimbólummal (ahol K tetszőleges pozitív egész szám), ekkor a fázistér $\{0, 1, \dots, (K-1)\}^{\mathbb{Z}^+}$ (illetve $\{0, 1, \dots, (K-1)\}^{\mathbb{Z}}$), a metrikát és a dinamikákat ugyanúgy értelmezzük, mint két szimbólum esetén.

5. Smale patkó leképzése, ezzel a dinamikai rendszerrel találkoztunk már [13] 8. fejezetében. Emlékeztetésképpen: 1. képezzük le az R egységnégyzetet egy téglalapra lineárisan, mondjuk vízszintes irányban nyújtjuk, függőleges irányban összehúzunk; 2. ezt a téglalapot hajlítsuk meg U alakúra és toljuk el úgy, hogy az U két szára két vízszintes téglalapban metsze át az

egységnégyzetet. Ezeknek a vízszintes téglalapoknak az őseképe két vékony függőleges téglalap az egységnégyzetben. A többi pontot a leképezés, amelyet T-fel fogunk jelölni, kiviszi az egységnégyzetből (lásd még az 2 ábrát). Végigondolható, hogy T^2, a második iterált, négy függőleges téglalapot visz át négy vízszintes téglalapba, T^n $(n > 0)$ pedig 2^n víszintes téglalapot 2^n függőlegesbe. Ezek a téglalapok egyre vékonyabbak, Λ-val jelölve azokat az x pontokat, amelyekre $T^l x \in R$ minden $l \in \mathbb{Z}$-re, Λ két Cantor halmaz direkt szorzata. Patkó leképezés alatt a $T : \Lambda \to \Lambda$ topologikus dinamikai renszert fogjuk érteni, ami a Cantor halmazoktól megörökölt topológiában homeomorfizmus.



2. ábra. A patkó leképezés

6. A tórusz lináris (vagy algebrai) automorfizmusai (továbbiakban: TLA), és ezen belül is a macska leképezés. Ezekkel a dinamikai renszerekkel [13] 6. és 7. fejezetében foglalkoztunk részletesen. Emlékeztetésképp: $M = \mathbb{T}^2$, $T_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $T_A x = Ax(\mod \mathbb{Z}^2)$, ahol A egy egész elemű, egységnyi determinánsú 2×2-es mátrix ($\mathbb{T}^2$-re, mint $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$-re gondolunk). Ilyenkor T_A homeomorfizmus és területörző (tehát a Lebesgue mérték invariáns). Különösen fontos az az eset, amikor *A sajátértékei nincsenek rajta az egységkörön* – a két sajátérték λ és $1/\lambda$, ahol $|\lambda| > 1$ – ilyenkor azt mondjuk, hogy a TLA *hiperbolikus*, ezt a továbbiakban feltesszük. A legismertebb példa az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ esete, ezt macska leképezésnek is

hívjuk (CAT= continuous automorphism of the torus), további szép tulajdonsága, hogy szimmetrikus, és így a sajátirányok merőlegesek egymásra. Emlékeztető: az $1/\lambda$-hoz és λ-hoz tartozó $v_s \in \mathbb{R}^2$, illetve $v_u \in \mathbb{R}^2$ sajátirányokat stabil, illetve instabil irányoknak hívjuk, adott $x \in \mathbb{T}^2$-re pedig a $W^{s/u}(x) = \{(\mathbb{T}^2 \ni) y = x + tv_{s/u} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ halmazokat pedig az x pont *stabil* és *instabil sokaságainak.* Stabil sokaság képe és ősképe is stabil sokaság, és ez igaz az instabil sokaságokra is. Ezek a sokaságok így is jellemezhetők:

$$W^s(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 \,|\, d(T_A^n x, T_A^n y) = 0 \text{ ha } n \to +\infty\};$$

$$W^u(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 \,|\, d(T_A^{-n} x, T_A^{-n} y) = 0 \text{ ha } n \to +\infty\},$$

ráadásul exponenciálisan. [13] 7. fejezetében az invariáns sokaságoknak nagy szerepük volt annak bizonyításában, hogy a Lebesgue mérték T_A-ra ergodikus (Hopf módszere).

4.1. feladat: *Kétdimenziós hiperbolikus TLA-ra $W^u(x)$ és $W^s(x)$ sűrű $\mathbb{T}^2$-n, minden x-re.*

4.2. feladat: *Mutassuk meg, hogy hiperbolikus TLA-ra egy $x \in \mathbb{T}^2$ pont akkor és csak akkor periodikus, ha mindkét koordinátája racionális. (Megj: igazából a hiperbolikusság nem is kell, csak az, hogy ne legyen komplex egységgyök sajátérték).*

Definíció: A $T_1 : M_1 \to M_1$ és $T_2 : M_2 \to M_2$ topologikus dinamikai rendszerek topologikusan konjugáltak, ha $\exists\ \Phi : M_1 \to M_2$ homeomorfizmus, hogy $\Phi \circ T_1 = T_2 \circ \Phi$.

Konjugált dinamikai rendszerek a topologikus dinamika szempontjából ekvivalens módon viselkednek. Példa: a Smale patkó és a kétoldali shift leképezés topologikusan konjugáltak, hiszen a Cantor halmaz természetes kódolását használva, Λ pontjai kódolhatóak a $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ kétirányban végtelen $0-1$ sorozatok elemeivel. Ezt a kódolást $\pi : \Lambda \to \Sigma_2$-vel jelölve könnyen ellenőrizhető, hogy (i) π kölcsönösen egyértelmű, sőt, (ii) homeomorfizmus, ha Σ_2-t a természetes szorzattopológiával látjuk el, és ami a legfontosabb (iii) egymásba viszi a dinamikákat, tehát $\sigma \circ \pi = \pi \circ T$.

Fontos megjegyezni, hogy a topologikus konjugáció nem pontosan ugyanaz, mint [13] 4. fejezetében ismertett izomorfizmus, amely azt fejezi ki, hogy a két dinamikai rendszer ergodelméleti szempontból ekvivalens. Már [13] 4. fejezetében szerepelt, hogy a bináris leképezés izomorf a féloldali shift leképezéssel (ha az intervallumon a Lebesgue mértéket, a shift téren az $1/2 - 1/2$ Bernoulli mértéket tekintjük, a természetes izomorfizmus az invariáns mértékeket is egymásba viszi). Azonban ez az izomorfizmus nem folytonos. Tehát a bináris leképezés és a féloldali shift ergodelméleti szempontból azonosíthatóak, de topologikus dinamikai szempontból már nem.

Definíció: Legyen $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszer.

- Az $x \in M$ pont ω-*limeszpont*jainak halmaza

  $$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} \overline{\bigcup_{j\geq n} T^j x};$$

  azaz $y \in \omega(x)$ pontosan akkor, ha van időpontoknak olyan n_k részsorozata, hogy $T^{n_k}x \to y$. Amennyiben T invertálható, $x \in M$ α-limesz pontjainak halmazát

  $$\alpha(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} \overline{\bigcup_{j\geq n} T^{-j} x},$$

  definiálja.

- A T leképezés *rekurrens pont*jai (vagy visszatérő pontjai):

  $$\mathcal{R}(T) = \{x \in M \,|\, x \in \omega(x)\}.$$

  Invertálható T-re megkülönböztetjük a pozitív és a negatív rekurrens pontokat (utóbbiról abban az esetben beszélünk, ha $x \in \alpha(x)$), és x-t akkor mondjuk rekurrensnek, ha pozitív és negatív rekurens egyaránt.

- $x \in M$ a T leképezés *nemvándorló pont*ja, ha x tetszőleges U nyílt környezetére van olyan $n \geq 1$, hogy $T^nU \cap U \neq \emptyset$. A nemvándorló pontok halmazát $NW(T)$-vel jelöljük (non-wandering points).

4.3. feladat: *Mutassuk meg, hogy (i) $NW(T)$ zárt; (ii) ha $y \in NW(T)$, akkor $Ty \in NW(T)$; (iii) minden $x \in M$-re $\omega(x) \subset NW(T)$; így (iv) $\overline{\mathcal{R}(T)} \subset NW(T)$; és (v) x periodikus $\Rightarrow$ x rekurrens $\Rightarrow$ x nemvándorló; viszont (vi) adjunk példákat arra, hogy ezek a nyilak nem megfordíthatóak.*

Idézzük fel [13] 2. fejezetéből a topologikus tranzitivitás és a minimalitás fogalmát. Ezek az ω-limesz halmazok segítségével is jellemezhetőek: M topologikusan tranzitív, ha $\exists x \in M$, hogy $\omega(x) = M$; és M minimális, ha $\forall x \in M$: $\omega(x) = M$. A körvonal irracionális forgatása minimális: speciálisan, nincsenek periodikus pontok, viszont minden pont rekurrens. Egészen más viselkedést mutat például a hiperbolikus TLA: a 4.2. feladatból tudjuk, hogy a periodikus pontok sűrű halmazt alkotnak $M = \mathbb{T}^2$-n, és így $NW(T_{A_2}) = \mathbb{T}^2$ (speciálisan a periodikus pontok lezártja). Tudunk viszont példát mutatni nem rekurrens pontra.

Definíció: Legyen $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszerben $x \in M$ fixpont, azaz $Tx = x$. Egy $y \in M$ pontot x-hez *homoklinikusnak* hívunk, ha $T^n y \to x$ és $T^{-n} y \to x$ egyaránt, amint $n \to \infty$.

A macska leképezésnek az $x_0 = (0, 0) \in \mathbb{T}^2$ (az origó) fixpontja. A 4.1. feladat alapján léteznek $y \neq x_0$, $y \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ pontok. Ilyenkor y x_0-hoz homoklinikus, és így $\alpha(y) = \omega(y) = \{x_0\}$, tehát y nem rekurrens. $y \in NW(T_{A_2})$ viszont közvetlenül is látszik, ha lerajzoljuk, mi történik y egy kis U környezetével. Ekkor $T^n U$ n növekedtével egyre inkább egy $W^u(x_0)$ mentén elnyúló ellipszis, $T^{-n} U$ pedig egy erre merőleges nagytengelyű, $W^s(x_0)$ mentén elnyúló ellipszis. Érdemes még megjegyezni, hogy ha alkalmas n-re tekintjük $R = T^{-n}U$-t, ezen a $T' = T^{2n}$ dinamika úgy viselkedik, mint a patkó leképezés.

4.4. feladat: *Jellemezzük a periodikus pontokat a bináris leképezésre. Mutassunk itt is példát $x \in NW(T)$, $x \notin \mathcal{R}(T)$ pontra.*

4.5. feladat: *Tekintsünk $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszert, emyle rendelkezik a következő tulajdonsággal: $\forall U, V \subset M$ nyílt halmazokra $\exists n \geq 0$, hogy $T^n U \cap V \neq \emptyset$. Mutassuk meg, hogy ekkor T topologikusan tranzitív.*

Definíció: (toplogikus keverés) A $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszer topologikusan keverő, ha $\forall U, V \subset M$ nyílt halmazokra $\exists N \geq 0$, hogy minden $n \geq N$ esetén $T^n U \cap V \neq \emptyset$.

A topologikus keverés erősebb tulajdonság, mint a toplogikus tranzitivitás. Ez a két fogalom nagyjából a keverés, illetve az ergodicitás topologikus dinamikai megfelelője, amint ezt a következő példák is mutatják.

4.6. feladat: *Mutassuk meg, hogy a macska leképezés, a bináris leképezés és a shift leképezések topologikusan keverőek, a körvonal irracionális forgatása viszont nem topologikusan keverő.*

5. Árnyékolás

Definíció: Legyen $T : X \to X$ topologikus dinamikai rendszer. Azt mondjuk, az $x_i \in M$ $i \in \mathbb{N}$ (invertálható esetben akár $i \in \mathbb{Z}$) pontsorozat δ-pszeudo pálya, ha $\forall i : d(T(x_i), x_{i+1}) < \delta$. Hasonlóképpen lehet beszélni véges pszeudo-pályákról is.

A δ-pszeudo pályát ε árnyékolja az $y \in M$ pont pályája, ha $d(T^i(y), x_i) < \varepsilon$, $\forall i$.

A $T : M \to M$ dinamikai rendszer rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van $\delta > 0$, hogy minden δ-pszeudo pályát ε-árnyékol valmilyen igazi pálya.

Az árnyékolási tulajdonság különösképp fontos a dinamikai rendszerek számítógépes szimulációkkal történő vizsgálata szempontjából. Amikor egy dinamikai rendszer pályáit szimuláljuk, a kerekítési hibák miatt nem egy valóságos pályát, hanem egy pszeudo pályát számol ki a számítógép. Az árnyékolási tulajdonság azt fejezi ki, hogy ehhez a pszeudo pályához mindvégig közel halad egy igazi pálya. Természetesen ez nem feltétlen annak a pontnak a pályája, amiből a szimulációt indítottuk. A szimulációk többsége azonban nem egyetlen pont pályájának vizsgálatára irányul: sokszor egy kellően sűrű – például egy invariáns mérték szerint kisorsolt – véges halmaz minden pontjából indítjuk a szimulációt. Ha a rendszer rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal, a kapott pszeudo-pályák mindegyike közel lesz valamilyen igazi pályához. Másképp szólva, a szimulált fázisportré nem tér el lényegesen a tényleges fázisportrétól, azaz a fázisportré stabil a szimulációból adódó perturbációkra nézve.

Ebben a fejezetben azt fogjuk megmutatni, hogy a fázisportré ilyen jellegű stabilitása egészen mást jelent, mint az egyedi pályák stabilitása. Könnyű látni, hogy a körvonal forgatása, amely talán az egyedi pályák merevsége (stabilitása) szempontjából a legregulárisabb dinamikai rendszer, nem rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal. Tekintsünk ugyanis egy olyan pszeudo pályát az α forgatásra, amely mindig szisztematikusan azonos irányba (mondjuk jobbra) téved: $x_{i+1} = x_i + \alpha + \delta/2 (\mod 1)$. Ha volna olyan y pont, melynek pályája x_i-t árnyékolja, akkor $d(x_0, y) < \varepsilon$, és a forgatás merevsége miatt $d(T^n x_0, T^n y) < \varepsilon$ teljesülne minden n-re. Ugyanakkor $d(T^n x_0, x_n) = n\delta/2$, ami kellően nagy n-re ε-nál lényegesen nagyobb, tehát $d(x_n, T^n y) < \varepsilon$ nem teljesülhet.

5.1. lemma: *A bináris leképezés rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Legyen x_n, $n \geq 0$ a bináris leképezés ε-pszeudo pályája. Az y pontot, melynek pályája a teljes x_n pszeudo-pályát ε-árnyékolja, úgy fogjuk megkapni, mint egy y_k pontsorozat limeszpontját. Az y_k pont pályája $0 \le n \le k$ esetén fogja a (véges) y_n pszeudo-pályát árnyékolni. Először nem y_k-t, hanem annak k-dik képét adjuk meg: legyen $T^k(y_k) = x_k$; amiből persze y_k még nem egyértelmű. Minden pontnak, így $T^k(y_k) = x_k$-nak is két ősképe van, mivel $d(x_k, Tx_{k-1}) < \varepsilon$, választhatjuk azt az ősképet, melyre $d(T^{k-1}y_k, x_{k-1}) < \varepsilon/2$. Ebből, mivel x_k ε-pszeudo-pálya, $d(T^{k-1}y_k, Tx_{k-2}) < 3\varepsilon/2$ következik, és az ősképet megfelelően választva $d(T^{k-2}y_k, x_{k-2}) < 3\varepsilon/4$ érhető el. Így folytatva a konstrukciót kapjuk meg y_k-t, amire induktív érveléssel könnyen adódik, hogy $d(T^i y_k, x_i) < 2\varepsilon$, minden $0 \le i \le k$ esetén. Továbbá $d(y_k, y_{k+1}) \le \varepsilon/2^k$, vagyis y_k Cauchy sorozat, és a limeszpont már a teljes x_k pszeudo-pályát árnyékolja. $\Box$.

5.2. lemma: *A macska leképezés rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal.*

A bizonyítás előtt bevezetünk néhány további jelölést. Emlékeztetésképp: $W^u(x)$ és $W^s(x)$ jelöli az $x \in \mathbb{T}^2$ pont instabil és stabil fonalát. Jelölje $W^u_\delta(x)$, illetve $W^s_\delta(x)$ a $W^u(x)$, illetve $W^s(x)$ fonalak x körüli, δ sugarú szakaszát (ezeket lokális fonalaknak is szoktuk hívni). Elég kis δ-ra, ha $d(x, y) < \delta$, akkor $W^u_\delta(x) \cap W^s_\delta(y)$ átmetszés pontosan egyelemű. Ezt a metszéspontot $[x, y]$-nal fogjuk jelölni.

A 5.2. Lemma Bizonyításának vázlata. Nagyrészt követjük a 5.1. Lemma bizonyítását, bár nyilván szükségesek eltérések, hiszen T most invertálható, így nem válogathatunk az ősképek között. y most is y_k limesze lesz, ahol y_k pályája az első k iteráción keresztül árnyékolja az x_n pszeudo-pályát, továbbá y_k helyett most is $T^k y_k$-t definiáljuk. Konkrétan legyen $y_0 = x_0$, és induktív konstrukcióval, $T^k y_k = [T^k y_{k-1}, x_k]$. Mivel $T^k y_k$ és $T^k y_{k-1}$ azonos instabil fonálon vannak, az ősképeik közel kerülnek egymáshoz: ez biztosítja, hogy y_k árnyékolja az x_n pszeudo-pályát $n \le k$-ra. Ugyanakkor x_k és $T^k y_k$ azonos stabil fonálon vannak, így $T^{k+1}y_k$ és Tx_k közel kerül, következésképp, mivel x_n pszeudo-pálya, $T^{k+1}y_k$ és x_{k+1} távolsága is kontrolálható. $\Box$.

5.3. feladat: *Mutassuk meg, hogy (i) y_k pályája k iterációig valóban árnyékolja az x_i, $i = 0, \ldots, k$ pszeudo-pályát; (ii) az y_k pontsorozat konvergens, és a limeszpont, y pályája már a végtelen pszeudo-pályát árnyékolja; (iii) Hogyan kell ε-hoz δ-t választani?*

Ugyan most ezekre a nagyon egyszerű esetekre (bináris és macska leképezés) mutattuk meg az árnyékolást, mégis könnyen látható, hogy ami számít, az a dinamika (exponenciális ütemű) tágítása, illetve hiperbolicitása (hasonlóan lehet érvelni, ha a Ljapunov exponensek sohasem válnak nullává egy teljes Lebesgue mértékű halmazon). Ilyen értelemben az egyedi pályák instabilitása éppen a fázisportré stabilitásához kapcsolódik.

6. Topologikus entrópia

Ebben a fejezetben is topologikus dinamikával foglalkozunk, tehát M kompakt metrikus tér, $T : M \to M$ folytonos.

Az $x, y \in M$ pontok távolságát $d(x, y)$-nal jelölve, könnyen meggondolható, hogy minden n pozitív egész számra

$$d_n(x, y) = \max_{j=0,\dots,n} d(T^j x, T^j y)$$

is metrika, és ugyanazt a topológiát generálja, mint d. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Az N térben a ρ metrikára nézve egy véges (vagy megszámlálható) $A \subset N$ halmazt ε-hálónak hívunk, ha $\forall x \in N$ pontra létezik $y \in A$, hogy $\rho(x, y) < \varepsilon$. Egy $B \subset N$ halmaz ε-szeparált, ha $\forall x, y \in B$: $\rho(x, y) > \varepsilon$. N fedése nyílt halmazokkal ε fedés, ha minden a fedésben szereplő halmaz átmérője kisebb, mint ε. Speciálisan, az M térben tekinthetjük a d_n metrikára nézve az (n, ε) fedéseket, az (n, ε) hálókat, és az (n, ε) szeparált halmazokat.

Definíció: Mivel M kompakt, minden n pozitív egész esetén (i) van véges (n, ε) fedése; (ii) van benne véges (n, ε)-háló, (iii) minden (n, ε)-szeparált halmaza szükségképpen véges. Jelölje rendre $F(n, \varepsilon, T)$, $H(n, \varepsilon, T)$ és $S(n, \varepsilon, T)$, hogy egy (n, ε) fedéshez legalább hány halmaz szükséges, egy (n, ε) hálónak legalább hány eleme van, illetve, hogy egy (n, ε) szeparált halmaznak legfeljebb hány eleme lehet.

6.1. lemma: *Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik és véges a*

$$h_\varepsilon(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(F(n, \varepsilon, T))$$

határérték. Továbbá $h_\varepsilon(T)$ ε-nak monoton csökkenő függvénye.

Bizonyítás. Ha az U_i, $i = 1, ..., I$ nyílt halmazok egy véges (n, ε)-fedést, a V_j, $j = 1, ..., J$ nyílt halmazok pedig egy véges (m, ε)-fedést alkotnak, akkor az $U_i \cap T^{-m} V_j$ halmazok egy véges $(n + m, \varepsilon)$-fedést alkotnak. Következésképp

$$F(n + m, \varepsilon, T) \leq F(n, \varepsilon, T) \cdot F(m, \varepsilon, T)$$

majd logaritmust véve adódik, hogy a $\log(F(n, \varepsilon, T))$ sorozat n-ben szubadditív, és így a 2.1. Lemma garantálja a limesz létezését. Másrészt minden rögített n-re ε csökkentésével $F(n, \varepsilon, T)$ nyilván nem csökkenhet. $\square$.

Definíció: A $T : M \to M$ leképezés topologikus entrópiáját

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} h_\varepsilon(T)$$

definiálja. A 6.1. Lemma alapján a határérék nyilván létezik: $h(T)$ lehet 0, pozitív valós szám, vagy $+\infty$.

Könnyen végiggondolható, hogy

$$F(n, 2\varepsilon, T) \leq H(n, \varepsilon, T) \leq S(n, \varepsilon, T) \leq F(n, \varepsilon, T).$$

Valóban, itt az n-től (és T-től) való függésről el is feledkezhetünk: ezek az állítások minden rögzített metrikára igazak maradnak. Az első egyenlőtlenséghez tegyük fel, hogy van egy ε hálónk, ekkor a hálót alkotó pontok köré helyezett ε sugarú gömbök egy 2ε-fedést alkotnak. A második egyenlőtlenséghez: a maximális ε-szeparált halmaz nyilván ε háló is egyben (he nem volna az, lehetne nagyobb elemszámú ε-szeparált halmazt is találni). A harmadik egyenlőtlenséghez: ha van egy k elemű ε-fedésünk, akkor a skatulya elv alapján bármely $k+1$ elemű ponthalmazra van két pont, melyek távolsága ε-nál kisebb.

Következésképp a topologikus entrópiát ekvivalens módon definiálhatjuk úgy is, mint

$$h(T) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} \log(H(n, \varepsilon, T)) \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} \log(S(n, \varepsilon, T)) \right)$$

és ugyanazt az értéket kapnánk akkor is, ha $\underline{\lim}$ szerepelne $\overline{\lim}$ helyett.

Az $F(n, \varepsilon, T)$ mennyiség (és annak különböző alternatívái) azt mutatják meg, hány n hosszú pályát tudunk megkülönböztetni ε skálán a dinamikai rendszerünkben. Ennek megfelelően a topologikus entrópia jelentése: milyen exponenciális rátával nő az n ideig topológiai szempontból „alapvetően különböző" pályák száma. Lényeges különbség van a pozitív és a nulla topologikus entrópiájú rendszerek között. Ezt illusztrálja az alábbi két példa.

Tekintsük a körvonal (racionális vagy irracionális) forgatását. A körvonalra minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\lceil \frac{1}{1{,}99\varepsilon} \rceil$ elemszámú ε-háló. Mivel a körvonal forgatására $d(T^n x, T^n y) = d(x, y)$ minden n-re, ezért az ε-háló egyúttal (n, ε)-háló, tehát $H(n, \varepsilon, T)$ n-től független, és így a topologikus entrópia 0.

Vegyük végül a féloldali shift leképezést. Legyen $2^{-(m+1)} < \varepsilon \leq 2^{-m}$ valamilyen $m \in \mathbb{Z}^+$ számra. Jelöljük y_i-vel $\{0,1\}^m$ elemeit, vagyis az m-hosszú $0-1$ sorozatokat, $i = 1, \ldots, 2^m$. y_i-t tetszőleges módon kiegészítve végtelen $0-1$ sorozattá, jelöljük a fázistér, Σ^+ így kapott elemeit $\underline{y}_i$-vel. Nyilván $d(\underline{y}_i, \underline{y}_j) > \varepsilon$ $i \neq j$-re, viszont minden $\underline{x} \in \Sigma$ esetén létezik i, hogy $d(\underline{x}, \underline{y}_i) < \varepsilon$. Így Σ^+ ε-hálóinak minimális elemszáma 2^m. Ha azt szeretnénk, hogy két pont n iteráción keresztül ε-közel legyen egymáshoz, az első m szimbólum mellett további n szimbólum közelségét is garantálnunk kell. Így $H(n, \varepsilon, T) = 2^{m+n}$, és $h(T) = \log 2$.

Megjegyzések: Hasonlóan lehet bizonyítani, hogy K szimbólum esetén a shift topologikus entrópiája $\log K$.

A logaritmus alapjának megválasztása befolyásolja $h(T)$ értékét, de nem befolyásolja annak pozitivitását. Az entrópia elméletében általában kettes vagy természetes alapú logaritmust szokás tekinteni.

7. Kolmogorov-Sinai entrópia

Ebben a fejezetben a topológiai helyett ismét inkább ergodelméleti szempontból vizsgáljuk a dinamikai rendszereket, azaz a továbbiakban $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus (esetleg automorfizmus).

Néhány mértékelméleti fogalom. Az $(M_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ és $(M_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ valószínűségi mezők *izomorfak*, ha létesíthető köztük bijekció, mely az $\mathcal{F}_i$-ben szereplő mérhető halmazokat egymásnak felelteti meg, azonos μ_i mértékkel. Egy valószínűségi mező *Lebesgue tér*, ha izomorf a $([0,1], \mathcal{L}, \mu)$ térrel, ahol $\mathcal{L}$ a Lebesgue σ-algebra, μ pedig előáll, mint a Lebesgue mérték a $[0, s]$ intervallumon valamely $s \in [0,1]$-re, kiegészítve legfeljebb megszámlálható sok Dirac mértékkel. A továbbiakban feltesszük, hogy $(M, \mathcal{F}, \mu)$ Lebesgue tér. Neumann János egy tétele szerint, ha X teljes szeparábilis metrikus tér, ν egy Borel mérték X-n, és $\mathcal{B}$-t úgy kapjuk, hogy a Borel-féle σ-algebrát teljessé tesszük a ν mértékre nézve, akkor $(X, \mathcal{B}, \nu)$ Lebesgue tér.

$\beta = \{B_1, B_2, ..., B_J\}$ véges (mérhető) *partíció*, ha a $B_j \in \mathcal{F}$ $(j = 1, ..., J)$ halmazok páronként diszjunktak és uniójuk M (az ergodelméletben csak majdnem mindenütt típusú állítások érdekesek, így ezeket a tulajdonságokat is nullmértékű halmazok erejéig követeljük meg). Véges partíciók egyértelműen megfeleltethetők $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ véges σ-algebráknak. Ha $\alpha = \{A_1, ..., A_I\}$ és $\beta = \{B_1, B_2, ..., B_J\}$ két partíció, akkor *közös finomításuk*, $\alpha \vee \beta$, az a partíció, melynek elemei az $A_i \cap B_j$ halmazok $(i = 1, ..., I;\ j = 1, ..., J)$. Azt mondjuk, hogy β α *finomítása* $(\alpha \leq \beta)$, ha $\forall j$-re $\exists i$, hogy $B_j \subset A_i$ (ilyenkor $\alpha \vee \beta = \beta$). α és β távolságának értelmezéséhez tegyük fel, hogy $J = I$ (ez mindig elérhető, ha a kisebb elemszámú partíciót kiegészítjük nullmértékű halmazokkal). Ekkor:

$$d(\alpha, \beta) = \min_{\sigma \in S_I} \sum_{i=1}^{I} \mu(A_i \Delta B_{\sigma(i)})$$

ahol S_I az I elem permutációinak halmazát, Δ pedig a szimmetrikus differenciát jelöli. Két partíciót ekvivalensnek fogunk tekinteni $(\alpha = \beta)$, ha $d(\alpha, \beta) = 0$. $\alpha \perp \beta$, azaz α és β függetlenek, ha $\mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i) \cdot \mu(B_j)$ minden $i = 1, ..., I$, $j = 1, ...J$ párra.

Ha T egy endomorfizmus, akkor $T^{-1}\alpha = \{T^{-1}A_1, ..., T^{-1}A_J\}$ is partíció, hasonlóképp tekinthetjük $T^{-k}\alpha$-t minden $k \geq 0$ számra, illetve automorfizmus esetén $T^k\alpha$-t is.

Egy véges partíció entrópiája. *Egy kis motiváció az entópia bevezetésére.* Egy valószínűségi mező egy partíciójára úgy is tekinthetünk, mint egy véges értékkészletű valószínűségi változóra. A valószínűségi változó értékének ismeretével információt nyerünk a valószínűségi mező egy eredetileg számunkra teljesen ismeretlen véletlen pontjáról. Minél kisebb valószínűségű értékét látjuk a valószínűségi változónak, annál több információt nyerünk. Keresünk egy olyan $I(\mu(A_j))$ mennyiséget, ami alkalmas a nyert információ karakterizálására, igy elvárjuk, hogy $I(p)$: (i) p-nek (a bekövetkezett esemény valószínűségének) szigorúan monoton csökkenő függvénye legyen; (ii) $I(1) = 0$ teljesüljön (ilyenkor semmi információt nem nyerünk); (iii) $I(pq) = I(p) + I(q)$ teljesüljön (független eseményekre az információ összeadódik). Ezekből a tulajdonságokból folytonos I-re konstans szorzó erejéig egyértelműen adódik $I(p) = -\log p$.

Adott tehát egy α partíció, ekkor minden $x \in M$ pontra van olyan j, hogy $x \in A_j$, és definiálhatjuk a következő mennyiségeket:

$$I_\alpha(x) = -\log(\mu(A_j)); \qquad H(\alpha) = \sum_{j=1}^{J} -\mu(A_j)\log(\mu(A_j)) = \int_M I_\alpha(x) d\mu(x)$$

ahol $H(\alpha)$-t hívjuk az α partíció entrópiájának; ez a mennyiség azt mutatja meg, átlagosan mennyi információt nyerünk a valószínűségi változó megmérésével. log jellemzően a kettes alapú logaritmust jelöli, ennél fontosabb konvenció, hogy $0 \log 0 = 0$. Evvel a választással a $\Phi(x) = -x \log x$ folytonos, szigorúan konkáv függvény a $[0, 1]$ intervallumon, és így teljesül a Jensen egyenlőtlenség, azaz minden $x_k \in [0, 1]$ $(k = 1, ..., n)$ és $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ esetén

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi(x_k),$$

és egyenlőség csak triviális konvex kombináció esetén valósul meg. Az alábbi Lemma a Jensen egyenlőtlenségből következik:

7.1. lemma: *Legyenek α, β tetszőleges partíciók, jelölje $\nu = \{M\}$ a triviális partíciót.*

1. *$H(\alpha) \geq 0$, és $H(\alpha) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = \nu$.*
2. *Ha $\alpha \leq \beta$, akkor $H(\alpha) \leq H(\beta)$, és egyenlőség csak $\alpha = \beta$ esetén fordul elő.*
3. *Ha α J elemű partíció, akkor $H(\alpha) \leq \log J$, és egyenlőség akkor és csak akkor fordul elő, ha minden $j = 1, ..., J$ esetén $\mu(A_j) = 1/J$ (azaz az α partíció egyenletes eloszlású valószínűségi változót generál).*
4. *$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$, és egyenlőség akkor és csak akkor fordul elő, ha $\alpha \perp \beta$.*

Feltételes entrópia. Emlékeztető: ha $A, B \subset M$ és $\mu(B) > 0$, akkor $\mu(A|B) = \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}$ a feltételes valószínűség. Feltehetjük, hogy az α és β partíciók minden elemének pozitív a mértéke, ekkor legyen

$$H(\alpha|\beta) = -\sum_{j=1}^{J} \mu(B_j) \sum_{i=1}^{I} \mu(A_i|B_j) \log(\mu(A_i|B_j))$$

az α partíció feltételes entrópiája a β partícióra nézve. A feltételes entrópia jelentése: az α partíciót minden egyes B_j halmazra megszorítva kapunk egy partíciót, a megfelelő diszkrét eloszlást a feltételes valószínűségek adják, melynek kiszámolhatjuk az entrópiáját. Különböző B_j halmazokra különböző entrópiát kapunk, $H(\alpha|\beta)$ épp ennek az átlaga. A feltételes entrópia alábbi tulajdonságai könnyen adódnak:

7.2. lemma: *Legyenek α, β, γ tetszőleges partíciók, jelölje $\nu = \{M\}$ a triviális partíciót.*

1. *$H(\alpha|\beta) \geq 0$, és $H(\alpha|\beta) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \leq \beta$.*
2. *$H(\alpha|\nu) = H(\alpha)$.*
3. *ha $\alpha \leq \beta$, akkor $H(\gamma|\alpha) \geq H(\gamma|\beta)$.*
4. *ha $\alpha \leq \beta$, akkor $H(\alpha|\gamma) \leq H(\beta|\gamma)$, és egyenlőség akkor és csak akkor fordul elő, ha $\alpha \vee \gamma = \beta \vee \gamma$.*
5. *$H(\alpha \vee \beta|\gamma) = H(\alpha|\gamma) + H(\beta|\alpha \vee \gamma)$, speciálisan $H(\alpha \vee \beta) = H(\alpha) + H(\beta|\alpha)$.*
6. *$H(\alpha|\beta) \leq H(\alpha)$, és egyenlőség akkor és csak akkor fordul elő, ha $\alpha \perp \beta$. Így $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$, és egyenlőség csak $\alpha \perp \beta$ esetén fordul elő.*

A $\rho(\alpha, \beta) = H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha)$ távolság metrikát definiál a véges partíciókon (jobbanmondva, azok ekvivalencia-osztályain). Ezt a távolságot *Rokhlin metrikának* is hívják. Kapcsolata a korábbi definiált távolsággal:

7.3. lemma: *Minden $\varepsilon > 0$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén létesik $\delta > 0$, hogy ha α és β m elemű partíciók és $d(\alpha, \beta) < \delta$, akkor $\rho(\alpha, \beta) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Legyenek $\alpha = \{A_1, ..., A_m\}$ és $\beta = \{B_1, ..., B_m\}$ véges partíciók, melyekre $d(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i \Delta B_i) = \delta$. Az alábbiakban $H(\beta|\alpha)$-t m és δ segítségével becsüljük.

Ha $\mu(A_i) > 0$, definiáljuk a $\lambda_i = \mu(A_i \setminus B_i)/\mu(A_i)$ együtthatókat. Ekkor

$$-\mu(A_i \cap B_i) \log \frac{\mu(A_i \cap B_i)}{\mu(A_i)} \leq -\mu(A_i)(1 - \lambda_i) \log(1 - \lambda_i).$$

Az $A_i \setminus B_i$ halmazt a B_j, $j \neq i$ halmazokkal elmetszve kapunk egy $m-1$ elemű partíciót, melynek entrópiája a 7.1. Lemma alapján legfeljebb $\log(m-1)$ lehet. Ez az entrópia a

$$-\sum_{j\neq i}((\lambda_i)^{-1}\mu(B_j|A_i))\log((\lambda_i)^{-1}\mu(B_j|A_i)) = \lambda_i^{-1}\left(-\sum_{j\neq i}(\mu(B_j|A_i))\log(\mu(B_j|A_i))\right)+\log\lambda_i$$

képlettel számolható. Következésképp

$$-\sum_{j\neq i}(\mu(B_j\cap A_i))\log\frac{\mu(B_j\cap A_i)}{\mu(A_i)} \leq -\mu(A_i)\lambda_i(\log\lambda_i - \log(m-1)).$$

Mindezeket összevetve, és kihasználva, hogy $\log x$ konkáv függvény, kapjuk, hogy minden i-re:

$$\begin{aligned} & -\sum_j \mu(B_j\cap A_i)\log\mu(B_j|A_i) \leq \\ \leq\ & \mu(A_i)\left((1-\lambda_i)\log\frac{1}{1-\lambda_i} + \lambda_i\log\frac{m-1}{\lambda_i}\right) \\ \leq\ & \mu(A_i)\log m. \end{aligned}$$

i-ben összegezve éppen $H(\beta|\alpha)$-ra kapunk becslést. Jobbanmondva, nagyobb mértékű A_i halmazoknál az első, kisebb mértékűeknél a második sor becslését használjuk. Így:

$$\begin{aligned} H(\beta|\alpha) \leq\ & \sum_{\mu(A_i)<\sqrt{\delta}} \mu(A_i)\log m + \\ & + \sum_{\mu(A_i)\geq\sqrt{\delta}} \mu(A_i)\left(-(1-\lambda_i)\log(1-\lambda_i) - \lambda_i\log\lambda_i + \lambda_i\log(m-1)\right). \end{aligned}$$

A felbontás előnye, hogy $d(\alpha,\beta)=\delta$ miatt $\lambda_i\mu(A_i)\leq\delta$, így, ha $\mu(A_i)\geq\sqrt{\delta}$, szükségképpen $\lambda_i\leq\sqrt{\delta}$. Az $f(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x)$ függvény monoton nő a $(0,1/2)$ intervallumon, így a fenti becslésben a második tag legfeljebb $f(\sqrt{\delta}) + \sqrt{\delta}\log(m-1)$. Az első tag pedig nyilván legfeljebb $\sqrt{\delta}m\log m$ lehet. $\square$.

7.4. lemma: *Legyen α egy partíció, β_n pedig partíciók egy sorozata, melyre $d(\alpha,\beta_n)\to 0$. Ekkor vannak $\gamma_n \leq \beta_n$ partíciók, melyekre $H(\alpha|\gamma_n)\to 0$.*

Bizonyítás. Jelöljük α elemeit $\{A_j : j = 1,..,J\}$-vel. $d(\alpha,\beta_n)\to 0$ alapján minden j-hez választhatunk $B_j^n \in \beta_n$ halmazokat, hogy $\mu(A_j\Delta B_j^n)\to 0$. Legyen minden n-re γ_n $J+1$ elemű, konkrétan legyenek az elemei a B_j^n halmazok,

$j = 1, ..., J$, továbbá $B^n_{J+1} = M \setminus \cup_{j=1}^{J} B^n_j$. Ekkor $\mu(B^n_j) \to \mu(A_j)$ $(j = 1, ..., J)$, és $\mu(B^n_{J+1}) \to 0$, amint $n \to \infty$. Következésképp

$$\begin{aligned} H(\alpha|\gamma_n) &= -\sum_{i=1}^{J} \mu(A_i \cap B^n_i)\log(\mu(A_i|B^n_i)) \\ &\quad -\sum_{j=1}^{J} \mu(A_j \cap B^n_{J+1})\log(\mu(A_j|B^n_{J+1})) \\ &\quad -\sum_{i=1}^{J}\sum_{j\neq i} \mu(A_j \cap B^n_i)\log(\mu(A_j|B^n_i)) \end{aligned}$$

ahol az első tag $\mu(A_i|B^n_i) \to 1$ $(i = 1, ..., J)$ miatt tart 0-hoz, a második és a harmadik tag pedig azért, mert $\mu(A_j \cap B^n_i) \to 0$, ha $i \neq j$. $\square$.

Transzformáció entrópiája egy partícióra nézve. Legyen α tetszőleges partíció, ekkor definiáljuk az

$$\alpha^n = \alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-n+1}\alpha$$

további, egyre finomabb partíciókat. Mivel minden β partícióra és $k \geq 0$ számra $H(T^{-k}\beta) = H(\beta)$, a 7.2. Lemma utolsó tulajdonsága alapján $H(\alpha^{m+n}) \leq H(\alpha^n) + H(\alpha^m)$, azaz $H(\alpha^n)$ n-ben szubadditív, tehát létezik

$$h(T, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n)$$

amit a T endomorfizmus α partícióra vonatkozó entrópiájának hívunk.

7.5. lemma: $h(T, \alpha) = \lim_{n\to\infty} H(\alpha|T^{-1}\alpha^n)$

$x \in A_{i_0} \cap T^{-1}A_{i_1} \cap ... \cap T^{-n+1}A_{i_{n-1}} \in \alpha^n$ azt jelenti, hogy az $T^k x \in A_{i_k}$, $k = 0, 1, ..., (n-1)$, azaz az x pont első n iterációjának mindegyikére megmondjuk, az α partíció melyik elemébe esik. A 7.5. Lemma alapján $h(T, \alpha)$ jelentése: átlagosan mennyi plusz információt nyerünk, ha a dinamika n-dik lépésében az α^{n-1}-t tovább finomítjuk α^n-be.

A 7.5. Lemma bizonyítása. A 7.2. Lemma 3. tulajdonsága alapján $H(\alpha|T^{-1}\alpha^n)$ n-ben monoton csökken, így a határérték létezik. Továbbá

$$\begin{aligned} H(\alpha^n) &= H(T^{-1}(\alpha^{n-1}) \vee \alpha) = H(\alpha^{n-1}) + H(\alpha|T^{-1}\alpha^{n-1}) = \\ &= H(\alpha^{n-2}) + H(\alpha|T^{-1}(\alpha^{n-2})) + H(\alpha|T^{-1}(\alpha^{n-1})) = \\ &= H(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} H(\alpha|T^{-1}(\alpha^k)) \end{aligned}$$

n-nel osztva és határértéket véve adódik a Lemma állítása. $\square$.

További egyszerű, de hasznos tulajdonságok:

7.6. lemma: *α, β tetszőleges partíciók, ekkor:*

1. *$h(T, \alpha) = h(T, T^{-1}\alpha)$, és ha T automorfizmus, $h(T, \alpha) = h(T, T\alpha)$;*
2. *$h(T, \alpha) = h(T, \vee_{i=0}^{k} T^{-i}\alpha)$ minden $k \in \mathbb{N}$ számra, és ha T automorfizmus, $h(T, \alpha) = h(T, \vee_{i=-k}^{k} T^{-i}\alpha)$ minden $k \in \mathbb{N}$ számra;*
3. *$h(T, \alpha) \leq h(T, \beta) + H(\alpha|\beta)$, speciálisan ha $\alpha \leq \beta$, $h(T, \alpha) \leq h(T, \beta)$;*
4. *$|h(T, \alpha) - h(T, \beta)| \leq H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha) = \rho(\alpha, \beta)$;*
5. *$h(T, \alpha \vee \beta) \leq h(T, \alpha) + h(T, \beta)$.*

Nézzük meg a 3. tulajdonság bizonyítását. A 7.2. Lemmában szereplő tulajdonságokat használva:

$$\begin{aligned} H(\alpha^n|\beta^n) &= H(\alpha \vee T^{-1}(\alpha^{n-1})|\beta^n) = H(\alpha|\beta^n) + H(T^{-1}(\alpha^{n-1})|\alpha \vee \beta^n) \\ &\leq H(\alpha|\beta) + H(T^{-1}(\alpha^{n-1})|\beta^n) \\ &\leq H(\alpha|\beta) + H(T^{-1}\alpha|T^{-1}\beta) + H(T^{-2}(\alpha^{n-2})|\beta^n) \leq \cdots \\ &\leq n(H(\alpha|\beta)). \end{aligned}$$

Másrészt szintén a 7.2. Lemma alapján

$$H(\alpha^n) \leq H(\alpha^n \vee \beta^n) = H(\beta^n) + H(\alpha^n|\beta^n) \leq H(\beta^n) + nH(\alpha|\beta)$$

amit n-nel osztva és határértéket véve kapjuk az állítást.

Kolmogorov-Sinai entrópia.

Definíció: (Kolmogorov-Sinai entrópia) Egy $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus $h(T)$ entrópiáját úgy definiáljuk, mint a $h(T, \alpha)$ mennyiségek szuprémumát, ha α befujta az M tér összes lehetséges (véges, mérhető) partícióját.

Közvetlenül a definíció alapján persze nehéz volna kiszámolni az entrópiát; éppen ezért döntő jelentőségű Kolmogorov és Sinai alábbi tétele, melynek bevezetéséhez szükségünk van néhány további egyszerű definícióra és lemmára.

Definíció: A β_n partíció-sorozat

- **finomodó**, ha $\beta_{n+1} \geq \beta_n$, minden $n \in \mathbb{N}$-re.
- **generáló**, ha minden α partícióra létezik olyan $\gamma_n \leq \vee_{k=1}^{n} \beta_k$ partíció-sorozat, melyre $d(\alpha, \gamma_n) \to 0$. Ez pontosan azt jelenti, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ halmaz közelíthető a $\vee_{k=1}^{n} \beta_k$ partíció elemeinek alkalmas uniójával. Másképp szólva, ha tekintjük $\vee_{k=1}^{n} \beta_k$ partíciókhoz tartozó véges $\mathcal{F}_n$ σ-algebrák egyre finomodó sorozatát, akkor az ezek összessége által generált σ-algebra kiadja a teljes $\mathcal{F}$-t.

7.7. lemma: *Ha β_n véges partíciók egy finomodó és generáló sorozata, akkor* $h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T, \beta_n)$.

Bizonyítás. Legyen α tetszőleges m elemű patíció. Rögzítsünk tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor a 7.3. Lemma alapján létezik $\delta > 0$, hogy minden m elemű γ partícióra, amennyiben $d(\alpha, \gamma) < \delta$, $\rho(\alpha, \gamma) < \varepsilon$ is teljesül. Ugyanakkor, mivel β_n finomodó és generáló, létezik n_0 és $\gamma_{n_0}(\leq \vee_{k=0}^{n_0} \beta_k = \beta_{n_0})$ m-elemű partíció, melyre $d(\gamma_{n_0}, \alpha) < \delta$, így $\rho(\gamma_{n_0}, \alpha) < \varepsilon$. Tehát a 7.6. Lemma 3. és 4. tulajdonságai alapján

$$h(T, \alpha) \leq h(T, \gamma_{n_0}) + \varepsilon \leq h(T, \beta_{n_0}) + \varepsilon.\square.$$

Definíció: Az α véges partíciót **generátor**nak nevezzük

- **nem invertálható** $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmusra, ha az $(\alpha^n =) \vee_{k=0}^{n} T^{-k}\alpha$ partíció-sorozat generáló (α féloldali generátor).
- **invertálható** $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmusra (automorfizmusra), ha az $\vee_{k=-n}^{n} T^{-k}\alpha$ partíció-sorozat generáló (α kétoldali generátor).

7.8. tétel: (Kolmogorov-Sinai tétel) *Amennyiben α generátor,* $h(T) = h(T, \alpha)$.

Bizonyítás a nem invertálható esetre. Legyen β tetszőleges partíció. Mivel α generátor, létezik $\gamma_n \leq \alpha^n$ partíció-sorozat, melyre $d(\gamma_n, \beta) \to 0$ (itt persze $\alpha^n = \vee_{k=0}^{n} T^{-k}\alpha$). A 7.4. Lemma alapján ezek a partíciók tovább durvíthatóak $\beta_n \leq \gamma_n$ partíciókká, melyekre $H(\beta|\beta_n) \to 0$. Tehát minden $\delta > 0$-hoz létezik n_0, hogy $\beta_{n_0} \leq \alpha_{n_0} = \vee_{k=0}^{n_0} T^{-k}\alpha$, és $H(\beta|\beta_{n_0}) < \delta$. A 7.6. Lemma 2. és 3. tulajdonságait használva:

$$h(T, \beta) \leq h(T, \beta_{n_0}) + H(\beta|\beta_{n_0}) \leq h(T, \vee_{k=0}^{n_0} T^{-k}\alpha) + \delta = h(T, \alpha) + \delta. \ \square.$$

Megjegyzések: Invertálható esetben ugyanígy bizonyítunk, csak a $\vee_{k=0}^{n} T^{-k}\alpha$ partíciósorozat helyett a $\vee_{k=-n}^{n} T^{-k}\alpha$ partíciósorozatot használjuk. Ugyanakkor, ha az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ *automorfizmus*ra létezik α *féloldali* generátor, akkor $h(T) = 0$. Ekkor ugyanis elég nagy n-re $H(T\alpha|\vee_{k=0}^{n} T^{-k}\alpha) < \varepsilon$, másrészt a 7.5. Lemma alapján

$$h(T, \alpha) = h(T, T\alpha) = \lim_{n\to\infty} H(T\alpha|T^{-1}(\vee_{k=0}^{n} T^{-k}(T\alpha)) = H(T\alpha|\vee_{k=0}^{n} T^{-k}\alpha).$$

Entrópia néhány konkrét példára.

Körvonal forgatása. $M = \mathbb{S}^1$ a Lebesgue féle σ algebrával és a Lebesgue mértékkel, $Tx = x + \gamma(\mod 1)$, ahol $\gamma \in [0, 1)$ rögzített szám. Ha γ *racionális*, $\exists p \in \mathbb{N}$, hogy $T^p = Id$, ezért $h(T) = 0$ az alábbi két észrevétel következménye:

- az identitásra $h(Id) = 0$, bármi is legyen a fázistér és a mérték,
- $h(S^k) = k \cdot h(S)$, minden S endomorfizmusra és $k \in \mathbb{N}$ számra.

Ha γ *irracionális*, ismét $h(T) = 0$ adódik. Legyen $\alpha = \{A_0, A_1\}$ $\mathbb{S}^1$ partíciója két félkörre (pl. $A_0 = [0, 1/2)$, $A_1 = [1/2, 1)$). Ekkor α^n körívekből áll, melynek végpontjai pontosan az eredeti A_0 és A_1 félkörök végpontjainak elforgatottjai. Tehát α^n pontosan $2(n+1)$ körívből áll, így $H(\alpha^n) \leq \log(2(n+1))$, és $h(T, \alpha) = 0$. Másrészt γ irracionalitása miatt minden pont pályája sűrű $\mathbb{S}^1$-n, így α^n minden ívének hossza nullához tart, és n növekedtével egyre pontosabban megközelíthető $\mathbb{S}^1$ tetszőleges köríve α^n alkalmas elemeinek uniójával. Tehát α generátor T-re, és így $h(T) = 0$. A fenti megjegyzés fényében ez abból is következik, hogy α féloldali generátor, T pedig automorfizmus.
(Féloldali) Bernoulli shift. K legyen tetszőleges pozitív egész, $M = \Sigma^+ = \{0, 1, ..., K-1\}^{\mathbb{Z}^+}$ a hengerhalmazok által generált Borel σ-algebrával, $\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ a shift leképezés. Σ^+-t egy σ-ra invariáns *Bernoulli mérték*kel látjuk el, ahogy azt [13] 4. fejezetében leírtuk: adott egy $p = (p_0, ..., p_{K-1})$ véges valószínűségeloszlás ($p_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{K-1} p_i = 1$), és minden $C \subset \Sigma^+$ hengerhalmazra, ha $C = C_{a_1,...a_L} = \{\underline{x} = (x_1, x_2, ...) \in \Sigma^+ : x_1 = a_1, ..., x_L = a_L\}$, $\mu(C) = p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdot ... \cdot p_{a_L}$. Legyen $\alpha = \{A_0, ...A_{K-1}\}$, ahol $A_j = \{\underline{x} \in \Sigma^+ : x_1 = j\}$, $j = 0, ..., K-1$, azaz az első betű értéke szerint partícionálunk. Jelöljük a $(p_1, ..., p_{K-1})$ eloszlás entrópiáját $H(p)$-vel, azaz $H(p) = H(\alpha) = -\sum_{i=0}^{K-1} p_i \log p_i$. Ekkor $\sigma^{-k}\alpha$ a k-dik szimbólum értéke szerinti partíció, és így a Bernoulli mértékre $\sigma^{-n}\alpha \perp \alpha^n$ minden n-re. Következésképp $H(\alpha^n) = nH(p)$, és $h(\sigma, \alpha) = H(p)$. Ugyanakkor minden hengerhalmaz előáll alkalmas n-re, mint α^n elemeinek uniója, és így α generátor. Tehát $h(\sigma) = H(p)$. Hasonlóan bizonyítható, hogy kétoldali Bernoulli shift-re szintén $h(\sigma) = H(p)$.

Néhány további fontos eredmény, bizonyítás nélkül.

Shannon-McMillan Breiman tétel. Egy $\alpha = \{A_0, A_1, ...A_{K-1}\}$ partíció esetén legyen $\alpha(x) = A_i$, ha $x \in A_i$ (itt $i = 0, ..., (K-1)$). Speciálisan $\alpha^n(x) = A_{i_0} \cap \cdots \cap T^{-n+1} A_{i_{n-1}}$, ha $T^k x \in A_{i_k}$, $k = 0, ..., (n-1)$. $\mu(\alpha^n(x))$ nyilván monoton csökken, és így $I_n(x) = -\log(\mu(\alpha^n(x)))$, melyet az n-dik lépésben a partíció alapján rendelkezésre álló információnak tekinthetünk, monoton nő, ahogy $n \to \infty$. Shannon-McMillan-Breiman alapvető tétele ennek a növekedésnek az üteméről ad információt ergodikus esetben. Nézzük konkrétan a Bernoulli shift esetét, és legyen α a fent bemutatott (első betű értéke szerinti) partíció. Ekkor $I_n(x)$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók összege, és a nagy számok erős törvénye szerint $\frac{1}{n}I_n(x) \to H(p)(= h(\sigma))$ μ-majdnem minden x-re. Ezt a tényt általánosítja messzemenően az alábbi tétel.

7.9. tétel: (Shannon-Mcmillan-Breiman tétel) *Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ ergodikus endomorfizmus, és α véges partíció. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I_n(x) = h(T,\alpha) \qquad \mu \text{ m.m. } x\text{-re és } L^1\text{-ben.}$$

Ornstein izomorfia tétele. Idézzük fel [13] 4. fejezetéből az endomorfizmusok izomorfiájának a fogalmát. Izomorf dinamikai rendszerek ergodelméleti szempontból azonosak, így entrópiájuk is megegyezik. Konkrétan tekintsünk két *kétoldali* (azaz *invertálható*) Bernoulli shiftet: a σ_1 shiftet K szimbólummal és $p = (p_0, ..., p_{K-1})$ betűeloszlással, illetve a σ_2 shiftet M szimbólummal és $q = (q_0, ..., q_{M-1})$ betűeloszlással. Amennyiben σ_1 és σ_2 izomorfak, $H(p) = H(q)$. Ornstein alapvető tétele szerint ennek megfordítása is igaz.

7.10. tétel: (Ornstein izomorfia tétele) *A σ_1 és σ_2 Bernoulli shiftek akkor és csak akkor izomorfak, ha $(h(\sigma_1) =)H(p) = H(q)(= h(\sigma_2))$.*

Fontos megjegyzés, hogy Ornstein tétele az invertálható esetre vonatkozik. A $p = (p_0, ..., p_{K-1})$ és $q = (q_0, ..., q_{M-1})$ betűeloszlású *féloldali* Bernoulli shiftek csak abban a triviális esetben izomorfak – feltéve, hogy $p_i > 0$, $i = 0, ..., (K-1)$ és $q_j > 0$, $j = 0, ..., (M-1)$ – ha $K = M$ és a q vektor a p vektor permutációja. Invertálható esetben azonban az entrópia teljes invariáns, abban az értelemben, hogy azonos entrópiájú Bernoulli automorfizmusok izomorfak. Ornstein tételének jelentőségét az is adja, hogy invertálható dinamikai renszerek igen széles osztályára (kicsit pongyolán: hiperbolikus dinamikai rendszerekre) sikerült belátni, hogy izomorfak valamilyen (kétoldali) Bernoulli shift-tel.

Variációs elv. A 6. fejezetben láttuk, hogy K szimbólum esetén a shift leképezés *topologikus* entrópiája $\log(K)$, és mivel tetszőleges $p = (p_0, ..., p_{K-1})$ betűeloszlás esetén $H(p) \le \log(K)$; a Bernoulli shift Kolmogorov-Sinai entrópiája tehát nem haladhatja meg a topologikus entrópiát. Az alábbi, úgynevezett variációs elvet ezen tény messzemenő általánosításának tekinthetjük. Emlékeztető [13] 8. fejezetéből: ha rögzítünk egy $(M, \mathcal{F}, T)$ endomorfizmust – például egy topologikus dinamikai rendszert – akkor $\mathcal{M}_{\mathrm{inv}}$ jelöli a T-re invariáns Borel valószínűségi mértékek összességét.

7.11. tétel: (Variációs elv) *Legyen $T : M \to M$ egy kompakt metrikus tér folytonos endomorfizmusa, jelölje $h_{top}(T)$ T topologikus entrópiáját, és $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}$ esetén $h_\mu(T)$ a T leképezés μ invariáns mértékre vonatkozó Kolmogorov-Sinai entrópiáját. Ekkor $h_{top}(T) = \sup\{h_\mu(T) : \mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}\}$.*

Speciális szerepet töltenek be az úgynevezett *maximális entrópiájú mértékek*; azok a $\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}$ mértékek, melyekre $h_\mu(T) = h_{top}(T)$. Ilyen például a shift leképezés esetén (K szimbólumra) a $(p_0, ..., p_{K-1}) = (1/K, ..., 1/K)$ valószínűségeloszláshoz tartozó Bernoulli mérték. Bebizonyítható, hogy ebben az esetben ez az egyetlen ilyen mérték.

8. Markov shift

Véges állapotterű Markov láncok – valószínűségszámítás és lineáris algebra emlékeztető. Egy $\pi = \pi_{ij}$ $i, j = 0, ..., (K-1)$ mátrix sztochasztikus mátrix, ha $\pi_{ij} \geq 0$ $\forall i, j$ és $\sum_{j=0}^{K-1} \pi_{ij} = 1$ $\forall i$. π^n jelöli a mátrix n-dik hatványát. π *irreducibilis*, ha minden i, j párra létezik n, hogy $\pi_{ij}^n > 0$. Ilyenkor az $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$ vektor egyszeres jobboldali sajátvektora π-nek az 1 sajátértékhez; és a megfelelő baloldali sajátvektor is egyszeres: létezik és egyértelmű egy $p = (p_0, ..., p_{K-1})$ vektor, a stacionárius eloszlás, melyre $p_i > 0$ minden i-re, $\sum_{i=0}^{K-1} p_i = 1$, és $\sum_{i=0}^{k-1} p_i \pi_{ij} = p_j$ minden j-re. Ilyenkor π -hez tartozik egy $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ stacionárius eloszlású, véges $(0, ..., K-1)$ értékkészletű értékű valószínűségi változó sorozat:

$$P(X_n = i) = P(X_1 = i) = p_i;$$
$$P(X_{n+1} = j | X_1 = i_1, ..., X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \pi_{ij};$$

ezt Markov láncnak hívjuk. Különösen fontos az *irreducibilis, aperiodikus* eset; amikor $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\pi_{ij}^N > 0$ $\forall i, j$-re. Ez garantálja, hogy az egyszeres 1 sajátértéktől eltekintve π spektruma egy $\alpha < 1$ sugarú körön belül fekszik a komplex síkon, következésképp $\pi_{ij}^n \to p_j$ minden i, j-re, amint $n \to \infty$, sőt, $\pi_{ij}^n = p_j + \mathcal{O}(\alpha^n)$. Mindez általánosítható tetszőleges *primitív mátrix*ra, azaz olyan nemnegatív B_{ij} elemű mátrixra, melynek van n hatványa, hogy minden i, j párra $B_{ij}^n > 0$. Perron tétele értelmében ilyenkor B-nek van egy maximális $\lambda > 0$ sajátértéke, ez a sajátérték egyszeres, és a hozzá tartozó sajátvektor minden komponense pozitív.

Topologikus Markov láncok, Markov shiftek. Egy $A = A_{ij}$ mátrix szomszédsági (adjacencia) mátrix, ha minden eleme 0 vagy 1. Tekintsük a $\Sigma^+ = \{0, ..., (K-1)\}^{\mathbb{Z}^+}$ szimbolikus teret, és ezen a σ eltolást, mint topologikus dinamikai rendszert – Σ^+-n a metrikát a 4 fejezetben leírt módon definiáljuk – és legyen

$$\Sigma_A^+ = \{(x_1, x_2 ...) = \underline{x} \in \Sigma^+ | A_{x_k x_{k+1}} = 1; \forall k = 1, 2, ...\},$$

azaz A_{ij} a „megengedett átmeneteket” definiálja. Ekkor $\Sigma_A^+ \subset \Sigma^+$ σ-ra invariáns és zárt – tehát kompakt – következésképp tekinthetjük a $\sigma : \Sigma_A^+ \to \Sigma_A^+$ topologikus dinamikai rendszert. Ezt hívjuk *topologikus Markov lánc*nak.

Megjegyzés: A definíciók, és a teljes itt következő tárgyalás, automatikusan általánosítható a kétoldalú topologikus Markov láncok és Markov shiftek esetére, ezt a továbbiakban nem részletezzük.

Legyen most adott egy K állapotú irreducibilis aperiodikus Markov lánc. A π_{ij} sztochasztikus mátrix természetes módon definiál egy A_{ij} szomszédsági mátrixot: legyen $A_{ij} = 1$ ha $\pi_{ij} > 0$, és $A_{ij} = 0$ ha $\pi_{ij} = 0$. A Σ_A^+ téren konstruálhatunk egy σ-ra invariáns $\mu(=\mu_\pi)$ mértéket a következőképpen. Mivel a hengerhalmazok generálják a σ-algebrát, elég μ-t ezeken megadnunk (itt $(y_1, ...y_l) \in \{0, 1, ..., (K-1)\}^l$, rögzített):

$$B = (B_{(y_1,...,y_l)} =)\{(x_1, x_2, ..., x_l, ...) = \underline{x} \in \Sigma_A^+ : x_k = y_k, k = 1, .., l\} :$$
$$\mu(B)(= \mu_\pi(B_{(y_1,...,y_l)})) = p_{y_1}\pi_{y_1y_2}\pi_{y_2y_3}\cdots\pi_{y_{l-1}y_l}\,. \tag{8.1}$$

A $(\Sigma_A^+, \mathcal{F}, \mu_\pi, \sigma)$ endomorfizmust (itt $\mathcal{F}$ a hengerhalmazok által generált – Borel-féle – σ-algebrát jelöli) *Markov shift*-nek hívjuk.

8.1. állítás: *Legyen π egy irreducibilis aperiodikus Markov lánc átmenetmátrixa. Ekkor a megfelelő $(\Sigma_A^+, \mathcal{F}, \mu_\pi, \sigma)$ Markov shift keverő.*

Bizonyítás. Ahogyan azt [13] 4. és 5. fejezetében, a Bernoulli shift esetében láttuk, minden mérhető halmaz approximálható hengerhalmazokkal, ezért elegendő belátni, hogy $B(= B_{(y_1,...,y_l)})$ és $C(= C_{(z_1,...,z_l)})$ hengerhalmazokra $\mu(B\cap \sigma^{-n}C) \to \mu(B)\mu(C)$, amint $n \to \infty$. Egyrészt

$$\mu(B)\cdot\mu(C) = p_{y_1}\pi_{y_1y_2}\pi_{y_2y_3}\cdots\pi_{y_{l-1}y_l}\cdot p_{z_1}\pi_{z_1z_2}\pi_{z_2z_3}\cdots\pi_{z_{l-1}z_l},$$

másrészt, ha $n \geq l$, $\underline{x} \in B\cap\sigma^{-n}C$ akkor és csak akkor, ha $(x_1, ..., x_l) = (y_1, ..., y_l)$ és $(x_{n+1}, ..., x_{n+l}) = (z_1, ..., z_l)$ (az $x_{l+1}, ..., x_n$ betűk tetszőlegesek lehetnek). Így

$$\mu(B\cap\sigma^{-n}C) = \sum_{x_{l+1},...,x_n=0}^{K-1} p_{y_1}\pi_{y_1y_2}\cdots\pi_{y_{l-1}y_l}\pi_{y_lx_{l+1}}\pi_{x_{l+1}x_{l+2}}\cdots\pi_{x_{n-1}x_n}\pi_{x_nz_1}\cdot$$
$$\cdot\pi_{z_1z_2}\pi_{z_2z_3}\cdots\pi_{z_{l-1}z_l};$$

azaz

$$\mu(B\cap\sigma^{-n}C) = p_{y_1}\pi_{y_1y_2}\cdots\pi_{y_{l-1}y_l}\cdot\pi_{y_lz_1}^{(n-l)}\cdot\pi_{z_1z_2}\pi_{z_2z_3}\cdots\pi_{z_{l-1}z_l}.$$

Mivel $\pi_{y_lz_1}^n = p_{z_1} + \mathcal{O}(\lambda^n)$,

$$|\mu(B\cap\sigma^{-n}C) - \mu(B)\mu(C)| \leq C(l)\lambda^n$$

adódik, ahol a $C(l)$ konstans csak a vizsgált hengerhalmazok l hosszától függ. Ezzel nem csupán az eredeti állítást bizonyíttuk, hanem becslést adtunk a konvergencia sebességére is. □

Megjegyzés: Hasonlóan bizonyítható, hogy amennyiben a π mátrix irreducibilis, de nem aperiodikus, a megfelelő Markov shift ergodikus, de nem keverő.

Markov shift entrópiája. Mindvégig az irreducibilis, aperiodikus esetet vizsgáljuk, így speciálisan az A_{ij} mátrix is primitív, így Perron tétele szerint van maximális pozitív λ sajátértéke, melyhez egyetlen baloldali és egyetlen jobboldali sajátvektor tartozik. Először a topologikus entrópiát számoljuk ki.

8.2. lemma: *Egy $\sigma : \Sigma_A^+ \to \Sigma_A^+$ topologikus Markov lánc toplógikus entrópiája $h_{top}(\sigma) = \log \lambda$, ahol λ az A_{ij} szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértéke.*

Bizonyítás. A teljes shift esetét (amikor $A_{ij} = 1$ minden i, j párra) már tárgyaltuk a 6 fejezetben. Ez alapján könnyen végiggondolható, hogy a kulcsmennyiség $W(n, \Sigma_A^+)$, *a megengedett n hosszú jelsorozatok száma.* Ha $2^{-(m+1)} < \varepsilon \leq 2^{-m}$, $W(n + m, \Sigma_A^+)$ adja meg $H(n, \varepsilon, \sigma)$-t, a Σ_A^+ térben egy (n, ε)-háló minimális elemszámát. Így

$$h_{top}(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(W(n, \Sigma_A^+)).$$

Másrészt ha tekintjük A^n-t, az A mátrix n-dik hatványát, akkor teljes indukcióval igazolható, hogy $(A^n)_{ij}$ pozitív egész szám, és épp azt mondja meg, hány olyan n hosszú megengedett jelsorozat van, ami az i szimbólummal kezdődik, és a j szimbólummal végződik. Így

$$W(n, \Sigma_A^+) = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} (A^n)_{ij}.$$

Ez a mennyiség az A^n (nemnegatív elemű) mátrix egy normájának is felfogható, és véges dimenziós téren bármely két norma ekvivalens. Így

$$h_{top}(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||A^n|| = \log \lambda,$$

hiszen a legnagyobb sajátérték épp a spektrálsugár (erről lásd még a 14 fejezet funkanal összefoglalóját), azaz $\lambda = \lim_{n\to\infty} (||A^n||^{\frac{1}{n}})$. $\square$.

8.3. lemma: *Legyen $(\Sigma_A^+, \mathcal{F}, \mu_\pi, \sigma)$ A_{ij} szomszédsági mátrix-szal, π_{ij} átmenetmátrixszal és ehhez p_i stacionárius eloszlással. A Kolmogorov-Sinai entrópia*

$$h_\mu(\sigma) = -\sum_{j_1, j_2=0}^{K-1} p_{j_1} \pi_{j_1 j_2} \log(\pi_{j_1 j_2}).$$

Bizonyítás. Ahogy a Bernoulli shift esetén a 7 fejezetben, az első betű értéke szerinti α partíció most is generáló. A 7.5. lemmát fogjuk használni. Definíció szerint:

$$H(\alpha|\sigma^{-1}\alpha^n) = -\sum_{A\in\alpha, B\in\sigma^{-1}\alpha^n} \mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)},$$

ahol $\alpha \ni A = C^1_{j_1}$ most 1 hosszú hengerhalmaz, $\sigma^{-1}\alpha^n \ni B = C^{2,\dots,(n+1)}_{j_2\cdots j_{n+1}}$ pedig n hosszú (és egy hellyel elcsúsztatott) hengerhalmaz. Tehát

$$\mu(A\cap B) = p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_i j_{i+1}}; \qquad \mu(B) = p_{j_2}\prod_{i=2}^{n}\pi_{j_i j_{i+1}}.$$

Ebből

$$H(\alpha|\sigma^{-1}\alpha^n) = -\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=0}^{K-1} p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_i j_{i+1}}\left(\log(\pi_{j_1 j_2}) + \log(p_{j_1}) - \log(p_{j_2})\right).$$

Ugyanakkor $\sum_{k=0}^{K-1} p_k\pi_{kl} = p_l$ minden l-re, és $\sum_{l=0}^{K-1}\pi_{kl} = 1$ minden k-ra. Így

$$\begin{aligned}
\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=0}^{K-1} p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_i j_{i+1}}\log(\pi_{j_1 j_2}) &= \sum_{j_1,j_2=0}^{K-1} p_{j_1}\pi_{j_1 j_2}\log(\pi_{j_1 j_2});\\
\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=0}^{K-1} p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_i j_{i+1}}\log(p_{j_1}) &= \sum_{j_1=0}^{K-1} p_{j_1}\log(p_{j_1});\\
\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=0}^{K-1} p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_i j_{i+1}}\log(p_{j_2}) &= \sum_{j_2=0}^{K-1} p_{j_2}\log(p_{j_2});
\end{aligned}$$

és a lemma állítása következik. $\square$.

Parry mérték. A 7.11. tételből tudjuk, hogy egy Markov shift Kolmogorov-Sinai entrópiája nem lehet nagyobb, mint a topologikus entrópia, azaz $\log\lambda$, ahol λ az A szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértéke. A Parry mértékekre ez a maximum eléretik, azaz ezek a maximális entrópiájú invariáns mértékek egy topologikus Markov láncra. A Parry mérték π_{kl} átmenetmátrixát a következőképp konstruáljuk. Legyen az A_{kl} szomszédsági mátrix maximális sajátértéke λ, az ehhez tartozó jobboldali sajátvektor u_k, a baloldali sajátvektor s_k, amelyeket úgy választunk, hogy $\langle s,u\rangle = \sum_{k=0}^{K-1} s_k u_k = 1$ teljesüljön (Perron tétele szerint $s_k > 0$ és $u_k > 0$ minden k-ra). A Parry mérték átmenetmátrixát $\pi_{kl} = \lambda^{-1}u_k^{-1}A_{kl}u_l$ definiálja. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a mátrix valóban sztochasztikus, mint ahogy az is, hogy $p_k = s_k u_k$ stacionárius eloszlás. Az alábbi számolásban a $\sum_{k=0}^{K-1} s_k A_{kl} = \lambda s_l$, $\sum_{k=0}^{K-1} A_{kl} u_l = \lambda u_k$, $\sum_{k=0}^{K-1} s_k u_k = 1$ összefüggéseket használjuk, valamint azt, hogy az A_{kl} szomszédsági mátrixra $A_{kl} \log(A_{kl}) = 0$, minden k-ra és l-re. A Parry mérték Kolmogorov-Sinai entrópiája:

$$\begin{aligned} h_\mu(\sigma) &= -\sum_{k,l=0}^{K-1} s_k u_k \lambda^{-1} u_k^{-1} A_{kl} u_l \log(\lambda^{-1} u_k^{-1} A_{kl} u_l) \\ &= -\sum_{k,l=0}^{K-1} s_k \lambda^{-1} A_{kl} u_l \log(\lambda^{-1} u_k^{-1} A_{kl} u_l) \\ &= \sum_{k,l=0}^{K-1} s_k \lambda^{-1} A_{kl} u_l \log(\lambda) + \sum_{k,l=0}^{K-1} s_k \lambda^{-1} A_{kl} u_l \left(\log(u_k) - \log(A_{kl} u_l)\right) \\ &= \log\lambda + \sum_{k=0}^{K-1} s_k u_k \log(u_k) - \sum_{l=0}^{K-1} s_l u_l \log(u_l) = \log\lambda. \end{aligned}$$

Korreláció-lecsengés és sebessége. Ahogy azt [13] 5. fejezetében már láttuk, egy $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus akkor és csak akkor keverő, ha lecsengenek a korrelációk, azaz minden $f, g \in L_2(\mu)$ függvénypárra

$$Corr(n, f, g) = \left(\int_M f(T^n x) g(x)\, d\mu(x) - E_\mu f \cdot E_\mu g \right) \to 0, \tag{8.2}$$

ahol $E_\mu f = \int_M f(x)\, d\mu(x)$. A különféle alkalmazások szempontjából döntő jelentőségű a konvergencia sebessége (8.2)-ben, a sebesség azonban – amint ezt az alábbiakban érzékeltetni fogjuk – erősen függ az f, g függvények regularitási tulajdonságaitól. Tekintsük a Markov-shift esetét: a 8.1. állítás bizonyításánál láttuk, hogy amennyiben $f = \chi_B$ és $g = \chi_C$, tehát B és C hengerhalmazok indikátorfüggvényeit vizsgáljuk, akkor a lecsengés exponenciális. Ez a tulajdonság nyilván igaz marad lépcsőfüggvényekre, azaz hengerhalmazok indikátorfüggvényeinek véges lineárkombinációira is. Az exponenciális lecsengési tulajdonság egy igen fontos, további függvényosztályra is kiterjed.

Definíció: (Hölder folytonos függvények) Az (M, ρ) kompakt metrikus téren értelmezett $f : M \to \mathbb{R}$ függvény Hölder folytonos, ha $\exists\ \alpha \in (0, 1]$ és $C > 0$, hogy $\forall\ x, y \in M$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq C\, (\rho(x, y))^\alpha .$$

A legnagyobb α-t, amire ez a tulajdonság igaz, f Hölder exponensének, a legkisebb alkalmas $C (= C(f, \alpha))$-t pedig az α-hoz tartozó Hölder konstansnak nevezzük. Bevezetjük továbbá $||f||_\alpha = C(f, \alpha) + ||f||_0$ Hölder normát (itt $||f||_0$

a szuprémum norma) a Hölder folytonos függvények terén, melyet $C_\alpha(M)$-mel jelölünk.

Definíció: (Exponenciális korreláció-lecsengés) Legyen μ keverő invariáns (Borel valószínűségi) mérték a $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszerre (tehát M kompakt metrikus tér és T folytonos). Az $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ endomorfizmusra a korreláció-lecsengés sebessége exponenciális, ha $\forall \alpha \in (0, 1]$ esetén $\exists \beta \in (0, 1)$, hogy $\forall f, g \in C_\alpha(M)$ függvényekre $\exists C(f, g) > 0$, hogy:

$$|\,Corr(n, f, g)| \leq C(f, g)\beta^n. \tag{8.3}$$

Az exponenciális lecsengés rátája tehát csak a Hölder exponenstől függ, és általában a $C(f, g)$ konstansról is van információnk: az jellemzően $C(T) \cdot ||f||_\alpha \cdot ||g||_\alpha$ alakú, ahol a $C(T)$ konstans már csak a dinamikai rendszertől függ, és nem a konkrét f, g függvényektől.

8.4. állítás: *Keverő Markov shiftre (azaz irreducibilis, aperiodikus π esetén) a korreláció-lecsengés exponenciális.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{C}_l$ a pontosan l hosszú – (8.1) alakú – hengerhalmazok összességét, $\mathcal{F}_l$ pedig az ezek által generált (véges) σ algebrát. Ekkor $\mathcal{F}_l$ l-ben növekvő σ-algebra sorozat, mely $\mathcal{F}$-t generálja. Legyen $f, g \in C_\alpha(\Sigma_A^+)$ (Σ_A^+-n a metrikát a 4 fejezetben ismertetett standard módon definiáljuk). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $E_\mu f = E_\mu(g) = 0$ és vezessük be az

$$\hat{f}_l = E(f|\mathcal{F}_l); \qquad \tilde{f}_l = f - \hat{f}_l$$

jelöléseket, ahol $E(f|\mathcal{F}_l)$ a (μ-re vonatkozó) feltételes várható értéket jelöli ($\hat{g}$-t és $\tilde{g}$-t hasonlóan definiáljuk). Célunk a (8.3) becslés bizonyítása, ehhez l értékét n-hez fogjuk választani, a továbbiakban az l alsó indexeket nem írjuk ki (mindig). Érdemes még bevezetni az $\hat{f}^{(n)} = \hat{f} \circ T^n$ és $\tilde{f}^{(n)} = \tilde{f} \circ T^n$ jelöléseket, így, mivel $g = \hat{g} + \tilde{g}$ és $f \circ T^n = \hat{f}^{(n)} + \tilde{f}^{(n)}$:

$$Corr(n, f, g) = E(\hat{f}^{(n)} \cdot \hat{g}) + E(\tilde{f}^{(n)} \cdot \hat{g}) + E(\hat{f}^{(n)} \cdot \tilde{g}) + E(\tilde{f}^{(n)} \cdot \tilde{g}), \tag{8.4}$$

ahol E a μ szerinti várható érték. A (8.4) formulában az első tagot könnyen becsülhetjük: $\hat{f}$ és $\hat{g}$ lépcsőfüggvények, lineáris felbontásukban legfeljebb l hosszú hengerhalmazok szerepelnek. Így a 8.1. állítás bizonyításánál látott érvelésből:

$$|E(\hat{f}^{(n)} \cdot \hat{g})| \leq ||f||_0 \cdot ||g||_0 \cdot (\beta_\pi)^{n-l}$$

ahol $\beta_\pi < 1$ a π sztochasztikus mátrix második legnagyobb sajátértéke. Másrészt minden $B \in \mathcal{C}_l$ hengerhalmaz átmérője $diam(B) = 2^{-l}$, és $\tilde{g}(x)$ $x \in B$ esetén éppen azt mutatja, a g Hölder folytonos függvény mennyire tér el B-n vett átlagától az $x \in B$ pontban. Tehát g Hölder folytonossága miatt

$$|\tilde{g}(x)| \leq C(g, \alpha) \cdot 2^{-l\alpha}$$

és hasonlóképp

$$|\tilde{f}(x)| \leq C(f, \alpha) \cdot 2^{-l\alpha}, \qquad \Longrightarrow \qquad |\tilde{f}^{(n)}(x)| \leq C(f, \alpha) \cdot 2^{-l\alpha}.$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért érdemes bevezetni a $\beta_\alpha = 2^{-\alpha}$ jelölést, persze $\beta_\alpha < 1$ értékét az α Hölder exponens határozza meg. A fenti becslések alapján a (8.4) felbontásban a második, harmadik és negyedik tagra rendre:

$$E(\tilde{f}^{(n)} \cdot \hat{g}) + E(\hat{f}^{(n)} \cdot \tilde{g}) + E(\tilde{f}^{(n)} \cdot \tilde{g}) \leq$$
$$\leq (||f||_0 \cdot C(g, \alpha) + C(f, \alpha) \cdot ||g||_0 + C(f, \alpha) \cdot C(g, \alpha))\, \beta_\alpha^l,$$

így $l = n/2$ választással adódik az állítás. $\Box$.

9. Markov felbontás

A Markov felbontás mindmáig az egyik legsikeresebb eszköz hiperbolikus dinamikai rendszerek statisztikus tulajdonságainak vizsgálatára. Sikerét elsősorban Sinai, Ruelle és Bowen munkáinak köszönheti az 1970-es évek elejéről: többek között azért, mert ők dolgozták ki a Markov felbontás konstrukcióját dinamikai rendszerek egy lényeges osztályára (Anosov, illetve Axiom A rendszerekre). Mi most a macska leképezés esetére szorítkozunk, konkrétan Adler és Weiss ötletét ismertetjük ([1]). Szükségünk lesz mindazokra a fogalmakra, amik a macska leképezéssel kapcsolatban eddig felmerültek (pl. a 4 és a 5 fejezetekből, illetve [13]-ből.) Konkrétan, használni fogjuk a stabil és instabil fonalakat, a homoklinikus átmetszések fogalmát, valamint a lokális stabil és instabil fonalak átmetszésének egyértelműségét, és ehhez kapcsolódóan az $[x, y] = W^u_\delta(x) \cap W^s_\delta(y)$ jelölést.

Definíció: Az $R \subset \mathbb{T}^2$ halmaz *téglalap*, ha $R = \overline{int\, R}$ és $\forall x, y \in R$ esetén $[x, y] \in R$.

A macska leképezés esetében látszik, hogy a téglalapok a szokásos értelmében is (diszunkt) téglalapok (véges úniói), az e^u és e^s irányokkal párhuzamos oldalakkal. Általánosabb esetben a geometria ennél bonyolultabb is lehet (pl. Cantor halmazok direkt szorzata). Könnyen ellenőrizhető, hogy

- ha R és R' téglalap, akkor $R \cap R'$ is az;
- ha R téglalap, akkor TR is az.

További elnevezések:

Definíciók: Ha R téglalap, akkor határa előáll, mint $\partial R = \partial^u R \cup \partial^s R$, ahol ∂^u és ∂^s az e^u-val, illetve e^s-sel párhuzamos szakaszokat jelenti. Vezessük be továbbá a

$$W^u(x, R) = \cup_{y \in R}[x, y]; \qquad W^s(x, R) = \cup_{y \in R}[y, x]$$

jelöléseket. Ha $R_1 \subset R_2$ téglalap, azt mondjuk, R_1 az R_2 *u-résztéglalapja*, ha u irányban „végigér”, azaz $\partial^s R_1 \subset \partial^s R_2$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\forall x \in R_1$ esetén $W^u(x, R_1) = W^u(x, R_2)$. Az s-résztéglalap fogalmát analóg módon definiáljuk.

Könnyen ellenőrizhető, hogy R_1 akkor és csak akkor u-résztéglalapja R_2-nek, ha TR_1 u-résztéglalapja TR_2-nek, és ugyanez igaz s-résztéglalapokra is.

Definíció: Legyenek R, R' téglalapok. Azt mondjuk, R *helyesen metszi* R'-t, ha $TR \cap R'$ u-résztéglalap R'-ben. Ilyenkor automatikusan $TR \cap R'$ s-résztéglalap TR-ben, következésképp $R \cap T^{-1}R'$ is s-résztéglalap R-ben. A helyes átmetszésből következik, hogy amennyiben $x \in R$ és $Tx \in R'$, automatikusan

$$W^u(Tx, R') \subset T(W^u(x, R)); \qquad \text{és} \qquad W^s(x, R) \subset T^{-1}(W^s(Tx, R')).$$

Definíció: Az $R_0, R_1, ..., R_{K-1}$ véges sok téglalapból álló rendszert **Markov felbontás**nak hívjuk, ha

- $\bigcup_{i=0}^{K-1} R_i = \mathbb{T}^2$;
- ha $i \neq j$, $int\, R_i \cap int\, R_j = \emptyset$, azaz a téglalapok csak a határuknál metszhetnek át. Következésképp nullmértékű halmaztól eltekintve egyértelmű, $x \in \mathbb{T}^2$ melyik R_i-be tartozik.
- ha bármilyen i, j párra (akár $i = j$-re) $m(TR_i \cap R_j) \neq 0$, az átmetszés *helyes* és *összefüggő*.

Tehát $TR_i \cap R_j$ egy u-résztéglalap R_j-ben, és szintén a definícióból következik, hogy amennyiben $m(T^2R_i \cap TR_j \cap R_k) \neq 0$, a $T^2R_i \cap TR_j \cap R_k$ téglalap egy u-résztéglalap R_k-ban, $R_i \cap T^{-1}R_j \cap T^{-2}R_k$ pedig egy s-résztéglalap R_i-ben. A Markov tulajdonság azzal függ össze, hogy ezeknek a téglalapoknak a méreteit u-irányban R_k, s-irányban R_i határozza meg, a közbülső R_j-től függetlenül.

Jelölje u_i és s_i az R_i téglalap e^u, illetve e^s irányú kiterjedését, $i = 0, ..., (K-1)$, $\lambda < 1$ pedig a macska leképezés mátrixának e^u irányú (1-nél nagyobb) sajátértékét. Az egyszerűség kedvvért csak magát a macska leképezést vizsgáljuk, így az e^u és e^s irányok merőlegesek, és $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2$. Vezessük be az

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } m(TR_i \cap R_j) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } m(TR_i \cap R_j) = 0 \end{cases}$$

szomszédsági mátrixot. Így amennyiben $A_{ij} \neq 0$, $m(TR_i \cap R_j) = \frac{s_i u_j}{\lambda}$. Legyen továbbá

$$\pi_{ij} = \frac{m(TR_i \cap R_j)}{m(R_i)} = \begin{cases} \frac{u_j}{\lambda u_i} & \text{ha } A_{ij} = 1, \\ 0 & \text{ha } A_{ij} = 0. \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy π_{ij} sztochasztikus mátrix, melyhez

$$p_i = m(R_i) = u_i s_i$$

stacionárius vektor. Célunk kapcsolatot teremteni a macska leképezés és a $(\Sigma_A, \mathcal{F}, \mu_\pi, \sigma)$ (kétoldali) Markov shift között. Legyen $(..., i_{-1}, i_0, i_1, ...) = \underline{i} \in \Sigma_A$. Ahogy azt az előbb láttuk,

$$m(TR_{i_0} \cap R_{i_1}) = m(R_{i_0} \cap T^{-1}R_{i_1}) = \frac{s_{i_0}u_{i_1}}{\lambda} = p_{i_0}\pi_{i_0i_1},$$

és

$$m(T^2(R_{i_{-1}}) \cap TR_{i_0} \cap R_{i_1}) = \lambda^2 s_{i_{-1}}u_{i_1} = p_{i_{-1}}\pi_{i_{-1}i_0}\pi_{i_0i_1}.$$

Tetszőleges $m, n \in \mathbb{Z}$, $m < n$ esetén legyen

$$R_{m,n}(i_m, ..., i_n) = T^{-m}R_{i_m} \cap T^{-m-1}R_{i_{m+1}} \cap \cdots \cap T^{-n}R_{i_n}.$$

A helyes átmetszések miatt ennek a téglalapnak a mértéke is könnyen számolható:

$$m(R_{m,n}(i_m, ..., i_n)) = \frac{s_{i_m}u_{i_n}}{\lambda^{n-m}} = p_{i_m}\pi_{i_mi_{m+1}}...\pi_{i_{n-1}i_n}.$$

Definiáljuk a $\Phi : \Sigma_A \to \mathbb{T}^2$ leképezést a következőképpen:

$$\Phi(\underline{i}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_{-n,n}(i_{-n}, i_{-n+1}, ..., i_{n-1}, i_n).$$

Φ jól definiáltságához van szükség ($A_{ij} = 1$ esetén) az átmeszések összefüggőségére. Ez garantálja ugyanis, hogy $R_{-n,n}(i_{-n}, i_{-n+1}, ..., i_{n-1}, i_n)$ téglalapok mind összefüggőek, és n növekedtével méretük (s és u irányban egyaránt) (λ^{-1} rátával) exponenciálisan lecseng, így a $\Phi(\underline{i})$ metszet egyetlen pontból áll. Φ rendelkezik az alábbi fontos tulajdonságokkal:

- Φ izomorfizmust teremt a macska leképezés és a Markov shift között. Hiszen egyértelmű $\Phi(\underline{i})$ képként áll elő $\mathbb{T}^2$ m-majdnem minden pontja (kivételesek azok az $x \in \mathbb{T}^2$ pontok, amelyekre van $k \in \mathbb{Z}$ és $i \in \{0, ..., K-1\}$, hogy $T^kx \in \partial R_i$). Másrészt hengerhalmazokra éppen a fenti számolásokkal ellenőriztük, hogy $\Phi_*\mu_\pi = m$ és $\Phi \circ \sigma = T \circ \Phi$.

- Φ folytonos, sőt, Hölder folytonos leképezés. Következésképp, ha $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ Hölder folytonos, akkor $\Phi^*f : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ is az (itt $\Phi^*f(\underline{i}) = f(\Phi(\underline{i}))$).

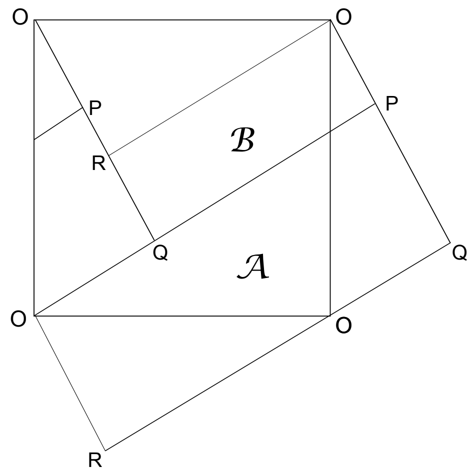
Ez utóbbi tulajdonság különösen fontos, hiszen a dinamikai rendszerek izomorfiája miatt

$$Corr(n, f, g) = Corr(n, \Phi^*f, \Phi^*g),$$

ahol $Corr$ mindkét esetben a megfelelő dinamikai rendszerre vett korrelációt jelenti. Tehát a Markov felbontás segítségével bizonyítható, hogy a **macska leképezésre is exponenciális a korreláció-lecsengés sebessége**.

Ez a tény mutatja a Markov felbontás igazi jelentőségét. A 7 fejezet végén említettük, hogy dinamikai rendszerek igen széles osztályára sikerült bizonyítani a Bernoulli shift-tel való izomorfiát. Általában azonban semmit sem tudhatunk az izomorfiát megvalósító leképezés simasági tulajdonságairól, így az alapján semmit sem mondhatnánk a korreláció-lecsengés sebességéről (vagy bármi más tulajdonságról, ami érzékeny a vizsgált függvények regularitására).

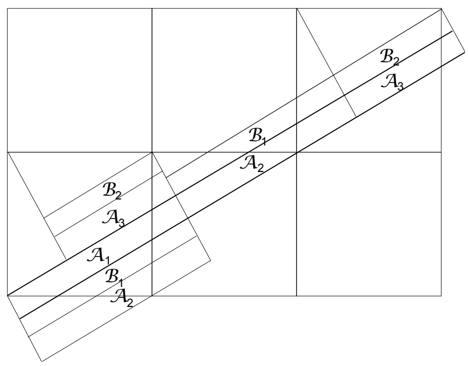
Végül vázoljuk a Markov felbontás konstrukcióját a macska leképezésre (3 ábra). Fontos szerepet játszik az ábrán O-val jelölt pont – az origó, mely a macska leképezés (egyetlen) fixpontja – és ennek a pontnak az $S(O)$ és $U(O)$ stabil, illetve instabil fonala. Mivel O fixpont, $S(O)$ és $U(O)$ ősképe önmaga. A konstrukcióhoz nem a teljes $S(O)$ és $U(O)$ fonalakat, hanem csak azok O-hoz közel eső összefüggő szakaszait érdemes tekintenünk. Az 4 fejezetben már láttuk $S(O)$ és $U(O)$ metszéspontjainak, az úgyenevezett *homoklinikus pontoknak* a speciális szerepét. Ezek közül tekintsünk hármat, amelyek az O ponthoz – a fonalak természetes irányítása szerint – közel helyezkednek el: a 3 ábrán P, Q, R-rel jelölt pontokat. Az O, P, Q, R pontok, mint csúcspontok, két téglalapot jelölnek ki – az ábrán $\mathcal{A}$-val és $\mathcal{B}$-vel jelölt téglalapokat – melyek $\mathbb{T}^2$ felbontását adják.



3. ábra. Markov felbontás a macska leképezésre, I

A felbontás Markov jellegéről meggyőződhetünk, ha megvizsgáljuk az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ téglalapok képeit. $\partial^s\mathcal{A}$-t és $\partial^s\mathcal{B}$-t együttesen $S(O)$-nak az O és Q között elhelyezkedő szakasza adja. Ennek a szakasznak a képe (az invariancia és a kontrakció miatt) $S(O)$-nak egy rövidebb szakasza. Tehát az téglalapok képeinek stabil oldalfalai úgy jelennek meg, mint az eredeti stabil oldalfalak részei. $\partial^u\mathcal{A}$-t és $\partial^u\mathcal{B}$-t együtesen $U(O)$-nak az R és O, valamint az O és P közti szakaszai adják, ezek $U(O)$-nak hosszabb szakaszaiba képeződnek. Tehát a téglalapok képei instabil oldalfalainak részei az eredeti instabil oldalfalak. Mindez önmagában már garantálja az átmetszések helyességét.

$\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ képét a 4 ábrán ábrázoltuk. $T\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ u irányban először keresztezi $\mathcal{A}$-t ($\mathcal{A}_1$), majd mégegyszer $\mathcal{A}$-t ($\mathcal{A}_2$), végül $\mathcal{B}$-t ($\mathcal{A}_3$). $T\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ először $\mathcal{A}$-t, majd $\mathcal{B}$-t keresztezi u-irányban ($\mathcal{B}_1$, illetve $\mathcal{B}_2$).



4. ábra. Markov felbontás a macska leképezésre, II

A kapott felbontás csak annyiban nem felel meg a követelményeknek, hogy az átmetszések nem összefüggőek (konkrétan $\mathcal{A}$ önmagát kétszer is átmetszi). Ezen azonban könnyű segíteni: $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ helyett az ezek képeinek átmetszéseként kialakuló $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ téglalapok fogják adni a Markov felbontást. Könnyen meggondolható, hogy a szomszédsági mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Végül néhány észrevétel a macska leképezés entrópiájáról. A Markov felbontás segítségével megmutatható, hogy a macska leképezés topologikusan konjugált az A_{ij} szomszédsági mátrixú topologikus Markov lánccal, ergodelméleti szempontból izomorf a π_{ij} átmenetmátrixú Markov shifttel. Az is látható, hogy π_{ij} éppen az A_{ij}-hez tartozó Parry mértéket definiálja, és a maximális sajátérték éppen λ. Tehát a macska leképezés topologikus entrópiája és Kolmogorov-Sinai entrópiája egyaránt $\log \lambda$.

10. Egyértelmű ergodicitás

Legyen $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszer, ekkor a Krylov-Bogoljubov tétel alapján tudjuk, hogy $\mathcal{M}_{\text{inv}} \neq \emptyset$.

Definíció: (Egyértelmű ergodicitás) A $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszer *Egyértelműen ergodikus* (uniquely ergodic), amennyiben $\mathcal{M}_{\text{inv}}$ egyelemű, azaz létezik egyetlen μ Borel valószínűségi mérték, hogy $\mathcal{M}_{\text{inv}} = \{\mu\}$.

Példa: A körvonal T_α forgatása egy irracionális α szöggel egyértelműen ergodikus. Ekkor ugyanis az $\{n\alpha\}$ pálya sűrű $\mathbb{S}^1$-n, így $\forall \gamma \in \mathbb{S}^1$ esetén létezik $n_j\alpha \to \gamma$ részsorozat, és amennyiben $\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}$, minden $f \in C(\mathbb{S}^1)$ folytonos függvényre

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f(T_{n_j\alpha}x)\, d\mu(x) \;\; \to \;\; \int f(T_\gamma x).$$

Azaz μ eltolásinvariáns mérték az $\mathbb{S}^1$ Abel-csoporton, ami csak a Haar-mérték lehet, tehát $\mu = Leb$, a Lebesgue mérték.

A Weyl tétel ([13] 3. fejezet) alapján is érdekes a következő lemma.

10.1. lemma: *Egy $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszerre a következők ekvivalensek.*

(i) Minden $f \in C(M)$ esetén létezik egy $c(f)$ konstans, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \right) = c(f)$ minden $x \in M$-re.

(ii) A fenti konvergencia minden $f \in C(M)$ esetén egyenletes.

(iii) $\exists \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}$, hogy az (i) konvergenciában fenti konvergenciákban $c(f) = \int f d\mu$.

(iv) T egyértelműen ergodikus.

Bizonyítás. $(ii) \Rightarrow (i)$ nyilvánvaló.

$(i) \Rightarrow (iii)$ bizonyításához tekintsük a $c(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \right)$ (x-től független) értéket, ez $C(M)$-n nyilván lineáris funkcionál, amely $|\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k x)| \leq \|f\|$ miatt (ahol $\|f\|$ az $f \in C(M)$ függvény szuprémum normája) korlátos is. Továbbá az azonosan 1 függvényre $c(1) = 1$, és $f(x) \geq 0$ esetén $c(f) \geq 0$, következésképp a Riesz reprezentációs tétel miatt $c(f) = \int f d\mu$ valamely μ Borel mértékre. $c(\hat{T} f) = c(f)$ is nyilván teljesül (emlékeztető: $(\hat{T} f)(x) = f(Tx)$), így $\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}$. (NB. $c(1) = 1$ szükséges ahhoz, hogy a mérték valószínűségi legyen).

$(iii) \Rightarrow (iv)$ igazolásához legyen $\nu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}$, és az $f \in C(M)$ esetén minden $x \in M$-re fennálló $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)\right) \to \int f d\mu$ limeszt a domináltt konvergencia tétel alapján ν szerint integrálhatjuk, amiből ν invarianciája miatt $\int f d\nu = \int f d\mu$, $\forall f \in C(M)$, azaz $\mu = \nu$ adódik.

Végül lássuk be, hogy $(iv) \Rightarrow (ii)$. Tegyük fel, hogy (ii) nem teljesül, azaz $\exists g \in C(M)$ és $\varepsilon > 0$, hogy egy alkalmas x_n részsorozat mentén

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x_n) - \int g d\mu \right| > \varepsilon$$

Tekintsük a $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x_n}$ Borel valószínűségi mértékek sorozatát: ennek a Krylov-Bogoljubov tételnél látott érvelés ([13] 8. fejezet) alapján van μ_{n_j} (gyenge-$*$ értelemben) konvergens részsorozata, ami egy $\mu_\infty \in \mathcal{M}_{\text{inv}}$ invariáns mértékhez tart. Ekkor viszont $|\int g d\mu_\infty - \int g d\mu| > \varepsilon$, vagyis $\mu \neq \mu_\infty$, tehát $\mathcal{M}_{\text{inv}}$-nek van két különböző eleme: T nem lehet egyértelműen ergodikus. $\square$.

Megjegyzés: Az alábbi feladatok mutatják, hogy önmagában abból, hogy minden $f \in C(M)$ esetén $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ egyenletesen konvergál, még nem következik az egyértelmű ergodicitás.

10.2. feladat: *Legyen $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $T(x, y) = (x + \alpha, y)$, ahol $\alpha \in \mathbb{S}^1$ irracionális. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C(\mathbb{T}^2)$ esetén az időátlagok egyenletesen konvergálnak, de általában nem konstans függvényhez.*

10.3. feladat: *Tegyük fel, hogy a $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszer topologikusan tranzitív (a definíciót lásd [13] 2. fejezet), és minden $f \in C(M)$ esetén az időátlagok egyenletesen konvergálnak. Mutassuk meg, hogy ekkor T egyértelműen ergodikus.*

10.4. feladat: *Legyen $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, és tekintsük a tórusz $T_{A_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ lineáris automorfizmusát (Figyelem, ez nem hiperbolikus eset, lásd [13] 6. fejezet). Mi lesz $\mathcal{M}_{\text{erg}}$ és $\mathcal{M}_{\text{inv}}$ T_{A_2}-re?*

11. Keverési tulajdonságok és hierarchiájuk

Ebben a fejezetben feltesszük, hogy $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmus (bár bizonyos fogalmakat, állításokat könnyen lehetne általánosítani a nem invertálható dinamikák esetére is). Már [13] 5. fejezetében láttuk, hogy

$$T \text{ ergodikus} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}A \cap B) = \mu(A)\mu(B), \ \forall A, B \in \mathcal{F};$$
$$T \text{ keverő} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B), \ \forall A, B \in \mathcal{F}.$$

Ekvivalens módon meg lehetne követelni ugyanezeket a tulajdonságokat (i) $A, B \in \mathcal{A}$ esetére, ahol $\mathcal{A}$ a teljes $\mathcal{F}$-t generáló halmazrendszer; (ii) A, B halmazok mértéke helyett $f, g \in L^2(\mu)$ függvények integráljára/L^2 skalárszorzatára; (iii) $f, g \in F$-re, ahol F tetszőleges $L^2(\mu)$-ben sűrű függvényosztály.

Definíció: Az $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmus *gyengén keverő*, ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\mu(T^{-k}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)\right| = 0, \ \forall A, B \in \mathcal{F}.$$

Megjegyzések: 1. A definíció most is ekvivalens módon átfogalmazható a fenti (i)-(ii)-(iii)-nek megfelelően. 2. Nyilván: T (erősen) kever $\Rightarrow$ T gyengén kever $\Rightarrow$ T ergodikus.

Definíció: Egy $J \subset \mathbb{Z}^+$ halmazra legyen $\alpha_J(n) = \sharp(J \cap \{1, , ..., n\})$, ahol $\sharp$ a számosságot jelöli. J *nullsűrűségű*, ha $\frac{1}{n}\alpha_J(n) \to 0$, amint $n \to \infty$.

11.1. szublemma: *Legyen a_n korlátos számsorozat. A következők ekvivalensek:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = 0;$

(ii) $\exists J \subset \mathbb{Z}^+$ *nullsűrűségű, hogy* $\lim_{J \not\ni n \to\infty} a_n = 0.$

11.2. feladat: *Bizonyítsuk be a 11.1. szublemma (ii) $\Rightarrow$ (i) állítását (itt fontos feltétel a korlátosság).*

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* bizonyításához tekintsük minden $m \in \mathbb{Z}^+$ számra a $J_m = \{n \in \mathbb{Z}^+ | |a_n| \geq 1/m\}$ indexhalmazokat. Egyrészt $J_1 \subset J_2 \subset ...$, másrészt (i) miatt minden J_m nullsűrűségű, hiszen

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \geq \frac{1}{n} \frac{1}{m} \alpha_{J_m}(n).$$

Következésképp léteznek $0 = l_0 < l_1 < l_2 < ...$ indexek, hogy $n \geq l_m$ esetén $\frac{1}{n}\alpha_{J_{m+1}}(n) < \frac{1}{m+1}$. Legyen

$$J = \bigcup_{m=0}^{\infty} \left[J_{m+1} \cap [l_m, l_{m+1})\right].$$

$l_m \leq n < l_{m+1}$ esetén:

$$J \cap [0,n) = (J \cap [0,l_m)) \cup (J \cap [l_m,n)) \subset (J_m \cap [0,l_m)) \cap (J_{m+1} \cap [l_m,n)),$$

így

$$\frac{1}{n}\alpha_J(n) \leq \frac{1}{n}(\alpha_{J_m}(l_m) + \alpha_{J_{m+1}}(n)) \leq \frac{1}{n}(\alpha_{J_m}(n) + \alpha_{J_{m+1}}(n)) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1},$$

tehát $\frac{1}{n}\alpha_J(n) \to 0$, azaz J nullsűrűségű. Másrészt $n > l_m$, $n \notin J$ esetén $n \notin J_{m+1}$, és így $|a_n| \leq \frac{1}{m}$, tehát $\lim\limits_{J \not\ni n \to \infty} a_n = 0$. $\square$.

11.3. következmény: *Egy a_n korlátos sorozatra*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = 0.$$

Megjegyzés: A fentieknek megfelelően egy $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmus gyengén kever, ha $\forall A, B \in \mathcal{F}$ esetén $\exists J(A,B) \subset \mathbb{Z}^+$ nullsűrűségű, hogy

$$\lim_{J(A,B) \not\ni n \to \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Definíció: Az $(M, \mathcal{F}, \mu)$ valószínűségi mező *megszámlálható bázisú*, ha létezik mérhető halmazok $B_1, B_2, ...$ sorozata, hogy $\forall A \in \mathcal{F}$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\exists j \in \mathbb{Z}^+$, melyre $\mu(B_j \Delta A) < \varepsilon$.

Megjegyzések: 1. $(M, \mathcal{F}, \mu)$ megszámlálható bázisú $\iff$ Az $L^2(\mu)$ Hilbert tér szeparábilis. 2. Amennyiben M teljes szeparábilis metrikus tér, μ Borel mérték, $\mathcal{F}$ pedig a Borel-féle σ-algebra (vagy az a σ-algebra, amit a Borel-féléből μ-re nézve teljessé tétellel kapunk), akkor $(M, \mathcal{F}, \mu)$ megszámlálható bázisú.

11.4. szublemma: *Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu)$ megszámlálható bázisú. Az $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmus akkor és csak akkor gyengén keverő, ha $\exists\ J \subset \mathbb{Z}^+$ nullsűrűségű, hogy $\lim\limits_{J \not\ni n \to \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$, minden $A, B \in \mathcal{F}$-re.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T gyengén kever, és legyen $B_1, B_2, ...$ a valószínűségi mező megszámlálható bázisa, és

$$a_n = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{|\mu(T^{-n}B_i \cap B_j) - \mu(B_i)\mu(B_j)|}{2^{i+j}}.$$

A gyenge keverés miatt $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \to 0$, következésképp $\exists J \subset \mathbb{Z}^+$ nullsűrűségű, hogy $\lim_{J \not\ni n \to \infty} a_n = 0$, és így $\forall i, j$-re $\lim_{J \not\ni n \to \infty} \mu(T^{-n}B_i \cap B_j) = \mu(B_i)\mu(B_j)$, ahonnan approximációval a konvergencia tetszőleges $A, B \in \mathcal{F}$-re kiterjed. $\square$.

11.5. feladat: *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmusra ekvivalensek a következő tulajdonságok: (i) T gyengén kever, (ii) $T \times T$ ergodikus, (iii) $T \times T$ gyengén kever. (Útmutatás: (ii)$\to$(i) bizonyításához használjuk a 11.3. következményt, és tekintsük az $A \times M$ illetve $A \times A$ alakú halmazokat $M \times M$-ben.)*

Definíció: Az $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmus *Kolmogorov keverő* (vagy K-keverő) ha $\exists \mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra, melyre (i) $T^{-1}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$; (ii) $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n\mathcal{K} = \mathcal{F}$, (iii) $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathcal{K} = \mathcal{N} = \{M, \emptyset\}$.

A fogalom motivációja a független valószínűségi változókra vonatkozó Kolmogorov-féle $0-1$ törvény. Legyen $\{X_i, i \in \mathbb{Z}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, és jelölje minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $\mathcal{F}_k = \sigma(..., X_{k-1}, X_k)$, a legszűkebb σ algebrát, melyre az X_i, $-\infty < i \le k$ valószínűségi változók mindegyike mérhető. Ekkor (i) $\mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_k$, (ii) az $\mathcal{F} = \bigvee_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$ σ-algebrára nézve minden, a valószínűségi változó sorozatra vonatkozó esemény mérhető, (iii) a $\mathcal{T} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{-k}$ farok-σ-algebra triviális (épp ezt mondja a Kolmogorov-féle $0-1$ törvény).

11.6. lemma: *Minden Bernoulli automorfizmus Kolmogorov keverő.*

Bizonyítás. Legyen a Bernoulli shift állapottere $\Sigma = {M_0}^{\mathbb{Z}}$, ahol $(M_0, \mathcal{G}_0)$, és $\mathcal{G}_0$ az M_0 véges halmaz minden részhalmazát tartalmazó σ-algebra. Minden $G_0 \in \mathcal{G}_0$ halmazhoz legyen $G = \{(..., x_{-1}, x_0, x_1...) = \underline{x} \in \Sigma | x_0 \in G_0\}$, és $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ az ilyen G halmazokból álló σ-algebra (a 0 idejű σ algebra). Legyen továbbá $\mathcal{K} = \bigvee_{i=-\infty}^{0} \sigma^i\mathcal{G}$ (a múlt σ-algebrája). Az (i) és (ii) tulajdonságok nyilvánvalóak. (iii)-hoz legyen $A \in \mathcal{T} = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathcal{K}$: ekkor minden $j \in \mathbb{Z}$ és $B \in \bigvee_{k=j}^{\infty} T^k\mathcal{G}$ halmazra $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Mivel j tetszőleges, így $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ minden $B \in \mathcal{F}$, és így $B = A$ esetén fennáll, tehát $\mu(A)(1 - \mu(A)) = 0$, azaz $\mathcal{T}$ triviális. $\square$.

Megjegyzés: Spektrális módszerekkel (lásd a 12 fejezetet) bizonyítható, hogy minden Kolmogorov keverő automorfizmus erősen kever. A keverési tulajdonságok hierarchiája tehát a következő:
Bernoulli tulajdonság $\Rightarrow$ Kolmogorov keverés $\Rightarrow$ erős keverés $\Rightarrow$ gyenge keverés $\Rightarrow$ ergodicitás.

Nem részletezzük most, de valamennyi tartalmazás valódi, azaz vannak példák Kolmogorov keverő de nem Bernoulli, erősen keverő de nem Kolmogorov keverő, gyengén keverő de nem erősen keverő automorfizmusokra is.

12. Az U_T operátor L^2 spektruma

Ebben a fejezetben invertálható dinamikákkal foglalkozunk, azaz $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmus. Már [13]-ben (pl. a 2. fejezetben) tanulmányoztuk a $\hat{T}$: $L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, $(\hat{T}f)(x) = f(Tx)$ operátort: ez az L^2 tér lineáris izometriája, tehát mindenképp korlátos és injektív. T invertálhatósága az operátor szürjektivitását biztosítja (ekkor minden mérhető halmaz indikátorfüggvénye megjelenik a képtérben). Tehát ilyenkor $\hat{T}$ unitér operátor (a komplex L^2 teret tekintjük). Ennek hangsúlyozására $\hat{T}$ helyett inkább az U_T jelölést fogjuk használni.

Az U_T operátornak van még egy fontos tulajdonsága: a *multiplikativitás*, azaz minden f és g korlátos függvényre $U_T(f \cdot g) = U_T(f) \cdot U_T(g)$. Mindennek fontos következményei vannak U_T spektrumára vonatkozóan.

12.1. feladat: *Bizonyítsuk be a következő állításokat.*

- *U_T spektruma az $\mathbb{S}^1$ komplex egységkörön helyezkedik el, továbbá U_T különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvényei ortogonálisak.*
- *Az 1 mindenképp sajátértéke U_T-nek, és T akkor és csak akkor ergodikus, ha az 1 egyszeres sajátérték. A továbbiakban az ergodikus esetet vizsgáljuk.*
- *Ergodikus esetben U_T minden sajátértéke egyszeres, továbbá minden sajátfüggvény abszolút értéke μ-m.m. konstans.*
- *Ergodikus esetben U_T sajátértékeinek halmaza az egységkörnek, mint Abel-csoportnak részcsoportja. Azaz ha λ, μ sajátértékek, akkor $\overline{\lambda}$ (komplex konjugált) és $\lambda \cdot \mu$ is sajátértékek.*

A következő lemma lehetőséget teremt arra, hogy a különféle ergodikus tulajdonságokat U_T spektrumának vizsgálatával ellenőrizzük.

12.2. lemma: *Legyen $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmus. Vezessük be az $L^2_0(\mu) = \{f \in L^2(\mu) | (1, f)_\mu (= \int f \, d\mu) = 0\}$ jelölést.*

(i) T akkor és csak akkor (erősen) keverő, ha $\forall f \in L^2_0$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} (U_T^n f, f)_\mu = 0.$$

(ii) T akkor és csak akkor gyengén keverő, ha $\forall f \in L^2_0$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |(U_T^k f, f)_\mu|^2 = 0.$$

(iii) T akkor és csak akkor ergodikus, ha $\forall f \in L^2_0$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (U^k_T f, f)_\mu = 0.$$

Bizonyítás. Csak (i) bizonyítását részletezzük, a másik két állítás hasonlóan látható be. Definíció szerint a keverés azt jelenti, hogy $\forall f, g \in L^2(\mu)$ párra $\lim_{n\to\infty}(U^n_T f, g)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,g)_\mu$. Másrészt $\forall f \in L^2_0$ függvényre $\lim_{n\to\infty}(U^n_T f, f)_\mu = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall f \in L^2$ függvényre $\lim_{n\to\infty}(U^n_T f, f)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,f)_\mu$, ($f \in L^2(\mu)$ függvényhez legyen $f_0 = f - E_\mu(f)$, ahol $E_\mu f = \int f \, d\mu = (1,f)_\mu$). Elegendő tehát belátni: abból, hogy $\forall f \in L^2$ függvényre $\lim_{n\to\infty}(U^n_T f, f)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,f)_\mu$, következik, hogy $\forall f, g \in L^2(\mu)$ párra $\lim_{n\to\infty}(U^n_T f, g)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,g)_\mu$. Ehhez rögzítsük $f \in L^2(\mu)$-t és vezessünk be két zárt, U_T-re invariáns alteret $L^2(\mu)$-ben:

$$E_f = \{g \in L^2(\mu) | \lim_{n\to\infty}(U^n_T f, g)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,g)_\mu\},$$

F_f pedig legyen a legkisebb olyan zárt, U_T-re invariáns altér $L^2(\mu)$-ben, amely f-t és a konstans függvényeket tartalmazza. Nyilván $F_f \subset E_f$, másrészt ha $g \in F_f^\perp$, $(1,g)_\mu = 0$ és $(U^n_T f, g)_\mu = 0$ minden n-re. Tehát $F_f \subset E_f$ is teljesül, így $E_f = L^2(\mu)$. $\square$.

Definíció: Az $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmus *folytonos spektrumú*, ha az egyszeres 1-en kívül nincs más sajátértéke. Ilyenkor T nyilván ergodikus.

12.3. propozíció: *T akkor és csak akkor folytonos spektrumú, ha gyengén keverő.*

A bizonyítás előtt emlékeztetünk a funkcionálanalízis egyik alapvető eredményére, a spektráltételre, unitér operátorok esetén. $\mathbb{S}^1$-re most úgy gondolunk, mint a komplex egységkörre, elemeit egységnyi abszolút értékű komplex számoknak tekintjük.

12.4. tétel: (Spektráltétel unitér operátorokra) *Legyen $U : H \to H$ unitér operátor egy szeparábilis Hilbert téren. Ekkor minden $v \in H$ vektorhoz tartozik egy μ_v Borel mérték $\mathbb{S}^1$-en, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}$-re: $(U^n v, v)_\mu = \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^n d\mu_v(\lambda)$. Ha v U sajátvektora valamely $\lambda_0 \in \mathbb{S}^1$ sajátértékhez, akkor $\mu_v = \delta_{\lambda_0}$. Ugyanakkor, ha v U valamennyi sajátvektorára merőleges, akkor μ_v-nek nincs atomja (azaz folytonos mérték, egyetlen pontnak sem ad pozitív súlyt).*

A 12.3. propozíció bizonyítása. Először induljunk ki abból, hogy T gyengén keverő, azaz minden $f \in L_0^2$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |(U_T^k f, f)_\mu| = 0$. Ha nem lenne folytonos a spektrum, létezne $\lambda \in \mathbb{S}^1$ sajátérték és hozzá $f \in L_0^2$ sajátvektor, melyre $(U_T^k f, f)_\mu = (\lambda^k f, f)_\mu$, melynek abszolút értéke k-tól függetlenül $||f||_\mu$, tehát ellentmondásra jutottunk.

A megfordítás bizonyításához lesz szükségünk a spektráltételre: be kell látnunk, hogy folytonos spektrum esetén bármely $f \in L_0^2(\mu)$ függvényre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |(U_T^k f, f)_\mu|^2 = 0$. Mivel a spektrum folytonos, $f \in L_0^2$ esetén a μ_f mérték folytonos, és

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |(U_T^k f, f)_\mu|^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^k d\mu_f(\lambda) \right|^2 = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\mathbb{S}^1} \lambda^k d\mu_f(\lambda) \cdot \int_{\mathbb{S}^1} \tau^{-k} d\mu_f(\tau) \right) = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} (\lambda\overline{\tau})^k d(\mu_f \times \mu_f)(\lambda,\tau) \right) = \\
&= \int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda\overline{\tau})^k \right) d(\mu_f \times \mu_f)(\lambda,\tau),
\end{aligned}$$

ahol az utolsó integrálban az integrandus korlátos függvény, és hacsak $\lambda = \tau$, átalakítható $\frac{1}{n}\left(\frac{1-(\lambda\overline{\tau})^n}{1-\lambda\overline{\tau}}\right)$ alakban, ami $n \to \infty$ esetén 0-hoz tart. Ugyanakkor, mivel μ_f atommentes, a $\lambda = \tau$ halmaz $\mu_f \times \mu_f$ szerint nullmértékű, és az integrál a dominált konvergencia tétel alapján nullához tart. $\square$.

Vázlatosan ismeretünk néhány további érdekes eredményt, részletesebb tárgyalás található pl. a [12], [15] és [10] monográfiákban.

12.5. lemma: *Amennyiben U_T spektruma $L_0^2(\mu)$-n abszolút folytonos, T erősen kever.*

Bizonyítás vázlata. Ekkor ugyanis tetszőleges $f \in L_0^2$ esetén a spektráltétel alapján

$$(U_T^n f, f)_\mu = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} g(\theta) d\theta,$$

ahol $\int_0^{2\pi} |g(\theta)| d\theta < \infty$, vagyis $(U_T^n f, f)_\mu$ egy $g \in L^1(0, 2\pi)$ függvény n-dik Fourier együtthatójaként áll elő, és így $n \to \infty$ esetén nullához tart. $\square$.

Definíció: Az $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ automorfizmus *megszámlálható Lebesgue spektrumú*, ha létezik olyan $f_1, f_2, ... \in L_0^2(\mu)$ függvénysorozat, melyre $\{U_T^k f_j | k \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, ...\}$ ortonormált bázis $L_0^2(\mu)$-ben.

Megjegyzések: 1. Megszámlálható Lebesgue spektrum esetén U_T spektruma $L_0^2(\mu)$-n abszolút folytonos. Ugyanis ekkor L_0^2 előáll, mint megszámlálható sok U_T-re invariáns altér, és ezek mindegyikén U_T úgy hat, mint a baleltolás az $l^2(-\infty, \infty)$ téren, ami abszolút folytonos spektrumú (lásd [12], VII. fejezet). Így minden megszámlálható Lebesgue spektrumú rendszer erősen kever (ez közvetlenül is belátható).

2. Minden Bernoulli automorfizmus megszámlálható Lebesgue spektrumú. Ezt könnyen láthatjuk az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Bernoulli shift példáján. Definiálja a t_k függvényeket ($k \in \mathbb{Z}$) $(..., x_{-1}, x_0, x_1...) = \underline{x} \in \Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ -ra $t_k(\underline{x}) = (-1)^{x_k}$, ekkor a t_k függvényekből képzett véges szorzatok L_0^2 egy ortonormált bázisát adják. A bázis g, h elemeit ekvivalensnek tekintjük, ha $\exists n \in \mathbb{Z}$, hogy $U_T^n g = h$: így megszámlálható sok ekvivalencia osztályt kapunk.

3. Bizonyítható az is, hogy minden Kolmogorov keverő automorfizmus megszámlálható Lebesgue spektrumú ([15], [10]).

Definíció: Az $(M_1, \mathcal{F}_1, T_1, \mu_1)$ és $(M_2, \mathcal{F}_2, T_2, \mu_2)$ automorfizmusok *spektrálisan izomorfak*, ha van olyan invertálható $W : L^2(\mu_1) \to L^2(\mu_2)$ izometria , melyre $WU_{T_1} = U_{T_2}W$.

Megjegyzések: 1. Ergodelméleti értelemben izomorf rendszerek spektrálisan is izomorfak, ennek megfordítása azonban távolról sem igaz. A fenti tárgyalás alapján például bármely két Bernoulli automorfizmus (sőt, Kolmogorov keverő automorfizmus)megszámlálható Lebesgue spektrumú, és így spektrálisan izomorf. Különböző entrópiájú Benoulli automorfizmusok viszont nem izomorfak.

2. Megmutatható ([15], 2.1 fejezet), hogy a spektrális izomorfia akkor származik tényleges izomorfiából, ha (i) W korlátos függvényeket korlátos függvényekbe visz, és (ii) minden $f, g \in L^2(\mu_1)$ korlátos függvényre $(Wf)(Wg) = fg$ (multiplikativitás!)

3. Bizonyos értelemben a megszámlálható Lebesgue spektrum ellenpólusát adják a *diszkrét spektrumú automorfizmusok*, amikor U_T sajátfüggvényei kifeszítik a teljes $L^2(\mu)$ teret ([15], 3. fejezet). Ilyenek a körvonal (irracionális) forgatásai. Ergodikus, diszkrét spektrumú automorfizmusok esetén a spektrális izomorfia egyben ergodelméleti izomorfiát is jelent.

13. A Ruelle-Perron-Frobenius operátor

Az előző fejezetben láthattuk, hogy az U_T operátor spektruma minden Bernoulli automorfizmusra ugyanolyan. A 9 fejezetben pedig arra utaltunk, hogy bizonyos, az alkalmazások szempontjából fontos kérdések (pl. korreláció-lecsengés sebessége) vizsgálatánál nem csupán az (izomorfia erejéig meghatározott) ergodikus tulajdonságok, hanem a vizsgált függvények simasági tulajdonságai is szerepet játszanak. Ráadásul sok esetben nem eleve adott az invariáns mérték, és külön feladat megkeresni a természetes (pl. egy referencia mértékre nézve abszolút folytonos) invariáns mértéket, valamint ennek unicitását és jó keverési tulajdonságait igazolni. Célunk, hogy ezeket a kérdéseket is egy alkalmas operátor spektrumának vizsgálatára vezessük vissza.

A vizsgált dinamikai rendszerektől mostantól nem követeljük meg az invertálhatóságot (sőt, jellemzően a példáink *nem* invertálhatóak). Feltételezzük viszont, hogy az M fázistér kompakt, sima Riemann sokaság. Ekkor a természetes referenciamérték a Lebesgue mérték, ezt m-mel fogjuk jelölni. Következésképp az L^p tereket $(1 \leq p \leq \infty)$ is tekinthetjük a Lebesgue mértékre nézve.

[13] 8. és 9. fejezetében már vizsgáltunk $\hat{T}$ mellett más operátorokat is: ha $\hat{T}$-t $C(M)$-n, a folytonos függvények terén tekintjük, adjungáltja, $\hat{T}_*$, a Borel valószínűségi mértékeken hat: $(\hat{T}_*\mu)(f) = \mu(\hat{T}f)$.

Definíció: Legyen M kompakt Riemann sokaság. A $T : M \to M$ leképezés a Lebesgue mértékre nézve *nem szinguláris*, ha minden mérhető halmazra $m(A) = 0$-ből következik, hogy $m(T^{-1}A) = 0$. Legyen $\mu \ll m$ (a Lebesgue métékre nézve abszolút folytonos) mérték, jelölje sűrűségfüggvényét $L^1 \ni f(x) = \frac{d\mu}{dm}$. Ekkor T nem szinguláris voltából következik, hogy $\hat{T}_*\mu \ll m$ is teljesül. Következésképp létezik $\frac{d\hat{T}_*\mu}{dm} = \tilde{f}(x) \in L^1$ sűrűségfüggvény. *A T leképezés $P_T : L^1 \to L^1$ Perron-Frobenius operátorát $P_T f = \tilde{f}$ definiálja.*

Az egyszerűség kedvéért (a jegyzet hátralevő fejezeteiben szinte végig) egy további speciális esetre szorítkozunk:

Definíció: A $T : [0,1] \to [0,1]$ *szakaszonként monoton*, amennyiben létezik egy véges $0 = a_0 < a_1 < ... < a_q = 1$ partíció, hogy minden $i = 1, ..., q$ esetén

- $T|_{(a_{i-1},a_i)}$ C^2, és C^2 módon kiterjeszthető a zárt $[a_{i-1}, a_i]$ intervallumra is,
- $|T'(x)| > 0$ minden $x \in (a_{i-1}, a_i)$ pontra.

Ha még azt is feltesszük, hogy van egy olyan $\lambda > 1$ szám, hogy $|T'(x)| \geq \lambda$

minden x-re, ahol a derivált értelmezhető, akkor azt mondjuk, a T leképezés *szakaszonként tágító.*

Ahogy arra már [13] 1. és 9. fejezeteiben utaltunk: közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy szakaszonként monoton leképezés nem sziguláris, és a Perron-Frobenius operátor hatását

$$(P\rho)(y) = \sum_{x:Tx=y} \frac{\rho(x)}{|T'(x)|}$$

adja meg. Az összegzés a rögzített y pont (legfeljebb) q darab ősképére vonatkozik.

Megjegyzés: A vizsgált leképezések köre (kellő körültekintéssel) messzemenően általánosítható, például vehetnénk véges helyett megszámlálhatóan végtelen partíciót, illetve C^2 helyett csak $C^{1+\varepsilon}$ simaságot. Ennél fontosabb, hogy M lehet $[0,1]$ helyett más kompakt Riemann sokaság egy alkalmas partícióval, melynek minden elemére megszorítva T-t, diffeomrofizmusokat kapunk. Ekkor $|T'(x)|$ szerepét a $JT(x)$ Jacobi determináns veszi át.

A fentiek alapján egy m-re abszolút folytonos mérték pontosan akkor invariáns, ha sűrűségfüggvénye a P operátor fixpontja. [13] 9. fejezetében épp azt láttuk, hogy amennyiben T tágító Markov leképezés, P-nek van fixpontja, amely ráadásul (a pozitív, Hölder folytonos függvények körében) egyértelmű, és a megfelelő invariáns mérték ergodikus. Ezt az eredményt a következő fejezetben kiterjesztjük intervallum-leképezések egy nagyobb osztályára (lényegében: a Markov tulajdonság nem feltétlen szükséges). Most azonban „állatorvosi lovakon” fogjuk vizsgálni a Ruelle-Perron-Frobenius operátort, konkrétan *bináris leképezés*re és további $T : [0,1] \to [0,1]$ *szakaszonként lineáris és (erős értelemben) Markov leképezés*ekre. Ez alatt azt értjük, hogy az $I_j = (a_{j-1}, a_j)$ intervallumok mindegyikére megszorítva $T_j := T|_{I_j}$; $T_j x = \frac{x-a_{j-1}}{a_j-a_{j-1}}$, azaz T_j *lineáris* bijekció I_j és $(0,1)$ között ($j = 1, 2, \dots q$).

13.1. feladat: *Legyen* $T : [0,1] \to [0,1]$ *szakaszonként lineáris, (erős értelemben) Markov leképezés.*

(a) Mutassuk meg, hogy a Lebesgue mérték invariáns és ergodikus T-re.

(b) Lebesgue majdnem minden $x \in (0,1)$ esetén értelmezhető minden $n \geq 1$-re $|(T^n)'(x)|$, a leképezés n-dik iteráltjának deriváltja. Mutassuk meg, hogy majdnem minden $x \in (0,1)$-re $|(T^n)'(x)|$ exponenciális ütemben nő, és a növekedés rátája, λ is ugyanaz az (explicit kiszámolható) érték majdnem

mindenütt. (Megj.: ez a 3 fejezetben tárgyalt Ljapunov exponens intervallum-leképezésre. Definíció szerint egy a_n sorozat exponenciális ütemben nő λ rátával, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lambda$).

A P operátor vizsgálatával nem csupán az abszolút folytonos invariáns mérték létezését és egyértelműségét, hanem további információt is nyerhetünk, például a keverés gyorsaságára vonatkozóan. A fent vizsgált leképezésre például az m Lebesgue mérték invariáns. Legyenek $f, g \in L_0^2(m)$ (azaz $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 g(x)dx = 0$), ekkor, mivel

$$Corr(n, f, g) = \int\limits_0^1 f(T^n x)g(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)(P^n g)(x)dx = (f, P^n g)_m$$

és így

$$|\,Corr(n, f, g)| \leq ||f|| \cdot ||P^n g||$$

ahol itt $||.||$ az L^2 normát jelenti. De ha az f, g függvényeket valamilyen szűkebb függvényosztályból választjuk, más normát is használhatunk a becslésre.

Vizsgáljuk konkrétan a bináris leképezés esetét. Ekkor

$$Pf(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

13.2. feladat: *Tekintsük a bináris leképezést. Hogyan hat a P operátor a $\sin(2k\pi x)$ trigonometrikus függvényeken, konkrétan a $\{\sin(2^i\pi x)|i = 1, \ldots, m\}$ függvények által generált lineáris téren? Ezek alapján konstruáljunk olyan 0 várható értékű $f \in L^2([0,1], m)$ függvényt (m a Lebesgue mérték), amelyre $Corr(n, f, f)$, az (auto)korreláció-lecsengés sebessége tetszőlegesen lassú.*

13.3. feladat: (Tóth Imre Pétertől) *Vegyük ismét a bináris leképezést, legyen $K \in \mathbb{Z}^+$ rögzített, és tekintsük az $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{K} q_i x^i$ legfeljebb K ad fokú polinomok E_K alterét. Mutassuk meg, E_K P-re invariáns, és P-nek ezen a $K+1$ dimenziós invariáns altéren $K+1$ különböző sajátértéke van. Konkrétan a sajátértékek: $1, 1/2, 1/4, ...1/2^K$, ahol az $1/2^i$ sajátértékhez egy i-ad fokú polinom sajátfüggvény tartozik.*

A polinomok körében tehát a bináris leképezésre exponenciálisan csengenek le a korrelációk. Ez a két feladat is mutatja, alapvető kérdés, hogy P-t milyen függvénytéren tekintjük.

13.4. feladat: (Tóth Imre Pétertől) *Térjünk most vissza általában a szakaszonként lineáris, (erős értelemben) Markov leképezésekre.*

1. *Mutassuk meg, hogy a legfeljebb K-ad fokú polinomok E_K altere ilyenkor is invariáns, és a spektrum itt is explicit számolható. Írjuk fel a sajátértékeket csökkenő sorrendben: $1, \beta_1, \ldots, \beta_K$. $1 - \beta_1$ éppen az exponenciális korreláció-lecsengés rátáját adja meg polinomok esetére.*

2. *Mutassuk meg, hogy $\beta_1 \geq e^{-\lambda}$, ahol λ a 13.1. feladatban kiszámolt Ljapunov exponens.*

3. *Mutassunk tetszőleges $M > 0$-hoz olyan szakaszonként lineáris leképezést, aminek a Ljapunov exponense M-nél nagyobb, de $(1 - M^{-1})^n$-nél lassabb ütemű a korreláció-lecsengése az E_K altéren (minden $K \geq 1$-re).*

14. Szakaszonként tágító intervallum-leképezések

A szakaszonként tágító intervallum-leképezések fogalmát az előző fejezetben definiáltuk. Talán ez az a dinamikai rendszer-család, amelynek ergodikus és statisztikus tulajdonságait a legjobban feldolgozta a szakirodalom. Alapvető Lasota és Yorke eredménye ([8]) az abszolút folytonos invariáns mérték létezéséről. Ráadásul a topologikus keverés természetes feltétele mellett ez a mérték egyértelmű, és erős statisztikus tulajdonságokkal rendelkezik. Ennek a fejezetnek az a célja, hogy ezeket a fontos eredményeket ismertesse, különös tekintettel a módszerekre, amelyeket azóta folyamatosan továbbfejlesztenek és alkalmaznak bonyolultabb kaotikus dinamikákra is. Tárgyalásunk elsősorban a [3] könyvre és a [9] dolgozatra épít.

Először néhány fogalmat és tényt kell felelevenítenünk a valós analízis, illetve a funkcionálanalízis tárgyköréből.

Korlátos változású függvények. Jelölje $\mathcal{T}$ a $[0,1]$ intervallum $\tau = \{(x_0, x_1..., x_p)|0 = x_0 < x_1 < ... < x_p = 1\}$ véges felosztásainak összességét. Azt mondjuk, az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény *korlátos változású*, ha a

$$V(f) = V_{[0,1]}(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^{p} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

úgynevezett *teljes megváltozása* véges. Hasonlóan értelmezhető a fogalom más $[a,b]$ intervallumokra is (az intervallumra vonatkozó indexet csak akkor írjuk ki, ha nem egyértelmű). A következő tények könnyen ellenőrizhetőek, illetve megtalálhatóak a szakirodalomban (pl. [3], [14]):

- Korlátos változású függvény korlátos, és így integrálható,
- Legyen f és g korlátos változású, $A = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, $B = \sup\{|g(x)| : x \in [0,1]\}$, és $\lambda \in \mathbb{R}$, ekkor $V(\lambda f) = |\lambda| V(f)$, $V(f+g) \leq V(f) + V(g)$, $V(fg) \leq AV(g) + BV(f)$.
- Bármely $a < b < c$-re $V_{[a,c]}(f) = V_{[a,b]}(f) + V_{[b,c]}(f)$.
- Ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor korlátos változású, és $V(f) = \int_0^1 |f'(x)| dx$. A Hölder folytonosság azonban nem elegendő a korlátos változáshoz (gondoljunk a Brown mozgás trajektóriáira.)
- Tetszőleges korlátos változású függvény előállítható, mint két monoton növekvő függvény különbsége. Következésképp korlátos változású függvény

ugrásai elsőfajúak. Továbbá minden korlátos változású függvény előállítható egy folytonos és egy tisztán ugró függvény összegeként.

Különösen fontos lesz számunkra a következő eset: ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan diifferenciálható, azaz létezik $0 = a_0 < a_1 < ... < a_q = 1$, hogy f folytonosan differeciálható módon kiterjeszthető minden $[a_{i-1}, a_i]$ intervallumra ($i = 1, ..., q$), akkor

$$V(f) = \sum_{i=1}^{q} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f'(x)|dx \; + \; \sum_{i=0}^{q} \Delta_i; \qquad \Delta_i = |f(a_i+) - f(a_i-)|,$$

vagyis a teljes megváltozás előáll, mint a derivált L^1 normájának és a függvény ugrásainak összege.

A korlátos változású függvények Banach teret alkotnak a

$$||f||_{BV} = |f|_1 + V(f); \qquad |f|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

normával. Pontosabban, a tér elemei szokásos módon nem függvények, hanem függvények ekvivalencia-osztályai (Lebesgue teljes mértékű halmazon megegyező függvényeket ekvivalensnek tekintünk): $f \in BV$, ha van korlátos változású realizációja (és $V(f)$ alatt a teljes megváltozások infimumát kell érteni f realizációira).

Persze ha $f \in BV$, akkor $f \in L^1$, és BV sűrű halmaz L^1-ben (hiszen már $C^1(\subset BV)$ is sűrű L^1-ben). A következő fontos lemma az Arzela-Ascoli tétel rokona.

14.1. lemma: *BV egységgömbje, azaz $BV_1 = \{f \in BV : ||f||_{BV} \leq 1\}$, mint L^1 részhalmaza, kompakt.*

Bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy BV_1 teljesen korlátos L^1-ben, azaz minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik véges ε-háló. Rögzített ε-hoz legyen $K > 1/\varepsilon$, és $i = 1, ..., K$-ra legyen $\chi_i(x)$ az $I_i = [\frac{i-1}{K}, \frac{i}{K}]$ intervallum indikátorfüggvénye. Jelölje $\mathcal{F}_K$ az ezen intervallumok által generált véges σ algebrát, és $\Pi_K : BV \to BV$ az $\mathcal{F}_K$-ra vett feltételes várható érték képzés operátorát. Azaz $f \in BV$-re $\Pi_K f = E(f|\mathcal{F}_K)$ minden I_i intervallumon konstans, éppen az $f(x)$ függvény $\overline{f}_{I_i}$ átlaga ezen az intervallumon. Ekkor $f \in BV_1$-re

$$\begin{aligned} |f - \Pi_K f|_1 &= \int_0^1 |f(x) - (\Pi_K f)(x)|dx = \sum_{i=1}^{K} \int_{I_i} |f(x) - \overline{f}_{I_i}|dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{K} V_{I_i}(f) \cdot \int_0^1 \chi_i(x)dx \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{K} V_{I_i}(f) \leq \varepsilon V(f) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ugyanakkor $f \in BV_1$ esetén $|f(x)| \leq 1$ majdnem mindenütt, így a $\{\frac{j}{K}\chi_i(x) : i = 1, ..., K; i = -K, ..., K\}$ alakú függvényekből álló halmaz az L^1 normára nézve véges 2ε-háló a teljes BV_1 halmazra.

Másrészt, BV_1 zárt L^1-ben, ugyanis teljesül a következő

14.2. szublemma: *Ha az $f_n \in BV$ sorozatra $V(f_n) \leq K < \infty$ és $f_n \to f$ L^1-ben, akkor $f \in BV$ és $V(f) \leq K$.*

Ugyanis választható f_{n_k} részsorozat, hogy $f_{n_k}(x) \to f(x)$ majdnem mindenütt, és mivel BV elemei csak nullmértékű halmaz erejéig definiáltak, feltehetjük, hogy a konvergencia mindenütt teljesül. A pontonkénti konvergenciából pedig, mivel $V(f_{n_k}) \leq K$, $V(f) \leq K$ következik. $\square$.

Kompakt és kvázikompakt operátorok. Legyen X Banach tér és $L : X \to X$ korlátos operátor. Az L operátor $\sigma(L) \subset \mathbb{C}$ *spektrum*a azokból a λ komplex számokból áll, amelyekre $\lambda Id - L$ vagy nem bijekció, vagy nem korlátos az inverze. Amennyiben $\lambda Id - L$ nem injektív, létezik $v \in X$, hogy $Lv = \lambda v$, azaz λ sajátérték. A spektrum mindig zárt halmaz. A $\rho(L)$ spektrálsugár a legkisebb olyan nemnegatív r szám, melyre $\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}$. Hasznos formula a spektrálsugárra:

$$\rho(L) = \lim_{n\to\infty}(||L^n||)^{\frac{1}{n}}$$

Az L operátor $\sigma_{ess}(L)(\subset \sigma(L))$ *lényeges spektruma* a komplementere azon λ sajátértékeknek, amelyekhez véges dimenziós sajátaltér tartozik. $\sigma_{ess}(L)$ is zárt halmaz, és analóg módon definiálhatjuk a $\rho_{ess}(L)$ lényeges spektrálsugarat, mint a legkisebb olyan nemnegatív R számot, melyre $\sigma_{ess}(L) \subset \{|\lambda| \leq R\}$.

$L : X \to X$ *kompakt operátor*, ha az X_1 egységgömb LX_1 képe kompakt halmaz (másképp szólva, ha minden korlátos $x_n \in X$ sorozatra $y_n = Lx_n$ -nek van konvergens részsorozata). Minden véges rangú operátor kompakt. Kompakt operátorra $\rho_{ess}(L) = 0$, tehát $\sigma(L)\setminus\{0\}$ véges multiplicitású sajátértékekből áll, ráadásul ez a halmaz megszámlálható, és csak az origó lehet torlódási pontja.

$L : X \to X$ *kvázikompakt operátor*, ha $\rho(L) = 1$, de $\rho_{ess}(L) = r < 1$, továbbá az egységkörön csak véges sok sajátérték van.

Jelölje $C(X)$ a $K : X \to X$ kompakt operátorok összességét. Ekkor bármely $L : X \to X$ korlátos operátorra:

$$\sigma_{ess}(L) = \bigcap_{K\in C(X)} \sigma(L-K), \qquad \rho_{ess}(L) = \lim_{n\to\infty}(\inf_{K\in C(X)} ||(L^n-K)||)^{\frac{1}{n}}. \quad (14.1)$$

Lasota-Yorke egyenlőtlenség. Az alább következő egyenlőtlenséget (és az arra épülő tételt) a matematika számos területén használják, ennek megfelelően több elnevezése is ismert. A dinamikai rendszerek irodalmában leginkább

Lasota-Yorke egyenlőtlenségként, a valószínűségszámításban Döblin-Fortet egyenlőtlenségként szokták emlegetni. A tétel Ionescu-Marinescu és Tulcea szerzőpárostól, illetve általánosabb formában Henniontól származik. *Belevalók:*

1. Legyenek $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ Banach terek olyanok, hogy Y természetes módon beágyazható X-be, és ez a beágyazás kompakt. Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy $v \in Y$-nak két normája is van, egy erős $||v||_Y$ és egy gyenge $||v||_X$ norma. Teljesül minden $v \in Y$-ra, hogy $||v||_X \leq ||v||_Y$, és $Y_1 = \{v \in Y : ||v||_Y \leq 1\}$, azaz Y *egységgömbje, mint* X *részhalmaza, kompakt.* Következésképp, minden $||.||_Y$ szerint korlátos sorozatnak van $||.||_X$-ben konvergens részsorozata.

2. Amennyiben adott egy $v_n \in Y$ sorozat, amely Y-ban korlátos: $||v_n||_Y \leq K < \infty$, és X-ben konvergens: $||v_n - v||_X \to 0$, akkor $v \in Y$ is teljesül, és $||v||_Y \leq K$.

3. Legyen $P : X \to X$ korlátos operátor, mely egyben megszorítható $P : Y \to Y$ korlátos operátorrá. Mint $P : X \to X$ operátorra, teljesüljön $||P||_X = 1$.

4. (*Ez maga az egyenlőtlenség!*) Létezik $k \in \mathbb{Z}^+$, $r < 1$ és $C > 0$, hogy minden $v \in Y$ esetén:

$$||P^k v||_Y \leq r \cdot ||v||_Y + C \cdot ||v||_X.$$

14.3. tétel: *A fent leírt feltételek teljesülése esetén (i) A $P : Y \to Y$ operátornak van fixpontja. (ii) A $P : Y \to Y$ operátor kvázikompakt.*

Az áttekinthetőség kedvéért a tétel bizonyítását nem ismertetjük ebben az általánosságban, hanem a konkrét alkalmazásra: szakaszonként tágító leképezésekre koncentrálunk.

Szakaszonként tágító leképezések. Elevenítsük fel a szakaszonként tágító leképezések fogalmát a 13 fejezetből. Fontos hangsúlyozni, hogy [13] 9. fejezetével szemben most nem követeljük meg a Markov tulajdonságot.

14.4. tétel: *Legyen $T : [0,1] \to [0,1]$ szakaszonként tágító leképezés. Ekkor T-nek van m-re abszolút folytonos invariáns mértéke, melynek sűrűségfüggvénye korlátos változású. Továbbá, ha P a Ruelle-Perron-Frobenius operátor, $X = L^1$ és $Y = BV$, akkor teljesülnek a 14.3. tétel feltételei, vagyis P kvázikompakt.*

Bizonyítás. A korábbi jelöléseknek megfelelően $|f|_1$ az L^1 normát, $V(f)$ a teljes megváltozást, $||f||_{BV} = |f|_1 + V(f)$ a BV-normát jelöli. Az 1. és a 2.

tulajdonságokat már fent bizonyítottuk. A 3. tulajdonsághoz minden $f \in L^1$-re

$$|Pf(y)| = \left| \sum_{x:Tx=y} \frac{f(x)}{|T'(x)|} \right| \le \sum_{x:Tx=y} \frac{|f(x)|}{|T'(x)|} = (P|f|)(y),$$

így

$$|Pf|_1 = \int_0^1 |Pf(x)|dx \le \int_0^1 (P|f|)(x)dx = \int_0^1 |f|(x)dx = |f|_1,$$

tehát $||P||_1 \le 1$. Hogy $||P||_1 = 1$, azt éppen az abszolút folytonos invariáns mérték létezéséből fogjuk látni, hiszen ennek sűrűségfüggvénye P-nek fixpontja.

Lássuk be, hogy a 4. tulajdonság is teljesül. Ehhez először is tekintsük $k \in \mathbb{Z}^+$-ra T^k-t (ennek Perron-Frobenius operátora éppen P^k): könnyen meggondolható, hogy ez leképezés is szakaszonként tágító, csak jellemzően több intervallumra van szükség, amelyekre megszorítva a dinamika sima és monoton. Ugyanakkor, ha $|T'(x)| \ge \lambda > 1$ minden x-re, akkor a magasabb hatvány választásával viszont $|(T^k)'(x)| > \lambda^k$ minden x-re, és így alkalmas k-val $|(T^k)'(x)| > 2$ minden x-re. Ez lesz a 4. tulajdonságban is szereplő k: az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy $k = 1$, azaz eleve T-re $|T'(x)| \ge \lambda > 2$ teljesül, és közvetlenül P-re látjuk be a 4. tulajdonságot.

Vezessük be a következő jelöléseket: T monotonitási/simasági intervallumai $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, ..., q-1)$, az ezekre megszorított dinamika: $T_i = T|_{I_i}$ (a végpontokban folytonos kiterjesztéssel értelmezve), a képintevallumok: $J_i = T_i(I_i)$ (ezek jellemzően összemetszenek), $\chi_i(x) = \chi_{J_i}(x)$ a képintevallumok indikátorfüggvényei, végül a dinamika monoton szakaszainak inverzei: $\Phi_i : J_i \to I_i$, $\Phi_i = (T_i)^{-1}$. Mindegyik Φ_i C^2, és $0 < |\Phi_i'(x)| \le \lambda^{-1} \le 1/2$ minden x-re és i-re.

Legyen most $f \in BV$, és becsüljük meg $V(Pf)$-t! Ehhez $f_i(x) = f(\Phi_i(x))|\Phi_i'(x)|\chi_i(x)$, ekkor $Pf(x) = \sum_{i=0}^{q-1} f_i(x)$, tehát $V(Pf) \le \sum_{i=0}^{q-1} V(f_i)$. Ha $J_i = [c, d]$, akkor $V_{[0,1]}(f_i) = V_{[0,c]}(f_i) + V_{[c,d]}(f_i) + V_{[d,1]}(f_i)$, ahol az első és az utolsó tag becsülhető $\lambda^{-1}|f(a_i)|$-vel, illetve $\lambda^{-1}|f(a_{i+1})|$-gyel. Másrészt $V_{J_i}(f_i) = V_{J_i}(f(\Phi_i(x)) \cdot \Phi_i'(x))$, tehát $V(gh)$-t kell becsülnünk, ahol g korlátos változású, és h folytonosan differenciálható. A megváltozásban egy tag $|g(x_j)h(x_j) - g(x_{j-1})h(x_{j-1})| \le |g(x_j)| \cdot |h(x_j) - h(x_{j-1})| + |g(x_j) - g(x_{j-1}| \cdot |h(x_{j-1})|$, ahol az első tag, h-ra Lagrange középértéktételt alkalmazva, Riemann integrál közelítésként fogható fel, míg a másodikban h-t a szuprémumával becsülhetjük. Összefoglalva:

$$V_{[0,1]}(f_i) \le \int_{J_i} |f(\Phi_i(x))||\Phi_i''(x)|dx + \lambda^{-1} V_{J_i}(f \circ \Phi_i) + \lambda^{-1}(|f(a_i)| + |f(a_{i+1})|).$$

A második tagra nyilván $V_{J_i}(f \circ \Phi_i) = V_{I_i}(f)$, így i-re összegezve éppen $\lambda^{-1} V_{[0,1]}(f)$ adódik. Az első tagra vezessük be a

$$K_1 := \max_{i=0,\dots,q-1} \sup_{J_i} \frac{|\Phi_i''(x)|}{|\Phi_i'(x)|}$$

mennyiséget, ami véges, mivel minden i-re Φ_i C^2 és $\Phi_i'(x) \neq 0$. Ekkor egy integrálhelyettesítéssel:

$$\int_{J_i} |f(\Phi_i(x))||\Phi''(x)|dx \leq K_1 \int_{J_i} |f(\Phi_i(x))| \cdot |\Phi_i'(x)|dx = K_1 \int_{I_i} |f(x)|dx,$$

és i-re összegezve $K_1 \int_0^1 |f(x)|dx = K_1 |f|_1$ adódik. Végül a harmadik tagra vezessük be a

$$K_2' = \min_{i=0,\dots,q-1} \frac{1}{a_{i+1} - a_i}$$

mennyiséget, ekkor

$$|f(a_i)| + |f(a_{i-1})| \leq 2 \inf_{a_i \leq t \leq a_{i+1}} |f(t)| + V_{I_i}(f) \leq K_2' \int_{I_i} |f(x)|dx + V_{I_i}(f)$$

tehát a harmadik tagok járuléka, i-re való összegzés után, felülről becsülhető $(K_2|f|_1 + \lambda^{-1}V(f))$-fel (itt $K_2 = K_2'/\lambda$ Mindent összevetve azt kapjuk, hogy

$$V(Pf) \leq (K_1 + K_2)|f|_1 + \frac{2}{\lambda} V(f),$$

amiből, mivel $\lambda > 2$ és $|Pf|_1 \leq |f|_1$, adódik a Lasota-Yorke egyenlőtlenség. Érdemes megjegyezni, hogy a $K = K_1 + K_2$ konstansban a K_1 a disztorziókból (dinamika nemlineáris jellege) K_2 pedig a szingularitásokból (szakadási pontok) adódik.

A 3. és 4. tulajdonságok közvetlen következménye, hogy $\forall l \in \mathbb{Z}^+$-ra és $f \in BV$-re

$$\begin{aligned} ||P^{lk} f||_{BV} &\leq r \cdot ||P^{(l-1)k} f||_{BV} + C|P^{(l-1)k} f|_1 \leq \\ &\leq r^2 \cdot ||P^{(l-2)k} f||_{BV} + Cr \cdot |P^{(l-2)k} f|_1 + C|f|_1 \leq \dots \leq \\ &\leq r^l \cdot ||f||_{BV} + \frac{C}{1-r} \cdot |f|_1, \end{aligned}$$

így alkalmas $C_1 > 0, C_2 > 0$ és $\alpha < 1$ konstansokkal minden $n \in \mathbb{Z}^+$ és $f \in BV$ esetén

$$||P^n f||_{BV} \leq C_1 \alpha^n \cdot ||f||_{BV} + C_2 |f|_1. \tag{14.2}$$

Az abszolút folytonos invariáns mérték létezéséhez még a P operátor pozitivitását kell kihasználnunk: amennyiben $f \geq 0$ (azaz $f(x) \geq 0$ minden $x \in [0,1]$ esetén), $Pf \geq 0$ is teljesül. Jelölje $\mathbf{1}$ az azonosan 1 függvényt ($\mathbf{1}(x) = 1$ minden $x \in [0,1]$ esetén). Ekkor (14.2) alapján $f_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P^j\mathbf{1}$ függvénysorozat korlátos BV-ben. Így az 1. és 2. tulajdonságok garantálják egy f_{n_k} részsorozat létezését, melyre $|f_{n_k} - h|_1 \to 0$, és $h \in BV$. Ekkor tetszőlegesen kicsi ε-nal becsülhető $|f_{n_k} - h|_1$, $|Pf_{n_k} - Ph|_1$ és $|f_{n_k} - Pf_{n_k}|_1 = \frac{1}{n_k}|P^{n_k}\mathbf{1} - \mathbf{1}|_1$, így $Ph = h$. Továbbá P pozitivitása miatt $h \geq 0$ és $|h|_1 = 1$ is teljesül, meggondolható ugyanis, hogy $f \geq 0$ esetén $|Pf|_1 = |f|_1$. Tehát h egy abszolút folytonos invariáns mérték sűrűségfüggvénye.

Bizonyítsuk be végül, hogy P kvázikompakt operátor, azaz, hogy $\rho_{ess}(P) < 1$. A lényeges spektrálsugárra a (14.1) formulát fogjuk alkalmazni. Elevenítsük fel a 14.1. lemma bizonyításából a (rögzített kicsi ε-hoz választott) Π_K operátort. Ismert (de könnyen ellenőrizhető közvetlenül is), hogy ha az X Banach téren $B : X \to X$ korlátos operátor és $A : X \to X$ kompakt operátor, akkor AB és BA is kompakt operátor. Mivel Π_K véges rangú, minden n-re $P^n\Pi_K : BV \to BV$ kompakt operátor. Ugyanakkor (14.2) alapján minden $f \in BV_1$-re:

$$||(P^n - P^n\Pi_K)f||_{BV} = C_1\alpha^n||f - \Pi_K f||_{BV} + C_2|f - \Pi_K f|_1$$

K-t n-től függően is választhatjuk, és ezt a 14.1. lemma érvelését követve megtehetjük úgy, hogy $|f - \Pi_{K(n)}f|_1 \leq \varepsilon^n$ legyen, akármilyen kicsi ε-ra. Így alkalmas $C > 0$ konstansra

$$\inf_{K \in C(BV)} ||(P^n - K)||_{BV} \leq C(\alpha^n + \varepsilon^n)$$

amiből (14.2) alapján $\rho_{ess}(P) \leq \alpha < 1$. $\square$.

Az abszolút folytonos invariáns mérték egyértelműsége és ergodicitása. Keverés és sebessége. Önmagában abból, hogy a T leképezés szakaszonként tágító, még nem következik az abszolút folytonos invariáns mérték egyértelműsége. Tekintsük a $T : [0,1] \to [0,1]$ leképezést:

$$Tx = \begin{cases} 2x & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 2x - 1/2 & \text{ha } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 2x - 1 & \text{ha } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ és $\chi_{[\frac{1}{2},1]}$, illetve ezek minden konvex kombinációja egyaránt invariáns mértékek sűrűségfüggvényei. Speciálisan a Lebesgue mérték is invariáns, de nem ergodikus, hiszen $[0, 1/2]$ invariáns halmaz.

Emlékeztető: egy topologikus dinamikai rendszer *topologikusan keverő*, ha bármely U, V nyílt halmazokra létezik N, hogy $n \geq N$ esetén $T^n U \cap V \neq \emptyset$. Speciálisan, egy $T : [0,1] \to [0,1]$ szakaszonként tágító leképezés topologikusan keverő, ha tetszőleges $I, J \subset [0,1]$ intervallumokra létezik N, hogy minden $n \geq N$-re $T^n I \cap J \neq \emptyset$. Amennyiben T topologikusan keverő, minden $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén T^k is topologikusan keverő. Az alábbi 14.7. lemma szerint a topologikus keverés biztosítja, hogy egy szakaszonként tágító leképezés minden szempontból a lehető legerősebb ergodikus tulajdonságokkal rendelkezzen. Megelőzően teszünk néhány észrevételt.

Legyen f egy (m-re) abszolút folytonos mérték sűrűségfüggvénye, tehát $f \in L^1$, $f \geq 0$. Ekkor jelölje $\mathit{supp}\, f = \{x : f(x) > 0\}$ a sűrűségfüggvény tartóját. Nyilván $m(\mathit{supp}\, f) > 0$, és ha $f \in BV$, akkor $\mathit{supp}\, f$ mindenképp tartalmazza f folytonossági pontját, és így biztosan tartalmaz nyílt intevallumot is. Ennél többet is állíthatunk. Emlékeztető: egy $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény *alulról félig folytonos*, ha $\forall y \in [0,1]$-re $f(y) \leq \liminf_{x \to y} f(x)$. Ilyenkor f alulról korlátos, felveszi minimumát és minden $a > 0$ esetén $\{x : f(x) > a\}$ nyílt halmaz. Könnyen meggondolható, hogy ha $f \in BV$, akkor tekinthető alulról félig folytonosnak (elég az értékét a megszámlálható sok szakadási pontban megfelelően hangolni: a változtatás $V(f)$-t sem érinti). Következésképp korlátos változású függvényre $\mathit{supp}\, f$ nyílt halmaz.

14.5. szublemma: *Legyen A pozitív Lebesgue mértékű invariáns halmaz (azaz $T^{-1}A = A$) egy szakaszonként tágító leképezésre. Ekkor A indikátorfüggvénye, χ_A, korlátos változású, azaz (Lebesgue nullmértékű halmaz erejéig) A nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A-hoz tartozik egy m_A abszolút folytonos invariáns mérték is, melynek sűrűségfüggvénye éppen A (normált) indikátorfüggvénye, $\chi_A \in L^1$. Ekkor legyen minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\rho_{A,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} P^j \chi_A$: mivel A invariáns, $\mathit{supp}\, \rho_{A,n} = A$. Mivel BV sűrű L^1-ben, minden ε-ra létezik $f_\varepsilon \in BV$, hogy $|\chi_A - f_\varepsilon|_1 < \varepsilon$. Legyen $f_{\varepsilon,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} P^j f_\varepsilon \in BV$:

- a Lasota-Yorke egyenlőtlenség miatt minden ε-ra $f_{\varepsilon,n}$ BV-ben korlátos sorozat, ezért van $g_\varepsilon \in BV$ L^1-torlódási pontja, és a (14.2) egyenlőtlenségből $||g_\varepsilon||_{BV} \leq C_2$ minden ε-ra (a korlát ε-től független!);
- mivel $|P|_1 \leq 1$, $|f_{\varepsilon,n} - \rho_{A,n}|_1 < \varepsilon$;
- $\varepsilon \to 0$-t véve a g_ε függvények BV-ben korlátosak, van L^1-ben g_A torlódási pont, és $g_A \in BV$.

Összefoglalva: a $\rho_{A,n}$ sorozatnak is L^1 torlódási pontja a $g_A \in BV$ sűrűségfüggvény, következésképp $supp\, g_A = A$, nyílt halmaz. $\Box$.

Megjegyzés: Azt a tulajdonságot, hogy az invariáns halmazok (Lebesgue nullmértékű halmaz erejéig) nyíltak, *lokális ergodicitás*nak is nevezik. Magasabb dimenzióban nem köthető egy olyan szép függvényosztályhoz, mint egydimenzióban a BV tér, ezért bizonyítása jellemzően igen nehéz, hiperbolikus rendszerekre a Hopf módszer (lásd [13] 7. fejezet) segítségével történik.

14.6. szublemma: *Legyen $f \in BV$ invariáns sűrűségfüggvény egy szakaszonként tágító leképezésre. Ekkor $B = supp\, f$ (Lebesgue-m.m.) véges sok nyílt intervallum úniója.*

Bizonyítás. Azt már tudjuk, hogy $B = supp\, f$ nyílt, így $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, ahol az I_j-k diszjunkt nyílt intervallumok. Jelölje $D = \{a_1, ..., a_{q-1}\}$ a T leképezés szakadási pontjait, és $\mathcal{D} = \{j | I_j \cap D \neq \emptyset\}$. $\mathcal{D} \neq \emptyset$, ugyanis ha az I_1 leghosszabb intervallumra $I_1 \cap D = \emptyset$ volna, akkor a tágítás miatt $T(I_1)$ I_1-nél hosszabb összefüggő intervallum lenne, márpedig $TB \subset B$, így ellentmondásra jutunk. $j \subset \mathcal{D}$-re $T(I_j)$ véges sok intervallum úniója, így az

$$\bigcup_{j \in \mathcal{D}} (I_j \cup TI_j)$$

halmaz véges sok nyílt intervallumból áll: jelölje J ezen intervallumok közül a legrövidebbet. Végül tekintsük az

$$\mathcal{S} = \{j \geq 1 | m(I_j) \geq m(J)\}, \qquad S = \bigcup_{j \in \mathcal{S}} I_j$$

nyílt halmazt, amely nyilván véges sok intervallum úniója. Be fogjuk látni, hogy $B = S$. Ehhez először azt mutatjuk meg, hogy $T(S) \subseteq S$. Legyen ugyanis $I_k \subset S$, ekkor két eset lehetséges: ha $k \in \mathcal{D}$, $TI_k \subset S$ definíció szerint teljesül. Ha $k \notin \mathcal{D}$, TI_k egyetlen intervallum, és mivel $TI_k \subset B$, így létezik k_0, hogy $TI_k \subset I_{k_0}$. Viszont a tágítás és a definíciók miatt $m(I_{k_0}) \geq m(TI_k) \geq m(I_k) \geq m(J)$, tehát $I_{k_0} \subset S$, így $T(I_k) \subset S$. Tehát $T(S) \subseteq S$. Ebből következik, hogy $S \subseteq T^{-1}S$, és ha μ jelöli az f sűrűségfüggvényű invariáns mértéket, akkor

$$\mu(T^{-1}S \setminus S) = \mu(T^{-1}S) - \mu(S \cap T^{-1}S) = \mu(S) - \mu(S) = 0.$$

Végül tegyük fel, hogy $B \setminus S \neq \emptyset$, és jelölje a $B \setminus S$-ben szereplő megszámlálható sok diszjunkt intervallum közül I_s a leghosszabbat. Mivel $s \notin \mathcal{D}$, TI_s intervallum, melyre $m(TI_s) \geq m(I_s)$, tehát $TI_s \subset S$. Így $I_s \subset T^{-1}S \setminus S$, tehát a fentiek szerint I_s μ-mértéke 0, ami ellentmondás, hiszen $I_s \subset B$, tehát I_s-n $f > 0$, és $d\mu = f\, dm$. $\Box$.

14.7. lemma: *Legyen $T : [0,1] \to [0,1]$ szakaszonként tágító leképezés topologikusan keverő. Ekkor*

- *Létezik pontosan egy abszolút folytonos invariáns mérték, melynek sűrűségfüggvénye $h \in BV$, és $\mathrm{supp}\, h = [0,1]$.*
- *Ez az invariáns mérték ergodikus és keverő.*
- *Bármely $f, g \in BV$ függvényekre a korreláció-lecsengés sebessége exponenciális.*

Bizonyítás. Legyen μ abszolút folytonos invariáns mérték $h \in BV$ sűrűségfüggvénnyel (azt már tudjuk, hogy ilyen létezik). Ekkor a 14.6. szublemma szerint $B = \mathrm{supp}\, h$ véges sok nyílt intervallum úniója. Mivel $TB \subseteq B$, a topologikus keverés biztosítja, hogy minden $J \subset [0,1]$ intervallumra $B \cap J \neq \emptyset$. Ebből már következik, hogy $B = [0,1]$, tehát μ a Lebesgue mértékkel ekvivalens.

Legyen most A invariáns halmaz, melyre $\mu(A) > 0$, ekkor $m(A) > 0$ is teljesül, és a 14.5. szublemma alapján A (Lebesgue-m.m) nyílt, így megszámlálható sok diszjunkt intervallum úniója. Pontosan végigkövetve a 14.6. szublemma bizonyítását belátható, hogy A is véges sok intervallum úniója. Ekkor viszont a topologikus keverés biztosítja, hogy (Lebesgue-m.m.) $A = [0,1]$. Ebből $\mu(A) = 1$, vagyis μ ergodikus mérték T-re.

Ebből már könnyen következik az abszolút folytonos invariáns mérték egyértelműsége is. Ugyanis ha μ' T-re invariáns és $\mu' \ll m$, akkor $\mathrm{supp}\, h = [0,1]$ miatt $\mu' \ll \mu$, márpedig ebből μ ergodicitása miatt $\mu = \mu'$ (ld. [13] 8. fejezet).

A további tulajdonságok bizonyításához vissza kell térnünk P spektrális vizsgálatára. Már tudjuk, hogy $P : BV \to BV$ kvázikompakt operátor, azaz véges sok, egységnyi abszolút értékű, véges multiplicitású sajátértéktől eltekintve spektruma az origó körüli $\alpha < 1$ sugarú körlapon belül helyezkedik el. Jelölje az egységnyi hosszú sajátértékeket $1 = \lambda_1,\ \lambda_2, ...\lambda_M$. Minden λ_i-hez tartozó E_i sajátaltéren P úgy hat, mint egy Q_i véges mátrix, melynek minden sajátértéke λ_i. Ráadásul ez a mátrix nem tartalmazhat Jordan blokkot. Ekkor ugyanis volna $f \in E_i$, melyre a $P^n f = Q_i^n f$ függvény BV (és így L^1) normája legalább n-ben lineáris ütemben nő. Márpedig $|P^n|_1 = 1$ minden n-re, tehát ellentmondáshoz jutunk. Összefoglalva

$$P = R + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i P_i; \qquad \text{és } \forall n \in \mathbb{Z}^+ : P^n = R^n + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^n P_i;$$

ahol

$\rho(R) = \alpha < 1$, így $||R^n|| = \alpha^n$,

$P_iBV = E_i$, ahol E_i véges dimenziós altér,

$P_iP_j = 0$, ha $i \neq j$, és $P_i^2 = P_i$,

$P_iR = RP_i = 0$.

Koncentráljunk először P_1-re: ez egy véges rangú projekció, tehát léteznek (az E_1 alteret kifeszítő) $f_1, ..., f_L \in BV$ függvények, és $\Psi_l : BV \to \mathbb{R}$ ($l = 1, ..., L$) korlátos lineáris funkcionálok, hogy $\forall f \in BV$-re $P_1 f = \sum_{l=1}^{L} \Psi_l(f) f_l$. Mivel $P_1 P = P_1$, $\Psi_l(Pf) = \Psi_l(f)$ minden $f \in BV$-re, továbbá $\Psi_l(f_l) = 1$, és $\Psi_l(f_{l'}) = 0$, ha $l \neq l'$. Az f_l-ek egyike éppen $f_1 = h$, az invariáns sűrűségfüggvény (látni fogjuk azt is, hogy az ehhez tartozó funkcionál $\Psi_1(f) = \int_0^1 f(x)dx$), de a priori lehetnek más, nem pozitív sajátfüggvények. Minden $n \in \mathbb{Z}^+$-re $P_1 = P_1 P^n$, így használva (14.2)-t, minden $f \in BV$-re:

$$||P_1 f||_{BV} = ||P_1 P^n f||_{BV} \leq C_1 \alpha^n \cdot ||P_1||_{BV} \cdot ||f||_{BV} + C_2 \cdot ||P_1||_{BV} \cdot |f|_1,$$

amiből $||P_1 f||_{BV} \leq ||P_1||_{BV} \cdot C_2 \cdot |f|_1$, tehát P_1 korlátos úgy is, mint $L^1 \to BV$ operátor (BV sűrű L^1-ben). Következésképp a Ψ_l-ek is kiterjeszthetők L^1-en értelmezett korlátos lineáris funkcionállá. Viszont L^1 duális tere L^∞, léteznek tehát $\Phi_l \in L^\infty$ függvények, hogy minden $f \in L^1$-re:

$$\int_0^1 \Phi_l(x) f(x) dx = \Psi_l(f) = \Psi_l(Pf) = \int_0^1 \Phi_l(x)(Pf)(x) dx = \int_0^1 \Phi_l(Tx) f(x) dx,$$

tehát mindegyik $\Phi_l \in L^\infty$ invariáns függvény, és így az ergodicitás miatt m.m. konstans. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $L = 1$, $\Phi_1(x) = 1$ minden $x \in [0,1]$-re, és $\Psi_1(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

Mielőtt rátérnék a(z exponenciális) keverés bizonyítására, fontos megjegyezni, hogy minden, ami eddig szerepelt, szó szerint elismételhető T^k-ra, tetszőleges $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Így pl. a leképezés minden T^k hatványa is ergodikus.

Most vizsgáljuk meg P_1-hez hasonlóan a P_i projektorokat $i \geq 2$ esetén is. Végigkövetve a fenti érvelést $\Phi_l(Tx) = \lambda \Phi_l(x)$ adódik (az egyszerűség kedvéért λ alsó i indexét nem írjuk ki). Tehát λ a $\hat{T} : L^\infty \to L^\infty$, $(\hat{T}\Phi)(x) = \Phi(Tx)$ operátor sajátértéke. Ez az operátor azonban multiplikatív, így minden n-re λ^n is sajátérték. Ugyanakkor ha β $\hat{T}$ sajátértéke, akkor β a $P : BV \to BV$ operátor spektrumába is beleesik, hiszen van olyan nemtriviális $g \in L^\infty$, hogy minden $h \in L^1$-re (és így persze $h \in BV$-re is)

$$0 = \int_0^1 (g(Tx) - \beta g(x)) h(x) dx = \int_0^1 g(x)(Ph(x) - \beta h(x)) dx.$$

tehát $(P - \beta \cdot Id)BV \neq BV$. Tudjuk, hogy $\sigma(P) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ véges sok pontból áll, amik ezek szerint csak komplex egységgyökök lehetnek. Tehát alkalmas $k \in \mathbb{Z}^+$-ra $\lambda^k = 1$, és így $\Phi_l(T^k x) = \lambda^k \Phi_l(x) = \Phi_l(x)$, Φ_l T^k-ra invariáns függvény, ami ennek erogdicitása miatt csak konstans 1 lehet.

Összefoglalva: $\sigma(P) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = 1$, ami egyszeres sajátérték, és $P = R + P_1$, ahol bármely $f \in BV$ esetén $||R^n f||_{BV} \leq \alpha^n ||f||_{BV}$, $P_1 f = (\int_0^1 f(x)dx)h$, ahol h az invariáns sűrűségfüggvény. Így $||P^n f - (\int_0^1 f(x)dx)h||_{BV} \leq \alpha^n ||f||_{BV}$.

Térjünk végül rá az exponenciális korreláció-lecsengés bizonyítására. Legyen $f \in BV$ és $g \in L^\infty$. Ekkor $fh \in BV$ és bevezetve az $E_\mu f = \int_0^1 f(x)h(x)dx$ jelölést, $||P^n(fh) - (E_\mu f)h||_{BV} \leq \alpha^n ||fh||_{BV}$. Így

$$\begin{aligned} E_\mu(f \cdot g \circ T^n) &= \int_0^1 g(T^n x)f(x)h(x)dx = \int_0^1 g(x)(P^n(fh))(x)dx = \\ &= \int_0^1 g(x)(R^n(fh))(x)dx + E_\mu(f)E_\mu(g), \end{aligned}$$

azaz

$$|Corr(n, g, f)| \leq \left| \int_0^1 g(x)(R^n(fh))(x)dx \right| \leq \alpha^n |g|_\infty \cdot ||fh||_{BV}.$$

Mivel BV sűrű L^2-ben, a keverés is következik (de persze általános L^2 függvényekre nem exponenciális sebességgel). $\square$.

15. Young tornyok

Az 1990-es évek végén Lai-Sang Young általános módszert dolgozott ki tágító és hiperbolikus rendszerek ergodikus és statisztikus tulajdonságainak vizsgálatára ([16], [17]). A módszer, melyet azóta felfedezőjéről Young toronynak neveznek, alkalmas különféle dinamikai jelenségek, például nemegyenletes hiperbolicitás és szingularitások hatékony kezelésére. Young még rögtön a [16], [17] cikkekben a korábbiaknál jóval erősebb eredményeket ért el fontos dinamikai modellek – pl. logisztikus leképezéscsalád, Hénon leképezés, Sinai biliárdok – abszolút folytonos invariáns mértékének létezésével, a korreláció-lecsengés sebességével és a centrális határeloszlástétellel kapcsolatban. Azóta a Young tornyokat dinamikai rendszerek számos lényeges osztályára és statisztikus tulajdonságok további széles spektrumának vizsgálatára alkalmazták. Alapvetően két változata létezik, a nem invertálható dinamikákra kifejlesztett tágító Young torony, és az invertálható dinamikákra kifejlesztett hiperbolikus Young torony. Mi most az egyszerűbb tágító Young torony esetével foglalkozunk, és itt is csak az abszolút folytonos invariáns mérték (továbbiakban: AFIM) létezésére vonatkozó eredményt bizonyítjuk vázlatosan. A 16 fejezetben ismertetjük a módszer egyik legegyszerűbb alkalmazását, tágító leképezések esetét neutrális fixponttal.

Érdemes felidézni az indukált leképezés és a torony leképezés fogalmát [13] 2. fejezetéből.

Jelölések: (Δ, F) a torony. $F\colon \Delta \circlearrowright$.

- Δ_0 a torony alapja, mérhető tér.
- $\Delta_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{0,i}$ és $R\colon \Delta_0 \to \mathbb{Z}_+$ a visszatérési idő, úgy hogy $R|_{\Delta_{0,i}} = \text{const.}$
- $\Delta = \{(z,n) \in \Delta_0 \times \mathbb{Z}_+ \mid n < R(z)\}$

  $\Delta_l = \Delta \cap \{n = l\}$ a torony l-edik emelete.

  $\Delta_{l,i} = \Delta_l \cap \{z \in \Delta_{0,i}\}$

  $R_i = R \mid \Delta_{0,i}$ így $\Delta_{R_i-1,i}$ a tető $\Delta_{0,i}$ felett.
- $F\colon \Delta \circlearrowright \; F(z,l) = (z, l+1) \quad$ ha $l+1 < R(z)$

  $F\Delta_{R_{i-1},i} \overset{1-1}{\leftrightarrow} \Delta_0.$
- Konvenció: Δ_0-t azonosítjuk Δ megfelelő részhalmazával

  $F^R\colon \Delta_0 \circlearrowright, \qquad F^R x = F^{R(x)} x.$

- $\mathcal{F}$ a generált σ-algebra Δ-n.
- $x, y \in \Delta_0$-ra

$$s(x,y) = \min\{n \mid (F^R)^n x, (F^R)^n y \text{ különböző } \Delta_{0,i}\text{-kbe esnek}\}$$
$$\uparrow \text{ szeparációs idő}$$

azaz

$$s(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \Delta_0$$
$$s(x,y) \geq 1 \quad \forall x, y \in \Delta_{0,i}$$

$s(x,y)$ kiterjesztése Δ-ra:

$$s(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in \Delta_{l,i},\ y \in \Delta_{l',i'} \text{ és } (l,i) \neq (l',i') \\ s(\pi x, \pi y) & \text{egyébként } (\pi(z,n) := z). \end{cases}$$

Megjegyzés: Alábbi feltevéseink biztosítani fogják, hogy $\beta \in (0,1)$ esetén $d_\beta(x,y) = \beta^{s(x,y)}$ távolság Δ-n. Így Δ metrikus térnek tekinthető, és van értelme függvények folytonosságáról, Hölder folytonosságáról beszélni.

Feltevések:

- LNKO $\{R_i\} = 1$
- $\eta = \{\Delta_{l,i}\}$ generáló, azaz $\bigvee_{i=0}^{\infty} F^{-i}\eta$ pontokból áll.
- $\exists\ m$ referencia mérték $(\Delta, \mathcal{F})$-n, hogy $m(\Delta_0) < \infty$

$$F_*(m \mid \Delta_{l,i}) = m(\Delta_{l+1,i}) \text{ ha } l < R_i - 1$$

- $F^R \mid \Delta_{0,i} \colon \Delta_{0,i} \to \Delta_0$ és inverze sem szinguláris. Azaz F^R Jacobi determinánsa m-re vonatkozólag $\exists$ és > 0 μ-majdnem mindenütt.
- Regularitási feltevés

$$\exists C > 0\ \exists \beta \in (0,1) \colon \forall i\ \forall x, y \in \Delta_{0,i}$$
$$\left| \frac{JF^R(x)}{JF^R(y)} - 1 \right| \leq C\beta^{s(F^R x, F^R y)} \tag{15.1}$$

$$C_\beta(\Delta) = \{\varphi \colon \Delta \to \mathbb{R} \mid \exists C_\varphi \colon |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C_\varphi \beta^{s(x,y)} \quad \forall x, y \in \Delta\}$$
$$C_\beta^+(\Delta) = \big\{\varphi \in C_\beta(\Delta) \mid \exists C_\varphi^+ \colon \forall l, i \text{ vagy } \varphi \equiv 0,$$

vagy

$$\varphi > 0 \text{ és } \left| \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} - 1 \right| \leq C_\varphi^+ \beta^{s(x,y)}\ \forall x, y \in \Delta_{l,i} \Big\}.$$

15.1. tétel: (AFIM létezése és tulajdonságai) *Tegyük fel a fentieken kívül, hogy* $\int R\,\mathrm{dm} < \infty$. *Akkor*

(i) $F\colon \Delta \circlearrowleft$ *-re* $\exists$ *AFIM* $(\nu \ll m)$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m} \in C_\beta^+$ *és* $\inf \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m} > 0$

(iii) (F, ν) *ergodikus és keverő.*

Bizonyítás: Legyen $m_0 = m \mid \Delta_0$.

15.2. lemma: $\exists \nu_0$, *az* F^R *leképezésre invariáns mérték* Δ_0*-n, hogy az* (i)–(iii) *állítások teljesülnek.*

$\mathcal{P}_0 = \eta \mid \Delta_0$.
Legyen $A \in \bigvee_{j=0}^{i-1} (F^R)^{-j}\mathcal{P}_0$.
Legyen $\rho_{i,A} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}(F^R)^i_*\ (m \mid A)$.
Legyen $x, y \in \Delta_0$ és $x', y' \in A$, hogy $(F^R)^i x' = x$, $(F^R)^i y' = y$.

Akkor $j \le i$-re

$$s((F^R)^j x', (F^R)^j y') = s(x,y) + (i-j).$$

Ezért

$$\left|\log \frac{\rho_{i,A}(y)}{\rho_{i,A}(x)}\right| = \left|\log \frac{J(F^R)^i x'}{J(F^R)^i y'}\right| = \left|\sum_{j=0}^{i-1} \log \frac{JF^R((F^R)^j x')}{JF^R((F^R)^j y')}\right|$$
$$\le \sum_{j=0}^{i-1} C\beta^{s(x,y)+(i-j)-1} \le C'\beta^{s(x,y)}.$$

Legyen

$$\rho_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(F^R)^i_* m_0\right).$$

Mivel ρ_n konvex lineáris kombinációja $\rho_{i,A}$-knak, azért $\forall x, y \in \Delta_0$-ra

$$\frac{\rho_n(y)}{\rho_n(x)} \le e^{C'}$$

és

$$\forall x \cong y \left(\bmod \bigvee_0^{k-1}(F^R)^{-i}\mathcal{P}_0\right)\text{-ra}$$

$$\frac{\rho_n(y)}{\rho_n(x)} \le e^{C'\beta^k}$$

[13, 9. fejezete] miatt (Arzela–Ascoli tétel!) $\{\rho_n\}_n$ relatív kompakt $C^0(\Delta_0, m)$-ben és $\exists \nu_0$, hogy $\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}m} = \lim_{n'} \rho_{n'}$.

15.3. lemma: *ν_0-ból egyszerűen megkonstruálható a kívánt ν.*

Legyen $\nu' = \sum_{l=0}^{\infty} F_*^l(\nu_0 \mid \{R > l\})$.

Mivel $\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}m} \le e^{C'}$ és $\int R \,\mathrm{d}m < \infty \rightsquigarrow \nu'(\Delta) < \infty$.

Legyen $\nu = \frac{1}{\nu'(\Delta)} \nu'$. ν eleget tesz (i)-nek.

(ii) [13, 9. fejezet] szerint, mivel

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}(x) = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}(\pi x)$$

(iii) [13, 9. fejezet] szerint.

16. Tágító körleképezés neutrális fixponttal

Ebben a fejezetben ismertetjük a Young tornyok alkalmazását a körvonal neutrális fixponttal rendelkező tágító leképezéseinek esetére. Bár a 15 fejezetben csak az AFIM létezésére tértünk ki, most kimondjuk a [17]-ben szereplő tételt teljes pompájában, így utalva a Young toronyban rejlő további lehetőségekre.
Jelölés: $a(x) \asymp b(x)$ alatt azt értjük, hogy van olyan $C > 0$ konstans, hogy $C^{-1}a(x) \leq b(x) \leq Ca(x)$ minden x-re. Hasonlóan, $a(x) \lesssim b(x)$ azt jelenti hogy $a(x) \leq Cb(x)$ alkalmas C-re.

Modell: f d-edrangú lokális diffeomorfizmus $\mathbb{S}^1$-en ($d \in \mathbb{Z}^+, d \geq 2$). Ez alatt azt értjük, hogy minden $x \in \mathbb{S}^1$ pontnak pontosan d őësképe van, továbbá

(i) $f \in C_1$, és $f' > 1$ $\mathbb{S}^1 \backslash \{0\}$-ban.

(ii) $f \in C_2$ $\mathbb{S}^1 \backslash \{0\}$-n.

(iii) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ és $\exists \gamma > 0$ $\forall x \neq 0$-ra $xf''(x) \asymp |x|^\gamma$.

Példa: $x = 0$ környezetében $f(x) = x(1 + x^\gamma)$. További (a feltételeknek nem pontosan, de lényegében megfelelő) példa a 16.1. feladatban szereplő leképezéscsalád.

16.1. feladat: *Legyen $0 \leq \gamma < 1$ paraméter, és tekintsük a $T_\gamma : [0,1] \to [0,1]$;*

$$T_\gamma(x) = \begin{cases} x(1 + x^\gamma 2^\gamma) & \text{ha } 0 \leq x < 1/2; \\ 2x - 1 & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dinamikát (speciálisan T_0 a bináris leképezés). Legyen $\Delta_0 = [1/2, 1]$, és nézzük meg, mit kapunk, ha T_γ-t a Δ_0-n indukált leképezésre épülő tornyot tekintjük. Legyen $x_n \in (0, 1/2]$ az a sorozat, melyre $T(x_i) = x_{i-1}$, és $x_1 = 1/2$. Ekkor ha $y_i = \frac{x_i+1}{2}$, akkor $\Delta_{(0,i)} = [y_{i+1}, y_i]$ éppen az R konstans értékeihez tartozó felbontás. T^{R_i} minden $\Delta_{(0,i)}$-t kölcs. egyértelműen visz Δ_0-ba. A Lebesgue mértéket tekintve m referenciamértéknek, könnyen ellenőrizhető, hogy $\gamma = 0$-ra $m(R = n)$ exponenciálisan cseng le. $\gamma \neq 0$-ra van olyan $C > 0$, hogy minden n-re:

$$C^{-1}n^{-1/\gamma} \leq x_n \leq Cn^{-1/\gamma}; \qquad C^{-1}n^{-(1+1/\gamma)} \leq x_n - x_{n+1} \leq Cn^{-(1+1/\gamma)}.$$

Ezek szerint $m(R = n)$ polinomiális, és $\gamma < 1$ miatt a várható érték véges.

Kiegészítés: Ha $\gamma \to 0$, akkor $x \neq 0$-ra $|f' - 1| \gg \varepsilon$, így $\gamma = 0$ eset az lesz, amikor $f' \geq \lambda > 1$ és f'' korlátos.

$$\mathcal{H}_\beta = \{\varphi \colon S \to \mathbb{R} \mid \exists C \mid \varphi(x) - \varphi(y)| \leq C \cdot |x - y|^\beta\}.$$

16.2. tétel:

(a) *Ha* $\gamma \geq 1$, *akkor* $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta f_x^i \Rightarrow \delta_0$ *μ-majdnem minden* $x \in \mathbb{S}^1$*-re. (Nincs véges invariáns mérték).*

(b) *Ha* $\gamma < 1$, *akkor* $\exists$ *AFIM* ν, *és* (f, ν) *keverő.*

(c) *Ha* $0 \leq \gamma < 1$, *akkor ha* $\mathcal{P}_f$ *a Perron–Frobenius operátor és* $\rho = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$, *akkor* $\forall\ \varphi \in \mathcal{H}$*-ra* $\left(\int \varphi \,\mathrm{d}m = 1\right)$

$$\int |\mathcal{P}^n \varphi - \rho| \,\mathrm{d}m \asymp n^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

$\forall \varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1, m)$*-re és* $\psi \in \mathcal{H}$*-ra*

$$\begin{aligned}\left|\int (\varphi \circ f^n)\psi \,\mathrm{d}m - \int \varphi \,\mathrm{d}m \int \psi \,\mathrm{d}m\right| &\leq O(n^{1-\frac{1}{\gamma}}) \qquad (0 < \gamma < 1)\\ &\leq C\theta^n \qquad\qquad (\gamma = 0)\end{aligned}$$

(d) $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ *esetén CHT* $\forall \varphi \in \mathcal{H}$*-ra.*

Lokális analízis a fixpont környezetében

Legyen $\varepsilon_0 > 0$ alkalmasan rögzített, tekintsük $f \mid [0, \varepsilon_0]$-t és legyen $x_0 \in (0, \varepsilon_0)$, továbbá

$$f x_n = x_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$$

Speciálisan a torony konstrukciójánál x_0-t az I_1 intervallum jobboldali végpontjának fogjuk választani, az x_n-ek pedig mindig I_1-beli ősképeket jelentik.

16.3. lemma: $x_n \asymp \frac{1}{n^\alpha}$ $\left(\alpha = \frac{1}{\gamma}\right)$ *és*

$$\exists K > 0 \text{ hogy } \# \left\{ k \;\middle|\; \left[\frac{1}{(k+1)^\alpha}, \frac{1}{k^\alpha}\right] \cap [x_{n+1}, x_n] \neq \emptyset \right\} \leq K.$$

Bizonyítás: Legyen

$$\Delta x_n = x_n - x_{n+1},\ \ \Delta \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}.$$

Akkor

$$x_n \in \left[\frac{1}{(k+1)^\alpha}, \frac{1}{k^\alpha}\right] \rightsquigarrow \Delta x_n \asymp \Delta \frac{1}{k^\alpha}$$

ugyanis

$$\Delta\frac{1}{k^\alpha} \asymp \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \left(\frac{1}{k^\alpha}\right)^{\gamma+1}. \qquad \square$$

16.4. következmény:

$$f''(x) \asymp \frac{1}{n^{1-\alpha}} \ \textit{ha}\ x \in [x_{n+1}, x_n]$$

16.5. lemma: (Disztorziós becslés) $\exists C_1 : \forall i, n \in \mathbb{Z}_+,\ i \le n$ *és* $\forall x, y \in [x_{n+1}, x_n]$-*re*

$$\left|\log\frac{(f^i)'x}{(f^i)'y}\right| \le C\frac{|f^ix - f^iy|}{\Delta x_{n-i}} \le C_1.$$

Bizonyítás: Először gyengébb korlát: $\exists\,\zeta_j \in [f^jx, f^jy]$

$$\begin{aligned}
\left|\log\frac{(f^i)'x}{(f^i)'y}\right| &\le \sum_{j=0}^{i-1} |\log f'(f^jx) - \log f'(f^jy)| \\
&\le \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|f''(\zeta_j)|}{f'(\zeta_j)}|f^jx - f^jy| \\
&\lesssim \sum_0^{i-1} (x_{n-j+1})^{\gamma-1}(x_{n-j+1})^{\gamma+1} \lesssim \sum_0^{i-1} \frac{1}{(n-j+1)^{1-\alpha}}\frac{1}{(n-j+1)^{1+\alpha}} \\
&\lesssim \sum_0^{i-1} \frac{1}{(n-j+1)^2} \le \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Itt használtuk, hogy $f_x^j, f_y^j \in [x_{n+1-j}, x_{n-j}]$.

Másrészt, ha $x, y \in [x_{n+1}, x_n]$, akkor $f^jx, f^jy \in [x_{n+1-j}, x_{n-j}]$ azért $\forall x, y \in \Delta_{n-j}$-re és $\forall j < i$-re

$$\frac{|f^jx - f^jy|}{\Delta x_{n-j}} \asymp \frac{|f^ix - f^iy|}{\Delta x_{n-i}}.$$

Ezt visszahelyettesítve

$$\begin{aligned}
\left|\log\frac{(f^i)'x}{(f^i)'y}\right| &\lesssim \sum_{j=0}^{i-1} \underbrace{(x_{n-j+1})^{\gamma-1}}_{\mathbf{I}} \cdot \underbrace{\Delta x_{n-j}}_{\mathbf{II}} \frac{|f^ix - f^iy|}{\Delta x_{n-i}} \\
&\le \text{const.}\frac{|f^ix - f^iy|}{\Delta x_{n-i}}
\end{aligned}$$

Indoklás:

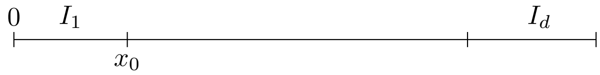
$\mathbf{I} \to \asymp \left[\frac{1}{(n-j)^\alpha}\right]^{\gamma-1} = \frac{1}{(n-j)^{1-\alpha}}$

$\mathbf{II} \to \asymp \frac{1}{(n-j)^{1+\alpha}}.$ $\square$

Tétel bizonyítása: Csak az AFIM.

Legyen $\gamma > 0$.

Torony konstrukció: $\mathbb{S}^1 = \bigcup_1^d I_j$, hogy $fI_j = \mathbb{S}^1$. Legyen $I_0 = [0, x_0]$ és $I_d = [x_0', 1]$



I_1 felbontása: $fx_{n+1} = x_n$, $J_n = [x_{n+1}, x_n)$, $n \geq 0$
I_d felbontása analóg: J_n'

$$\mathcal{A} = \{I_2, \ldots, I_{d-1}; J_n, J_n' \colon n \geq 0\}.$$

Speciálisan az így konstruált x_n és x_n' sorozatokra is vonatkozik a 16.5. lemma lokális analízise.

Torony a korábbiak szerint, de nem teljesen (!)

Fő lépések (Összefoglaló)

1. Legyen $\Delta_0 = \mathbb{S}^1$, $\mathcal{A} = \{\Delta_{0,i}\}$

2. Legyen

$$\begin{aligned} R &= 1 & & I_2 \cup \cdots \cup I_{d-1} \cup J_0 \cup J_0'\text{-n} \\ R \mid J_n &= R \mid J_n' = n+1 & & \text{ha } n \geq 1. \end{aligned}$$

3. Legyen

$$F \mid \Delta_{R_i-1,i} = f^R \mid \Delta_{0,i}.$$

4. Tehát

$$f^R I_j = \mathbb{S}^1 \qquad \text{ha } 2 \leq j \leq d-1$$

és

$$\begin{aligned} f^R J_n &= I_2 \cup \cdots \cup I_d \\ f^R J_n' &= I_1 \cup \cdots \cup I_{d-1}. \end{aligned}$$

5. $m_0 = \mathrm{Leb} \mid \Delta_0$ továbbá $JF = 1$ $\Delta \setminus \cup_i \Delta_{R_i - 1}$-en már definiálja m-et Δ-n.

6. Állítás: $\exists \beta < 1$, hogy $(f^R)'x \geq \dfrac{1}{\beta}$ $\forall x \in \mathbb{S}^1$-re.

Bizonyítás: $x \in J_n$-re $f^n x \in [x_1, x_0]$

$$(f^R)'x = \prod_{i=0}^{n} f'(f^i x) \geq f'(f^n x) \geq \frac{1}{\beta}, \text{ ahol } \beta = \max\{\tfrac{1}{f'(x)} \mid x \in [x_1, x_0]\}$$

7. Ha $s(x,y) \geq n \rightsquigarrow |x - y| \leq \beta^n$.

Lemma: A konstruált toronyra teljesülnek az AFIM létezésének feltételei (kivéve, hogy $f^n J_n \neq \mathbb{S}^1$; de ez nem lesz gond.)

Bizonyítás: A Jacobi determináns regularitása vonatkozó (15.1) formula a 16.5. lemma következménye.

Továbbá:

$$m(R > n) = m\left(\bigcup_{i \geq n} J_n\right) + m\left(\bigcup_{i \geq n} J_n'\right) \asymp \frac{1}{n^{1/\gamma}}.$$

Mármost, ha $0 \leq \gamma < 1$ akkor $\displaystyle\int R \,\mathrm{d}m < \infty$.

8. $\gamma = 0$-ra $\exists \theta_0 < 1, C$

$m\{R > n\} \leq C\theta_0^n$.

Ilyenkor egyszerűbben is lehetne tornyot konstruálni: $\{\Delta_{0,i}\}_i = \{I_1, \ldots, I_d\}$, és $R \equiv 1$.

($\gamma > 0$-ra disztorziós problémák miatt ez a konstrukció nem működne.)

9. *Invariáns mérték végessége:*

Legyen $\pi \colon \Delta \to \mathbb{S}^1$ a természetes vetítés, így $\pi \circ F^R = f^R \circ \pi$.

Az absztrakt tétel bizonyításából és [13, 9. fejezete] szellemében folyik, hogy F^R-nek $\exists\ \overline{\nu}_0 \ll m$ inv. mértéke Δ_0-n, amelyre $0 < C_0 \leq \dfrac{\mathrm{d}\overline{\nu}_0}{\mathrm{d}m_0} \leq C_1$ alkalmas C_0, C_1-gyel.

$\overline{\nu}_0$-ból megkonstruálható az F-invariáns $\overline{\nu}$ Δ-n. Ez csak akkor véges, ha $\int R \,\mathrm{d}m < \infty$, azaz $\gamma < 1$. Legyen végül $\nu = \pi_* \overline{\nu}$.

10. Legyen $\rho = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$.

$\gamma > 0$ esetén $\rho \mid J_k \approx k$.

Ugyanis: $\nu(J_k) = \overline{\nu}(\pi^{-1}J_k) \asymp k\left.\frac{\mathrm{d}\overline{\nu}}{\mathrm{d}m}\right|_{J_k} \asymp km_0(J_k) \asymp k^{-\alpha}$.

Így disztorzió miatt

$$\rho \mid J_k \approx \frac{k^{-\alpha}}{m_0(J_k)} \approx k.$$

11. *m-tipikus pontok aszimptotikus eloszlása $\gamma \geq 1$-re:*

Megmutatjuk, hogy tetszőlegesen nagy N-re, ha rögzítjük az (x'_N, x_N) intervallumot – azaz az origó akármilyen kicsi környezetét – és $\varepsilon > 0$-t, akkor m-majdnem minden x-re

$$\frac{1}{n}\#\left\{0 \leq k \leq n \mid f^k x \in (x'_N, x_N)\right\} \geq 1 - \varepsilon \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Legyen ugyanis $N_1 > N$, hogy

$$\frac{\nu(\mathbb{S}^1 \backslash (x'_N, x_N))}{\nu(\mathbb{S}^1 \backslash (x'_{N_1}, x_{N_1}))} < \varepsilon.$$

NB. itt fontos, hogy a ν mérték *nem* véges!

Jelölje $f^{(N_1)}$ az első visszatérés leképezést $\mathbb{S}^1 \backslash (x'_{N_1}, x_{N_1})$-en, akkor $\nu \mid (\mathbb{S}^1 \backslash (x'_{N_1}, x_{N_1})$ véges, $f^{(N_1)}$-invariáns mérték, amelyről könnyű látni, hogy ergodikus (pl. $d \geq 3$-ra az I_2-n való indukáltja ergodikus). Így m-majdnem minden pontjára $\mathbb{S}^1 \backslash (x'_{N_1}, x_{N_1})$-nek az $f^{(N_1)}$-re az (x'_N, x_N)-ben töltött relatív idő $\geq 1 - \varepsilon$. Ugyanakkor az f-orbitok (x'_N, x_N)-ben töltött relatív ideje nagyobb, mint az $f^{(N_1)}$-orbitoké. $\square$

Hivatkozások

[1] Adler, R. L.; Weiss, B. *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*; Proc. Natl. Acad. Sci. USA; **57(6)** 1573–1576 (1967)

[2] Bowen, R.: *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*; Springer, 1975

[3] Boyarski, A.; Góra, P.: *Laws of Chaos, Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension*, Birkhäuser, 1997

[4] Brin, M.; Stuck, G.: *Introduction to Dynamical Systems*; Camebridge University Press, 2002

[5] Collet, P.,; Eckmann, J.-P.: *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, 1980

[6] Katok, A.; Hasselblatt, B.: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*; Camebridge University Press, 1995

[7] Katznelson, Y.; Weiss, B.: *A Simple Proof of some Ergodic Theorems*; Israel Journal of Mathematics, **42** 291–296 (1982)

[8] Lasota, A. ; Yorke, J.: *On the Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations*; Transactions of the American Mathematical Society, **186** 481–488 (1973)

[9] Liverani, C. *Invariant measures and their properties. A functional analytic point of view.* Dynamical systems. Part II, 185–237, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, (2003)

[10] Pettersen, K.: *Ergodic Theory*; Camebridge University Press, 1983

[11] Pollicott, M.: *Lectures on Ergodic Theory and Pesin Theory on Compact Manifolds*; Camebridge University Press, 1993

[12] Reed, M.; Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, I. Functional Analysis*; Elsevier, 1980

[13] Szász, D.; Bálint, P.: *Ergodelmélet és Dinamikai Rendszerek jegyzet, I. rész*; http://math.bme.hu/∼szasz

[14] Szőkefalvi-Nagy, B. *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, 1977

[15] Walters, P.: *An Introduction to Ergodic Theory*; Springer, 2007

[16] Young, L.-S.: *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*; Annals of Mathematics, **147** (1998) 585–650.

[17] Young, L.-S.: *Recurrence times and rates of mixing*; Israel Journal of Mathematics, **110** (1999) 153–188.