

Valószínűségszámítás

1. feladatsor

Eseménytér, események algebrája, valószínűség

1.1 Legyenek A, B és C tetszőleges események. Fejezzük ki halmazelméleti műveletekkel a következő eseményeket:

- (a) az A, B és C események közül pontosan k következik be ($k = 0, 1, 2$);
- (b) az A, B és C események közül legalább i bekövetkezik ($i = 1, 2$);
- (c) az A, B és C események közül legfeljebb j következik be ($j = 1, 2$).

1.2 Ellenőrizzük az alábbi azonosságokat:

- (a) $A \circ A = \emptyset$; (b) $A \circ \emptyset = A$; (c) $A \circ \Omega = \overline{A}$;
- (d) $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$;
- (e) $(A \circ B) \cap B = B \setminus A$; (f) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
- (g) $A \cap B \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; (h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
- (i) $A \setminus [A \setminus (B \setminus C)] = A \cap B \cap \overline{C}$; (j) $A \cup B = A \circ B \circ (A \cap B)$;
- (k) $A \circ C \cup [B \setminus (A \cup C)] = [(A \circ B) \setminus (A \cap C)] \cup [(B \circ C) \setminus (A \cap C)]$;
- (l) $A \circ C \subset (A \circ B) \cup (B \circ C)$;
- (m) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$;
- (n) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
- (o) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (C \cap A)] \cup [C \setminus (A \cap B)]$;
- (p) $(A \cup B \cup C \cup D) \setminus (A \cup B \cup C) = D \setminus (A \cup B \cup C)$;
- (r) $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup D) = A \cap B \cap C \cap D$;
- (s) $[(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \setminus (B \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
- (t) $(A \cap B) \cup C \setminus [(A \cap C) \cup B] = C \setminus (A \cup B)$;
- (u) $[A \cap (B \cup C)] \cup [B \cap (C \cup A)] \cup [C \cap (A \cup B)] = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

- 1.3** Legyen Ω tetszőleges eseménytér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tetszőleges esemény algebra. Bizonyítsuk be, hogy
- (\mathcal{A}, \circ) Abel-csoport;
 - $(\mathcal{A}, \circ, \cap)$ gyűrű (melyben \circ az összeadás és \cap a szorzás). A gyűrű nulleleme \emptyset , egységeleme Ω .
- 1.4** (a) Három különböző érmét és két azonos (megkülönböztethetetlen) kockát dobunk fel egyszerre. Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek. Reprezentáljuk a kísérlet eseményterét.
- (b) Három fekete és két fehér kockát dobunk fel egyszerre. (Az azonos színű kockák megkülönböztethetetlenek). Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek. Reprezentáljuk a kísérlet eseményterét.
- 1.5** Három kockát dobunk fel egyszerre. Az azonos színű kockák megkülönböztethetetlenek. Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek
- ha a kockák azonos színűek;
 - ha két kocka fekete és a harmadik fehér;
 - ha mindhárom kocka különböző színű?
- 1.6** Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n tetszőleges események. Mit jelent az $A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_n$ esemény?
- Megjegyzés:* Az 1.3 feladat (d) pontjának következtében a \circ művelet *asszociatív*.
- 1.7** Egy urnában van 6 fehér, 6 zöld és 2 piros golyó. Benyúlunk az urnába és találomra kiveszünk 2 golyót.
- Írjuk le az eseményteret.
 - Hány megfigyelhető esemény lehetséges a szóbanforgó kísérletnél?
 - Hány megfigyelhető esemény lehetséges, ha a két golyót egymás után húzzuk?
- 1.8** (a) Legyen A, B és C három tetszőleges esemény. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\mathbf{P}(A \circ C) \leq \mathbf{P}(A \circ B) + \mathbf{P}(B \circ C).$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\Delta(A, B) := \mathbf{P}(A \circ B)$ 'távolságot' értelmezzük az események között, akkor $\Delta(\cdot, \cdot)$ kielégíti a háromszög egyenlőtlenséget.

- (b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{P}(A \circ B) = 0$, akkor $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$.

1.9 Mutassuk meg, hogy bármely A , B és C eseményre fennáll:

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C)| \leq \mathbf{P}(B \circ C).$$

1.10 Mutassuk meg, hogy bármely A és B eseményre fennáll:

$$-\frac{1}{4} \leq \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \leq \frac{1}{4}.$$

1.11 Mutassuk meg, hogy bármely A és B eseményre fennáll a

$$\mathbf{P}^2(A \cap B) + \mathbf{P}^2(A \cap \bar{B}) + \mathbf{P}^2(\bar{A} \cap B) + \mathbf{P}^2(\bar{A} \cap \bar{B}) \geq \frac{1}{4}$$

egyenlőtlenség, és ebben az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$ és $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/4$ (azaz az A és B események függetlenek).

(Használjuk a lineáris algebrából jól ismert Schwarz egyenlőtlenséget.)

1.12 (a) Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{P}(A) \geq 0.8$ és $\mathbf{P}(B) \geq 0.5$, akkor $\mathbf{P}(A \cap B) \geq 0.3$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A_1, A_2, \dots, A_n eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n - 1).$$

1.13 Két azonos erejű játékos, Ádám és Éva ping-pongoznak. Tekintsük a következő eseményeket:

$$A := \{\text{Ádám négy meccsből (pontosan) hármat megnyer}\}$$

$$B := \{\text{Éva nyolc meccsből (pontosan) ötöt megnyer}\}$$

(a) Számolás nélkül saccoljuk meg a két esemény valószínűségét. Melyik tűnik valószínűbbnek?

(b) Ellenőrizzük intuíciónkat a valószínűségek kiszámolásával.

1.14 Három kockával dobva, mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10-nél nagyobb?

Megjegyzés: Ez volt a nyeresé feltétele a XVII. században divatos "passe dix" játékban.

1.15 Mi a valószínűbb: az-e, hogy egy kockával négyszer dobva, legalább egyszer hatost dobjunk, vagy hogy két kockával 24-szer dobva legalább egyszer mindkét kockával hatost dobjunk.

Megjegyzés: Ez De Méré lovag feladata, 1654-ben Blaise Pascaltól kérdezte. Valójában már Cardano (1501-1576) is foglalkozott a kérdéssel.

Próbáljanak olyan bizonyítást találni, amely zsebszámológép használata nélkül is eredményre vezet.

1.16 Mi a valószínűbb: 6 kockadobással legalább egyszer hatost dobni vagy 12 kockadobással legalább kétszer hatost dobni?

Megjegyzés: A kérdés Isaac Newton és Samuel Pepys levelezésében fordul elő. Pepys-t nem győzte meg Newton (korrekt) érvelése.

1.17 Egy érmét addig dobunk, amíg kétszer egymás után azonos oldalára nem esik. Minden lehetséges n dobást igénylő sorozat valószínűsége legyen 2^{-n} . (Miért?) Írjuk le a kísérlet eseményterét. Mi az alábbi események valószínűsége:

$A := \{\text{a kísérlet hatnál kevesebb érmedobással véget ér}\}$

$B := \{\text{a kísérlet páros számú érmedobás után ér véget.}\}$

1.18 Anna, Bori és Cili egyforma erejű ping-pong játékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel... Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Folytatják ezt mindaddig, amíg valamelyikük kétszer egymásután nem nyer és a körmérkőzés győztesévé van kikiáltva. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n} . (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

1.19 (a) Számoljuk ki az ötös lottón 0, 1, 2, 3, 4 és 5 találat valószínűségét.
(b) Számoljuk ki az hatos lottón 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 találat valószínűségét.