Valószínűségszámítás
7. feladatsor
Folytonos Eloszlásfüggvények, sűrűségfüggvények

7.1 Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

(a) $F(x) := \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(x);$

(b) $$F(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -\infty < x \le 0, \\ [x]/2, & \text{ha} \quad 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{ha} \quad 2 < x < \infty; \end{cases}$$

(c) $$F(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -\infty < x \le 0, \\ x/(1+x), & \text{ha} \quad 0 < x < \infty; \end{cases}$$

(d) $F(x) := \exp(-e^{-x})$

(e) $$F(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -\infty < x \le 0, \\ 1-(1-\exp\{-x\})/x, & \text{ha} \quad 0 < x < \infty. \end{cases}$$

7.2 Milyen α és c értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény?

$$F(x) = \exp(-ce^{-\alpha x}).$$

7.3 Bizonyítsuk be, hogy ha $F(x)$ eloszlásfüggvény, akkor bármely rögzített $h > 0$-ra az alább értelmesett $G_1(x)$ és $G_2(x)$ is eloszlásfüggvény.

$$G_1(x) := \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(y)dy, \qquad G_2(x) := \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(y)dy.$$

Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formuláknak.

7.4 Legyen $F(x)$ *folyotnos* eloszlásfüggvény és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$G(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -\infty < x \le 0, \\ F(x) - F(x^{-1}), & \text{ha} \quad 0 < x < \infty. \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formulának.

7.5 Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

7.6 (a) A $[0,1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra (azaz: egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással) három pontot. Határozzuk meg a középső pont abszcisszájának az eloszlásfüggvényét.
(b) A $[0,1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra (azaz: egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással) n pontot. Határozzuk meg a k-adik pont abszcisszájának az eloszlásfüggvényét.

7.7 Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen (egyenletes eloszlással). Jelölje ξ e pontnak a távolságát a négyzet legközelebbi oldalától. Határozuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

7.8 Mondjuk meg, hogy az alábbi függvények közül melyek valószínűségi sűrűségfüggvények és melyek nem:

$$(a)\quad f(x) := \begin{cases} 1/3 & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$(b)\quad f(x) := \begin{cases} (\sin x)/2 & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$(c)\quad f(x) := \begin{cases} x^{-2} & \text{ha } 1 \le x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$(d)\quad f(x) := \begin{cases} x/(1+x) & \text{ha } 0 \le x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$(e)\quad f(x) := \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$(f)\quad f(x) := \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$(g)\quad f(x) := \begin{cases} 4x^3e^{-x^4} & \text{ha } 0 \le x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$(h)\quad f(x) := \begin{cases} -\log x & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$(i)\quad f(x) := \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{ha } 0 \le x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

$(j)\quad f(x) := \begin{cases} -e^{-x}/x + (1-e^{-x})/x^2 & \text{ha } 0 < x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

$(k)\quad f(x) := \dfrac{1}{\pi \cosh(x)}, \quad -\infty < x < \infty;$

$(l)\quad f(x) := \dfrac{\lambda^n}{2(n-1)!}|x|^{n-1}e^{-\lambda|x|}, \quad -\infty < x < \infty, \quad n \in \mathbb{N}, \ \lambda > 0.$

7.9 Az x tengely $[0,1]$ intervallumában véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Jelölje ξ e pont távolságát a sík $(0;1)$ koordinátájú pontjától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

7.10 Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) egy pontot. Jelölje ξ e pontnak a négyzet legközelebbi csúcsától való távolságát. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.