(1. előadás)

Valószínűségi mező

$$(\Omega, \mathcal{F}^{(*)}, \mathbb{P}^{(**)})$$

Ω halmaz, eseménytér: a kísérlet lehetséges kimenetelei

$\omega \in \Omega$ elemi események

$A \subset \Omega$: események

példák:

(I.) lóverseny 3 lóval: Alma, Kis Barack, Citrom.

$\Omega_I = \{(a,b,c), (a,c,b) \dots (c,b,a)\}$ $|\Omega| = 3! = 6$

$A_I = \{\text{Alma nyer}\} = \{(a,b,c), (a,c,b)\}$ $|A| = 2$

(II.) Két dobókocka, egy fehér és egy sárga.

$\Omega_{II} = \{(1,1) \dots (6,6)\}$

$A_{II} = \{\text{összeg } 5\}$ $B_{II} = \{\text{összeg } 4\}$ $C_{II} = \{\text{a két kocka egyforma}\}$

(III.) ~~Ω_{III}~~ = Addig dobálunk egy szabályos érmét, míg először a Fej oldala esik.

$\Omega_{III} = \{(F), (1,F), (1,1,F), \dots\}$ $A_{III} = \{\text{páros sok dobás}\}$

(IV.) Darts.

$\Omega_{IV} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 100\}$ $A_{IV} = \{10 \text{ pont}\}$

halmazműveletek jelentése:

- $A \cup B$ – legalább az egyik
- $A \cap B$ – mindkettő bekövetkezik $\Rightarrow$ kizáró események $A \cap B = \emptyset$ (II. példán szemléltetve)
- $A^c = \Omega \setminus A$
- $(A \subset B)$

műveletek: tulajdonságok (gyakorlat)

pl: de Morgan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\mathcal{F}\ (*)$: σ-algebra:
- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \mathcal{F}$

nem mérhető halmaz...

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ axiómái $(**)$

1. axióma: $\mathbb{P}(A) \ge 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

2. axióma: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3. axióma: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \ne j$

érthető... véges sok. ∞? $\Rightarrow$ később

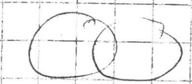
pl: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

egyéb: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \Rightarrow$ de $\mathbb{P}(A) = 0 \not\Rightarrow A = \emptyset$ (IV. példa)

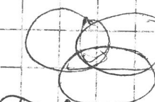
És ha $A \cap B \ne \emptyset$, akkor?

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) =$$



$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$



$\boxed{\text{Ad}}$ szita-formula

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 \dots < i_r \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_r})$$

- mit jelent?
- biz: indukció (gyakorlat). [illegible]

Egyenlő valószínűségű elemi események

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) \dots = P(\{\omega_N\}) = ? = \frac{1}{N}$

$A \subset \Omega$ $|A| = K \to \boxed{P(A) = \frac{K}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}}$ → kedvező lehetőségek száma, → összes lehetőség száma

Megjegyzések:

- első lépés: mi Ω. Több jó választás is lehet. (Térjünk vissza rá?)
- egyszerűt használjunk A-hoz és Ω-hoz!

} (kombinatorika!) (sorrendi, ismétlés) (sorrendiség) (binomiális együttható)

pl. (golyókkal) 6 kék, 5 piros, 3-at húzunk. P(1 piros és 2 kék)?

I. $\{1, 2, \dots, 6, \dots, 11\}$ $\Omega = \{(i, j, k) \mid i \neq j, j \neq k, i \neq k\}$

$|\Omega| = 11 \cdot 10 \cdot 9$

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ $A_i = \{(\text{piros}, \text{kék}, \text{kék})\}$ $5 \cdot 6 \cdot 5$ $|A_i| = 5 \cdot 6 \cdot 5$

$\frac{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{5}{11}$

II. $\Omega = \{\{i, j, k\}\}$ (sorrend nélkül) $\binom{11}{3} = |\Omega|$ $|A| = 5 \cdot \binom{6}{2}$

$\frac{5 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}}{\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{5}{11}$

$A \to A^c$

Születésnap-probléma

$n = 50$ ember → $0.03 = P(A^c)$

Elcserélt telefonok

N fős buli. Mindenki egyet dobott le, elemenként egy-egy veszik a kupac tetejéről.

$\Omega = \{$ ~~telefonok~~ sorrendek összes sorrendezései$\} \Rightarrow |\Omega| = N!$

$A_i = \{i$-dik telefont a gazdája viszi el$\}$

$|A_i| = (N-1)! \to P(A_i) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$

$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(N-k)!}{N!}$

$i_1 < i_2 \dots < i_k$

$P(\text{senki sem a sajátját}) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_N)$ szita

P_N

$= 1 - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le N} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) =$

$= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(N-k)!}{N!} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{1}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \dots$

$P_N \to 1/e$ ha $N \to \infty$

Feltételes vsz.   pótzh időpont! (2 előadás)

Kérdés: két kocka. $P(\text{dobások összege } 10) = \frac{1}{12}$

és ha az első dobás 6? $\frac{1}{6}$ „redukált felületek"

A = dobások összege 10
B = első kockán hat
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{1/6} = 1/6$$

Def $P(F)>0 \Rightarrow$ feltételes vsz $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$

Áll $P(\cdot|F): \mathcal{B}\to\mathbb{R}$ teljesíti a vsz axiómáit.

(1) $P(A|F)\geq 0$

(2) $P(\Omega|F)=1$

(3) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|F) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|F)$ $A_i\cap A_j=\emptyset$

Vizsgázni kell: Anna és Bea az egyetemi kollégiumban
kapnak 2-2 pólót, ezek egyforma eséllyel pirosak vagy sárgák.
egy póló $1/2$

Anna: Ha van piros pólóm, azt fogom felvenni.
Bea: Nekem teljesen mindegy.

Meglep Annán piros pólót látunk → Másik (otthoni) póló piros?
Beán ———— ?

$\Omega = \{(P,P),(P,S),(S,P),(S,S)\}$ nem redukált: $\{(P,P),(P,S),(S,P)\}$ esemény tér

$P(A_2|A_1) = 1/3$

és Beáé? ugyanannyi $1/2$ várnánk! $A_1 = \{$Annán piros póló van$\}$
$A_2 = \{$Annának van legalább egy piros pólója$\}$
$A_2 = A_1$

de! $B_1 \supsetneq B_1$ [illegible]

[illegible] $P(B_2|B_1) = ?$

Tehát be kell venni Bea választását is az eseménytérbe

$\Omega = \{(P,P),(P,P),(P,S),(P,S),(S,P),(S,P),(S,S),(S,S)\}$

redukált $= B_1 = \{(P,P),(P,P),(P,S),(S,P)\} \to \frac{1}{2}$

Szorzási szabály! $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \to P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$

$P(E_n\cap E_{n-1}\cap \dots \cap E_2\cap E_1) = P(E_n|E_{n-1}\cap \dots\cap E_1)\cdot P(E_{n-1}|E_{n-2}\cap\dots\cap E_1)\cdot\ldots\cdot P(E_2|E_1)\cdot P(E_1)$

példa! Kártya anna — anna visszatevéses / visszatevés nélkül.
→ egy lábú, 1 sakk [illegible] egy ugyanolyan színűt [illegible] vissza, [illegible]

$P(\text{[illegible] sorrendben piros, kék, piros}) = P(S_3\cap K_2\cap S_1) = P(S_3\cap K_2\cap S_1|K_2\cap S_1)\cdot P(K_2\cap S_1|S_1)\cdot P(S_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

példa? bridzs 52 lapos francia kártya, minden játékos 13 lapot kap.
[illegible] minden játékosnál pontosan 1 ász?

$A_1 = \{$pikk ász különböző játékosnál$\}$ $A_4 \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1$
$A_2 = \{$kőr ász és pikk ász két különböző játékosnál$\}$
$A_3 = \{$treff, kőr és pikk ász ———$\}$
$A_4 = \{$minden játékosnál 1 ász$\}$

$P(A_4) = P(A_4|A_3)\,P(A_3|A_2)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_1) = \frac{13}{49}\cdot\frac{26}{50}\cdot\frac{39}{51}\cdot 1$

Bayes

Példa: Biztosító: ügyfelek { óvatos 70% → baleset egy év alatt: 0.1 esély; gondatlan 30% → ——— 0.2 esély }

új ügyfél: $P(\text{egy éven belül balesetet okoz})$

$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0.1\cdot 0.7 + 0.2\cdot 0.3 = 0.13$

$P(\text{gondatlan}|B) = \frac{P(A_1\cap B)}{P(B)} = \frac{0.2\cdot 0.3}{0.13} = \frac{6}{13}$ (majdnem 50%! ≈46%)

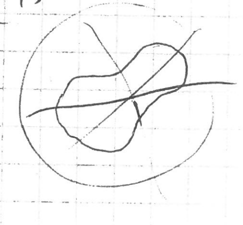
~~T.V.t.~~

Def teljes eseményrendszer $A_1\ldots A_n$: $A_i\cap A_j=\emptyset$ $i\neq j$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Áll teljes vsz. tétele $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i)$

Áll Bayes tétel $P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)}$

„B bekövetkezése [illegible] az [illegible]"



Példa! Egy urnában egy fehér golyó, feldobunk egy dobókockát.
1 → 1 piros
2,4 → 3 piros } a fehér mellé. Húzunk egy golyót: piros → Mi a vsz, hogy a
3,6 → 5 piros

$P(\text{piros}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{23}{36}$ → hatos volt? $5/23$

Példa ritka betegség → teszt. 95% eséllyel hatásos
(kimutatja a betegséget, ha tényleg beteg a páciens)
1% esélyes hamis pozitív
(betegséget mutat, pedig a páciens egészséges)

Előfordulási esély:
a betegség a társadalom ~~0.00~~ 0,5%-át érinti (0.005 arányát)

$B = \{\text{pozitív teszt}\}$ → $A = \{\text{a páciens beteg}\}$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\bar{A})\cdot P(\bar{A})} = \frac{0.95\cdot 0.005}{0.01\cdot 0.995 + 0.95\cdot 0.005} \approx 1/3$$

? Kit „fizessük" teszt. (vércsoport-tesztnél)

$\boxed{\text{Függetlenség}}$ A és B független, ha $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Pl.: 52 lapos francia kártyából húzunk → pl. $A = \{\text{pikk}\}$, $B = \{\text{ász}\}$, $C = \{\text{kőr}\}$

$P(A) = \frac{1}{4}$ $P(B) = \frac{1}{13}$ $P(A\cap B) = \frac{1}{52}$ ✓

$P(C) = \frac{1}{4}$ $P(A\cap C) = 0$ nem független → független és kizáró más!

Áll $P(B)>0$. A és B független ⟺ $P(A|B) = P(A)$ szóban:
semmi plusz infót nem nyújt ~~annak~~ A valószínűségére, hogy B teljesül!

Érdekes példa
1 sárga és 1 fehér kocka. $A = \{\text{fehér } 5\}$
$B = \{\text{összeg } 6\}$
$C = \{\text{összeg } 7\}$
$D = \{\text{sárga } 4\}$

A és C független, A és D független, C és D független → de A, C, D együtt már nem az

Def $A_1 \dots A_n$ teljesen függetlenek, ha $\forall\, 1\le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$:
$$P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

Adósság: σ-additivitás jelentése (3. előadás)

emlékeztető: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ ha $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Def csökkenő eseménysorozat: $C_i \supseteq C_{i+1}$, $\forall i \ge 1$
$\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$
növekvő eseménysorozat $D_i \subset D_{i+1}$ $\forall i$: $\lim_{n\to\infty} D_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$

Áll σ-additivitás ⇒ növekvő/csökkenő eseménysorozatra $\lim_{n\to\infty} P(D_n) = P(\lim_{n\to\infty} D_n)$ (C_n)

Biz.: növekvő: Legyen $A_n = D_n \setminus D_{n-1}$ $(n\ge 2)$; $A_1 = D_1$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \lim_{n\to\infty} D_n$
$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(D_n)$ így
$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(D_n)$

csökkenő: $(C_i)^c = D_i$ növekvő
$(\lim C_n)^c = D_n$

$\boxed{\text{Független kísérletek}}$ teljes és páronkénti függetlenség

⇓ végtelen példa: n-szer feldobunk egy érmét, $A_k = \{k\text{-adik dobás}\}$
n-szer ismételjük ugyanazt a kísérletet 6-os}
$(\Omega_n = \Omega\times\dots\times\Omega)$ k-adik kísérlet sikeres p valószínűséggel.

(a) minden kísérlet sikeres: p^n
(b) legalább egy siker $1-(1-p)^n$
(c) pontosan k siker $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (: Bernoulli-formula)
(d) végtelen sok kísérlet: gyakori sok siker
minden sikeres → 0. (Hamupoly) C_n

összeg előtt $\sum$ vagy előtt ??

Feltételes függetlenség

~~A_1 és A_2 felt.~~

B_1 és B_2 felt. függetlenek A mellett, ha

$$P(B_1 \cap B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A)\cdot P(B_2 \mid A)$$

példa: orvosi teszt

első teszt és 2. teszt eredménye felt. független

A mellett pozitív 95% eséllyel ha beteg

1% — egészséges

$$P(A \mid B_1 \cap B_2) = \frac{P(B_1\cap B_2 \mid A)\,P(A)}{P(B_1 \cap B_2)} = \frac{P(B_1\cap B_2 \mid A)\,P(A)}{P(B_1\cap B_2 \mid A)\,P(A) + P(B_1\cap B_2 \mid A^c)\,P(A^c)} =$$

$$= \frac{P(B_1\mid A)\cdot P(B_2\mid A)\cdot P(A)}{P(B_1\mid A)\cdot P(B_2\mid A)\cdot P(A) + P(B_1\mid A^c)\,P(B_2\mid A^c)\cdot P(A^c)} = \frac{(0{,}95)^2\cdot 0{,}005}{(0{,}01)^2\cdot 0{,}995 + (0{,}95)^2\cdot 0{,}005}$$

$\approx 0{,}98$ 0.005 → 0,32 → 0,98

2. példa [illegible] $P(B_2 \mid B_1) = ?$

$$P(B_2\mid B_1) = \frac{P(B_2\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_2\cap B_1\mid A)\,P(A) + P(B_2\cap B_1 \mid A^c)\cdot P(A^c)}{P(B_1)} =$$

$$= \underbrace{P(B_2\mid A)}_{0.2}\,P(A\mid B_1) + \underbrace{P(B_2\mid A^c)}_{0.1}\,P(A^c\mid B_1) = 0.2\cdot\frac{6}{13} + 0.1\cdot\frac{5}{13} = 0{,}15$$

70%

30%

$0.7\cdot 0.1 + 0.3\cdot 0{,}2 = 0{,}13$ → $6/13$

Valószínűségi változó

$X:\Omega\to\mathbb{R}$ (mérhető) fv. „véletlen szám" $X, Y, Z \ldots \xi, \eta, \zeta$ „mérési eredmény"

példák: I 3 szabályos pénzérme: X: fejek száma

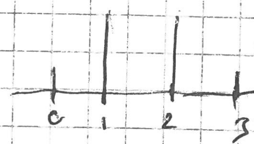
II Szabályos dobókockával addig, amíg 6-os nem lesz

diszkrét val. változó: értékkészlete ~~véges~~ megszámlálható

$x_1, x_2, \ldots$ $\boxed{\text{Valószínűségeloszlás}}$: • $P(x_i) = P(X = x_i) \geq 0$ • $\sum_i P(x_i) = 1$

(ha egész értékű, p_i)

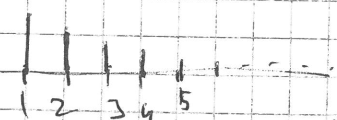
I:



$p_i = 1/8$ $i = 0, 3$

$p_i = 3/8$ $i = 1, 2$

II.



$p_i = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{6}$

binomiális eloszlás (n,p)

Binomiális(n,p) $P(X=k) = p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0,1,2,\ldots n$

$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$

geometriai eloszlás

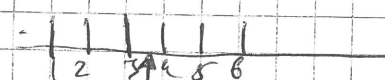
$p_k = (1-p)^{k-1}\,p$ $k = 1, 2, \ldots$

$p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\,\frac{1}{1-(1-p)} = 1$

Várható érték

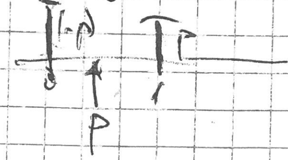
$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)\cdot x_i$ → (ha abs. konv.)!

• szabályos dobókocka



$E(X) = \frac{\sum_1^6 i}{6} = \frac{6\cdot 7}{2}\cdot\frac{1}{6} = \boxed{3{,}5}$

• (indikált) érme



Interpretáció 1: súlypont

Interpretáció 2.: Nagy Számok Törvénye „nyeremény"

...bs várható érték: $n=1 \to p$

2: $E(X)=\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k}\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \left((1-p+tp)^n\right)$

$k = \frac{d}{dt}(t^k)\Big|_{t=1}$

$= \left(n(1-p+pt)^{n-1} p\right)\Big|_{t=1} = \boxed{np}$

...várható érték:

$EX = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} k = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^k) = p \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = p \frac{1}{(1-q)^2} =$

$= p \frac{1}{p^2} = \boxed{\frac{1}{p}}$

...dás)

...érdezték: diszkrét val. változó, val. eloszlás, várható érték

abszolút konvergencia: $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $n=1,2,\dots \Rightarrow E(X)=\infty$

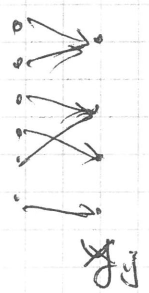
$p_{\pm n} = \frac{1}{n(n+1)\,3}$ $p_0 = 1/3 \Rightarrow E(X)$ nem létezik.

várható érték!

...: $X: -1, 0, 1$ $P(X=1)=0{,}3$ $P(X=0)=0{,}5$ $P(X=-1)=0{,}2$

$Y=X^2$ $P(Y=1)=0{,}5$ $P(Y=0)=0{,}5 \to EY=0{,}5$.

$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(X=x_i)$



$\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(X=x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{x_i:\, g(x_i)=y_j} y_j P(X=x_i) =$

$= \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{x_i:\, g(x_i)=y_j} P(X=x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(Y=y_j)$

...: $E(X^2)=0{,}5$. $(E(X))^2 = (0{,}1)^2 = 0{,}01$ lehet $E(X^2) \neq (EX)^2$

$\geq$ Jensen egyenlőtlenség.

...: $E(aX+b) = aE(X)+b$

...: ...n-edik momentum. $\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^n p(x_i)\right)$

szórásnégyzet

$Y = \begin{matrix} 1000 & 1/2 \\ -1000 & 1/2 \end{matrix}$ $Z = \begin{matrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{matrix}$ $E(Y)=E(Z)=0$.

mennyire "fluktuál" a várható érték körül? $\mu := E(X)$

Def: $Var(X) = D^2(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$ (≥ 0)

alternatív formula:

$Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = \left(E(X^2) - (E(X))^2\right) \geq 0$.

(kockadobásra: $E(X^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7 \cdot 13}{6}$, $Var(X) = \frac{91}{6} - (7/2)^2 = \frac{35}{12}$)

indikátor: $E(X)=p$ $Var X = p - p^2 = p(1-p)$ $(\leq 1/4)$

lineáris átskálázás: $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

$E\left(aX+b - E(aX+b)\right)^2 = E\left(a^2(X-E(X))^2\right) = a^2 Var X$.

Szórás: $D(X) = \sqrt{Var(X)}$ $\left(D(aX+b) = |a| D(X)\right)$

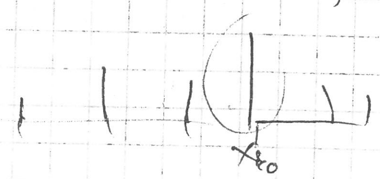
binomiális $\to$ $Var(X) = ?$

$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=1} (t^k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k}\right) =$

$= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=1} (1-p+tp)^n = n(n-1)p^2 \to EX^2 = n^2p^2 - np^2 + np$

$Var X = np - np^2 = np(1-p)$

Módusz: az valószínűség-eloszlás módusza az a (nem feltétlenül egyértelmű) x_{k_0} érték, ahol $P(X=x_{k_0})$ a legnagyobb.



binomiálisra?

$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)}{k} \frac{p}{(1-p)} \geq 1$, $pn - kp + p \geq k - kp$

$\boxed{(n+1)p \geq k}$

ha $(n+1)p$ nem egész $\to$ unimodális, $k_0 = [(n+1)p]$

$(n+1)p$ egész: $k_0 = (n+1)p$ és $k_0 - 1$ egyaránt módusz.

$n \to \infty$ (gyakori kísérlet): $n \to \infty$, p rögzített. Hogyan viselkedik a binomiális eloszlás?

Bernoulli-nagy számok törvénye! $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \to 0$ $\forall \varepsilon > 0$, ha $n \to \infty$.

$P(|X - np| > n\varepsilon)$ ...

$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \le \alpha < 1$ (exponenciális csökkenés) ⇝ részletek: jegyzet.

$P(|X-np|>n\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

pl: pénzérme. Események (relatív gyakoriság, feladat valószínűséghez)

Legyen $r > np$ ($n \in \mathbb{N}$, p rögzített), $k \ge r$. Ekkor: $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \le \frac{P(X=r+1)}{P(X=r)} = K < 1$

$P\left(\frac{X}{n}-p>\varepsilon\right) = P(X-np>n\varepsilon) = P(X>np+n\varepsilon) = P(X \ge \underbrace{\lceil np+n\varepsilon\rceil}_{r}) =$

$= \sum_{k=r}^{n} P(X=k) \le P(X=r)\cdot(1+K+K^2+\dots) = \frac{P(X=r)}{1-K}$

ugyanekkor: ha $r=\lceil np+n\varepsilon\rceil$, akkor $K = \frac{n-r}{r}\cdot\frac{p}{q}$, $\frac{1}{1-K} = \frac{rq}{r-np}$

monoton csökkenő! $P(X=r) \le \frac{1}{r-np}$

$\Rightarrow P\left(\frac{X}{n}-p>\varepsilon\right) \le \frac{rq}{(r-np)^2} \le \frac{nq}{n^2\varepsilon^2} = \frac{q}{n\varepsilon^2}$ $\quad P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|>\varepsilon\right) \le \frac{1}{n\varepsilon^2}$

másik: $P\left(\frac{X}{n}-p<-\varepsilon\right) = P\left(\frac{Y}{n}-q>\varepsilon\right) \le \frac{p}{n\varepsilon^2}$

($Y \sim$ Binom(n,q), kudarcok száma)

Poisson eloszlás

Lövöldözünk célpontra, 10 próbálkozás, minden lövés 0,1 eséllyel talál.

P(több mint 1 találat) $(X>1)$ $= 1-(0,9)^{10} - 10\cdot(0,9)^9\cdot 0,1 \approx 0,2639$

20-szor, 0,05 eséllyel talál.

P(több mint 1 találat) $= 1-\cancel{(0,9)^{20}}(0,95)^{20} - 20(0,95)^{19}\cdot 0,05 = 0,26416$

100-szor, 0,01 eséllyel talál

$P(X>1) = 1-(0,99)^{100} - 100\cdot(0,99)^{99}\cdot 0,01 \approx 0,26424$

Def. $X \sim Poi(\lambda)$ $\quad P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k=0,1,2,\dots$

$\lambda>0$ paraméter.

$\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$ ✓

Tétel: Legyen k rögzített
- $n\to\infty$
- $p(n)\to 0$

} úgy, hogy $n\cdot p(n)\to\lambda$. Ekkor: $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Biz: $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^n (1-p)^{-k} = \frac{1}{k!}\, \underset{\downarrow\,\lambda}{pn}\cdot \underset{\downarrow\,\lambda}{p(n-1)}\cdots \underset{\downarrow\,\lambda}{p(n-k+1)}\cdot \underset{\downarrow\,1}{(1-p)^{-k}}\,\underset{\downarrow\,e^{-\lambda}}{(1-p)^n}$

emlékeztető: $\left(1-\frac{1}{a(n)}\right)^n \to e^{-\lambda}$, ha $\frac{n}{a(n)}\to\lambda$

ha $a(n)\to\infty$ (most: $a(n) = \frac{1}{p(n)}$)

- nagyon sok, független kísérlet
- kis valószínűséggel következnek be az egyes kísérletek

} például: Poisson eloszlású

- egész más, mint a B.N.S.T.V.

a céllövés példában $\lambda=1$ → $P(X>1) = 1-e^{-1}-e^{-1} \approx 0,26424$

miért jó? könnyebb számolni.
csak egy paraméter

példa: Halászat, minden nap ugyanott.
figyelem: minden ötödik alkalommal nincs hal → $P(X=0) \approx 1/5$.
Kérdés: mi a valószínűsége, hogy legalább két halat fogok ma (holnap)
- sok hal a tóban, függetlenül úszkálnak
- minden hal kis valószínűséggel kerül éppen a hálóba.

} → $X\sim Poi$, X: halak száma a hálóban

$e^{-\lambda} \approx 1/5 = P(X=0) = 1/5$ → $\lambda = -\ln 0,2 \approx 1,61$

$P(X\ge 2) = 1 - e^{-1,61} - 1,61\cdot e^{-1,61} \approx 1 - \frac{2,61}{5} \approx 0,48$

további példák:
- Spam üzenetek egy nap.
- telefonos ügyfélszolgálathoz befutó hívások egy nap
- sajtóhibák
- kalácsos mazsolaszemek

További tulajdonságok:

- $E(X) = \sum_{k=0}^\infty k\frac{1}{k!}e^{-\lambda}\lambda^k = \lambda\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k-1)!}e^{-\lambda}\lambda^{k-1} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$

faktoriális momentumok:
$E(X(X-1)\cdots(X-m+1)) = \sum_{k=m}^\infty k(k-1)\cdots(k-m+1)\frac{1}{k!}e^{-\lambda}\lambda^k = e^{-\lambda}\lambda^m\sum_{k=m}^\infty\frac{1}{(k-m)!}\lambda^{k-m} = \lambda^m$

$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2+\lambda \to Var(X) = EX^2-(EX)^2 = \lambda$

(medián ⇝ feladat. ($\lfloor\lambda\rfloor$ ill. λ és $\lambda-1$ ha egész))

Másik megj: kalapos probléma

$p_N^k = P$(pontosan k tel a helyére) $= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le N} P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}\cap A^c_{j_1}\cdots A^c_{j_{N-k}}) = \binom{N}{k} p^0_{N-k}\frac{(N-k)!}{N!}$

$= \frac{1}{k!}\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\dots\pm\frac{1}{(N-k)!}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-1}\frac{1}{k!}$ $\quad Poi(1)$.

A [illegible] baj? $P(A_i) = \frac{1}{N}$ $i=1,\dots,N$ $\quad P(A_i|A_k) = \frac{1}{N-1}$ aszimptotikusan független.

...lőadás)

...dics, Bernoulli Nszer itt?

...isson folyamat

...sztochasztikus folyamat ~ véletlen jelenségek változ...

...baleset, telefonhívás, beérkezések ~~szerencsés~~ "feldolgozás" "események"

...események száma egy időintervallumban ~ val. változó.

...: független val. változó } fogalma.

$o(h)$ ($o(1)$ jelentése)

A definíció Poisson folyamat

1. P(egy esemény egy h hosszúságú intervallumban) $= \lambda h + o(h)$
2. P(kettő vagy több ——) $= o(h)$
3. $I_1, \dots I_k$ diszjunkt intervallumok; $X_1 \dots X_k$: események száma az egyes intervallumokban független val. változók.

Egy $(0,T)$ hosszúságú intervallumban lévő események száma

$N(T) \sim Poi(\lambda T)$

$P(N(t) = k)$ számítása: rögzített $n \geq 1$. ($n \to \infty$)

$I_1^{(n)} \dots \quad I_k^{(n)} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \dots \quad (k = 1 \dots n) \qquad (h = \frac{t}{n})$

$D_k^{(n)} = \{ I_k^{(n)}$-ben kettő vagy több esemény$\}$ $\quad D^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{n} D_k^{(n)}$

$E_k^{(n)} = \{ I_k^{(n)}$-ben pontosan egy esemény$\}$

$N(t) = k$ $= \cancel{P(N(t) = k \text{ és } D)}$ $= P(\{N(t) = k\} \cap D) + P\{N(t) = k \cap D^c\}$ (I, II)

$\mathrm{I} \leq P(D) \leq \sum_{i=1}^{n} P(D_i) = n\, o(t/n) = t \frac{o(t/n)}{t/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\mathrm{II} = P(N(t) = k \mid D^c) \cdot P(D^c) = \binom{n}{k} p(n)^k (1-p(n))^{n-k} \cdot (1 - o(1)) \xrightarrow[\infty]{n \to} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$\to \quad \cancel{P(E_i^{(n)})} = \cancel{\lambda t/n + o(t/n)}$

$P(E_i^{(n)} \mid D_n^c) = \frac{\lambda t/n + o(t/n)}{1 - o(1)} = p(n) \to 0 \quad n \to \infty$

$P(E_i^c \mid D^c) = 1 - p(n) \qquad p(n)n \to \lambda t$

példa: hetente 2 földrengés átlagosan ...
(a) 2 héten belül több mint 2? (b) 1 héten belül nincs?

Geometriai: mint volt, láttuk $E(X) = 1/p \quad Var(X) = ?$

Van $E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p q^{k-1} = pq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} = pq \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$

$f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

$f'(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

$f''(q) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

$E(X^2) = \frac{2q}{p^2} + 1/p = \frac{2 - 2p + p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$

$Var(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2} \to D(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$

örökifjú: $P(X \geq k) = q^{k-1}$

$P(X > n) = q^n \qquad P(X \geq k+n \mid X > n) = \frac{q^{k+n-1}}{q^n} = q^{k-1} = P(X \geq k)$

Negatív binomiális $r \geq 1;\ p \in (0,1) \qquad X: r, r+1, r+2 \dots$

$P(X = k)$ = r-edik siker pontosan a k-adik alkalommal

$P(X = 0),\ P(X = 1) \dots \qquad P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$

F F F F (k)

$E(X) = r/p \quad Var(X) = r\frac{q}{p^2}$

Hipergeometriai | N golyó, M fehér, $N-M$ fekete, n húzás X: fehérek száma

$P(X = k) = \binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k} \binom{N}{n}^{-1} \qquad E(X) = n\frac{M}{N}$

„visszatevés nélküli mintavétel"

$E(X+Y) = \sum \sum (x_k + y_l) P(X = x_k \text{ és } Y = y_l) = \sum_k \sum_l x_k P(X = x_k \text{ és } Y = y_l) + \sum_l y_l \sum_k P(X = x_k \text{ és } Y = y_l) = EX + EY.$ mindig

X és Y függetlenek: $E(XY) = \left(\sum x_k P(X = x_k)\right) \sum_{l=1} y_l P(Y = y_l) = EX \cdot EY$

Ezért: $E(X+Y)^2 = EX^2 + EY^2 + 2E(XY) = EX^2 + EY^2 + 2EX\,EY$

$(E(X+Y))^2 = (EX + EY)^2 = (EX)^2 + (EY)^2 + 2EX\,EY$

$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 = Var X + Var Y$

negatív binom: $Y_1, Y_2 \dots Y_r$: várakozási idők a következő sikerig

binom: $\xi_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ i-edik kísérlet sikeres

hipergeom: $\xi_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ i-edik fehér golyót kihúztuk $\quad E\xi_i = \frac{n}{N}$

(6. előadás)

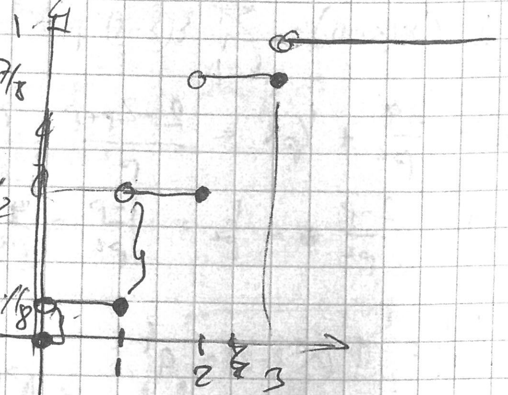
(Poisson folyamat várható érték, $E(X+Y)$, $E(XY)$, $Var(X+Y)$ stb.)

Mostantól: nem feltétlenül diszkrét

Eloszlásfv. $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F_X(x) = P(X < x)$ /Bevezetés.../

példa: 3 pénzfeldobás, X: fejek száma



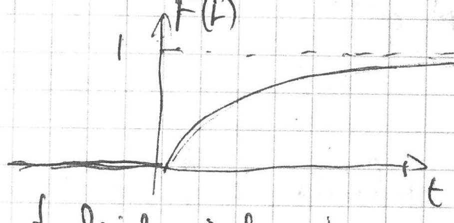
diszkrét val. változó eloszlásfv-e

monoton nő, lépcsős fv: ugrások: x_k-knál

nagysága: $P(X = x_k)$

másik példa /folyt./ első földrengés ideje Poisson folyamatnál

$$P(T < t) = P(N(t) > 0) = 1 - P(N(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$$



folytonos val. változó

általános tulajdonságok:

1. monoton nő
2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
4. balról folytonos

Biz:

1. legyen $x_1 < x_2$, ekkor $\{X < x_1\} \subset \{X < x_2\}$

$F(x_1) = P(X < x_1) \le P(X < x_2) = F(x_2)$

2. ~~Legyen $a_n \to \infty$ sorozat~~ monotonitás miatt, növekvő események

$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} P(X < n) = P(\lim_{n\to\infty} \{X < n\})$

3. hasonlóan

4. $y \in \mathbb{R}$ rögzített

$\lim_{x\to y-0} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(y - 1/n) = \lim_{n\to\infty} P(\{X < y - 1/n\}) = P(\bigcup_{n} \{X < y - 1/n\}) = P(X < y) = F(y)$

Mire jó? ez egy fix fv., nem függ X értékétől! (karakterizál!)

Hajtsa azt részletesebben:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

Sűrűségfv.

Def X abszolút folytonos, ha $\exists\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hogy:

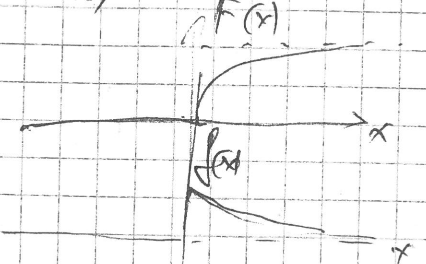
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ $\quad f(x)$: X sűrűségfüggvénye.

/ derivált fv.: $f(x)$-nek $F(x)$ primitív függvénye ~ ismétlés lehet... /

$F(b) - F(a) = P(a \le X < b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

/Newton–Leibniz formula./

példa: $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



minden Borel halmazra: $P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$

$P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén: $f(x) = F'(x)$ ~ jelentése: $P(a \le X < a + \varepsilon) \approx f(a)\cdot\varepsilon$

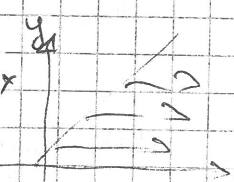
tulajdonságai: $f(x) \ge 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Várható érték! $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ (ha létezik) ⟶ $\pm\infty$ / nem értelmezett.

általánosítás nemnegatív X-re

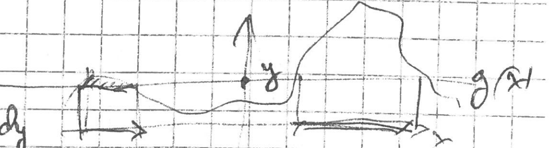
$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > y)\,dy = \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} f(x)\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{x} f(x)\,dy\,dx = \int_0^{\infty} x f(x)\,dx$$



így: $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$

ebből nemnegatív g-re

$$E(g(X)) = \int_0^{\infty} P(g(X) > y)\,dy = \int_0^{\infty} \int_{x:\, g(x) > y} f(x)\,dx\,dy = \iint_{(x,y):\, 0 < y < g(x)} f(x)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{g(x)} f(x)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$$



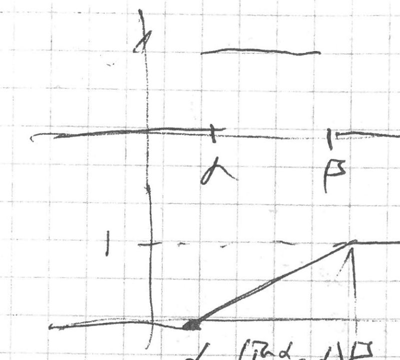
szokásos módon: $E(aX + b) = aE(X) + b$, $\quad Var(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$, $\mu = E(X)$

$D(X) = \sqrt{Var(X)}$ $\quad Var(aX + b) = a^2 Var(X)$, $D(aX+b) = |a| D(X)$. (gyakorlat!)

Nevezetes eloszlások: egyenletes

$\alpha<\beta$; (α,β)-n egyenletes: $f(x)=\begin{cases} c=\frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha\le x\le\beta \\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha\le x\le\beta \\ 1 & x>\beta\end{cases}$

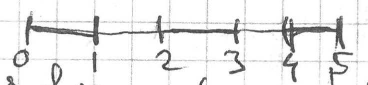


$(0,1)$-re:

$\boxed{E(X)}=\int_0^1 x\,dx = 1/2$
$E(X^2)=\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$
$\boxed{\mathrm{Var}\,X} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$

$[\alpha,\beta]$-re: $Y=(\beta-\alpha)X+\alpha \to E(Y)=\frac{\beta+\alpha}{2}$ $\quad \mathrm{Var}(Y)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$

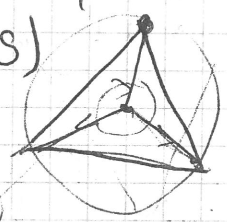
pl: $(0,5)$-n egyenletes $\to P(\text{egészrésze páros})=\frac{3}{5}.$



$\frac{\text{kedvező hossz}}{\text{teljes hossz}}$ ~> magasabb dimenzió: terület / térfogat.

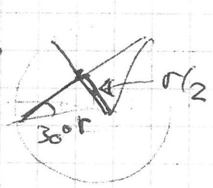
Bertrand-féle paradoxon

„Egységkörbe rajzolt ~~húr~~ ~~mikor~~ véletlen húr mikor hosszabb, mint a körbe írt szabályos Δ oldala? (Joseph Bertrand, 1888)



(1) Két független, egyenletes eloszlású véletlen pont a körön. → Egyik pontot rögzítsük, másik pont egyenletesen.
$P(\text{véletlen egy a csúcs és körül, értéke } 2\pi/3 \text{ és } 4\pi/3 \text{ közötti}) = 1/3$

(2) Húr felezőpontja véletlen sugáron egy ~~sugáron~~ a körlapon.



$P(\text{középpont egy helye } (0,R)\text{-en belül } (R/2,R)) = 1/2$

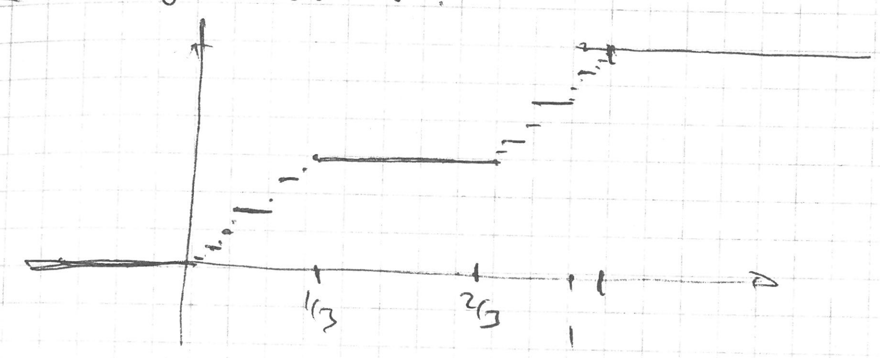
(3) Húr felezőpontja véletlen a körlapon
$P(\text{nagy körlapon belül kis körlap}) = \frac{(R/2)^2\pi}{R^2\pi} = 1/4$

(7. előadás)

$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$ ld.

• Bertrand paradoxon ld.

példa: szinguláris eloszlás



1 ha $x\ge 1$
$1/2$ ha $1/3\le x\le 2/3$
0 ha $x\le 0$
$3/4$ $\quad 7/9 \le x \le 8/9$
$1/4$ $\quad 1/9 < x \le 2/9$

Észrevesz: • sima halmazon ... folytonos ... kifejthető
• megdarálva ... :
$1/3 + 2/9 + 4/27 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=1$

$F(x)$ ~> folytonos
~> teljesíti az (1)-(3) tulajdonságokat
~> $F'(x)$, ha létezik, 0 valamely m.m. x-re.
ha $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $\quad f(t)=F'(t)$ m.m. $\to 0$ m.m. ↯

ördög lépcső

$Y\in(0,1)$ egyenletes: $0.y_1y_2y_3\ldots$ bináris kifejtés. $y_i=0 \to x_i=0$; $y_i=1\to x_i=2$

$X=0.x_1x_2\ldots$ olvassuk le 3-as számrendszerben.
(X „egyenletes a feltételes Cantor halmazon")

Normális eloszlás

~~X sta~~ Z standard normális, ha sűrűségfv-e $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$
eloszlásfv-e $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt \Rightarrow$ táblázat.

$\Phi(0)=1/2$
$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ (szimmetria)