DIPLOMAMUNKA

Kvantum rendszerek állapotrekonstrukciója

Szántó András

Témavezető: Dr. Petz Dénes egyetemi tanár

BME Matematikai Analízis Tanszék

BME, 2007. december

Kivonat

Kvantum állapotbecsléssel kapcsolatos vizsgálatok során adódott az a matematikai probléma, hogy egy összetett rendszerhez tartozó mátrixalgebra hogyan bontható fel olyan részalgebrákra, melyek szintén mátrixalgebrák. A probléma a komplementáris mérések fogalmának részalgebrákra való kiterjesztéséhez is elvezet.

A dolgozatban részletesen tárgyaljuk a két kvantum bitől álló összetett rendszert leíró 4x4-es mátrixalgebra esetét. Megmutatjuk, hogy legalább hat részalgebra szükséges a teljes 4×4-es mátrixalgebra lineáris kifeszítéséhez, ha a részalgebrákat elemi tenzorokkal lehet generálni. Mind a hat részalgebra nem lehet (páronként) komplementáris, de négy páronként komplementáris részalgebra könnyen konstruálható. A lineáris kifeszítéshez egy ötödik részalgebrát véletlen unitérrel is generálhatunk.

Petz és Kahn bizonyították, hogy öt páronként komplememtáris részalgebra nem létezik. Erre az eredményre új bizonyítást adunk, és azt is megmutatjuk, hogy a négy komplementáris részalgebra ortogonális komplementuma egy maximális kommutatív algebra. Megmutatjuk továbbá, hogy az így nyert komplementáris részalgebrák unitér ekvivalensek egy elemi tenzorokkal generált algebra ötössel.

Felmerül a kérdés, hogy a 4×4-es mátrixalgebra a maximális kommutatív részalgebrák és 2×2-es mátrixalgebrával izomorf részalgebrák milyen páronként komplementáris kombinációival feszíthető ki. Erre a dolgozatban teljes diszkussziót adunk.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A kvantum rendszerek leírásának, állapot reprezentációjának és irányításának matematikai problémái napjaink méltán népszerű, elméletileg érdekes és gyakorlati szempontból is fontos kutatási területei. A kvantum rendszerek kezelésének matematikai problémáit az információátvitel újfajta módjai és a kvantumszámítógép elméleti megjelenése is motiválja [8, 7]. Az irányításhoz is szorosan kapcsolódó problémakör a kvantumrendszerek állapotbecslése, másszóval a kvantumtomográfia [2].

Amennyiben a rendszer egészére vonatkozó méréseket végzünk, akkor egy érdekes, és az irodalomban alaposan vizsgált kérdés az, hogy hány és milyen obszervábilis kell ahhoz, hogy az állapotot hatékonyan rekonstruálni tudjuk. Könnyű látni, hogy egy N szintű rendszer állapotrekonstrukciójához legalább $N^2 - 1/(N-1) = N+1$ obszervábilisra van szükség. Természetesen az obszervábiliseket többször is meg kell mérni, a endszer azonos módon preparált példányain, mivel a mérés kimenetele sztochasztikus.

Egy összetett kvantum rendszer állapota nem rekonstruálható az egyik részrendszer ismeretéből. Ha azonban a két részrendszer között kölcsönhatásokat kapcsolunk be, és az egyik rendszer állapotát többször megismerjük, akkor következtethetünk az öszetett rendszer eredeti állapotára. A dolgozatban két kvantum bitől álló összetett rendszert vizsgálunk, és célunk annak megállapítása, hogy minimálisan hány kölcsönhatásra van szükség a hatékony és teljes állapotrekonstrukcióhoz.

A hatékony állapotbecsléshez kapcsolódik a mérések komplementaritásának fogalma, amely széles irodalommal rendelkezik [18]. A komplementaritás heurisztikusan azt jelenti, hogy az egyik méréssel kapott információ ne tartalmazzon olyan részinformációt, amit már a másik méréssel megkaptunk. Amennyiben a részleges információt a kvantumrendszerről nem méréssel, hanem egy részrendszer ismeretével kapjuk, akkor egy másfajta, de hasonlónak mondható komplementaritási fogalom jelenik meg. Mivel a részrendszer matematikai szempontból részalgebrát jelent, részalgebrák komplementaritásáról beszélhetünk.

2. fejezet

A kvantummechanika matematikája

A kvantummechanika matematikai alapjait Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger és Paul Dirac nyomán Neumann János fektette le, erről írt könyve [6] még mára sem vesztette el aktualitását.

Az alábbiakban összefoglaljuk azokat a véges kvantummechanikai rendszerekre vonatkozó alapismereteket, melyek szükségesek a dolgozat megértéséhez. A részletes tárgyalás standard, matematikai szemléletű kvantummechanikai tankönyvekben megtalálható, lásd például [10, 11, 7].

2.1. Véges kvantummechanikai rendszerekről

Minden véges kvantummechanikai rendszerhez tartozik egy Hilbert-tér. A rendszer állapotait a Hilbert-téren értelmezett *statisztikus operátoroknak*, azaz 1 nyomú, pozitív operátoroknak feleltethetjük meg. Véges dimenziós esetben, azaz véges rendszerek esetében a statisztikus operátorokat *sűrűségi mátrixoknak* is nevezik.

Egy állapotot *tisztának* nevezünk, ha felírható $D = |x\rangle\langle x|$ alakban, ahol x egy egységvektor. Minden 1 rangú mátrix felírható ilyen alakban. A nem tiszta állapotokat *keverteknek* nevezzük. Az állapotok merőlegességét a Hilbert-Schmidt belső szorzattal értelmezzük:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^*B).$$

Egy rendszert N-szintűnek nevezünk, ha a hozzá tartozó Hilbert-tér $\mathbb{C}^N$.

Egy összetett rendszerhez tartozó Hilbert-tér az alrendszerekhez tartozó terek tenzorszorzata.

A mérést egy *obszervábilis*, azaz egy önadjungált operátor segítségével értelmezhetjük. A mérés eredménye az obszervábilis sajátértékeinek egyike, és a mérés után a rendszer tiszta állapotba kerül. Ha $A = \sum_i \lambda_i E_i$ egy obszervábilis spektrális felbontása, akkor a λ_i sajátérték valószínűsége $\mathrm{Tr} DE_i$, ahol D az állapot sűrűsége a mérés előtt, a mérés várható értéke pedig $\mathrm{Tr} AD$, melyre az $\langle A \rangle_D$ jelölést is használják.

Egy $H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ szorzattéren az

$$A_i = \overbrace{I \otimes \ldots \otimes I}^{i-1} \otimes A \otimes I \otimes \ldots \otimes I$$

obszervábilist felfoghatjuk egy, az i-edik komponensre koncentrált mérésnek. Ennek segítségével bevezethetjük a *redukált sűrűségeket*: D_i az i-edik redukáltja D-nek, ha $\mathrm{Tr} DA_i = \mathrm{Tr} D_i A$. A redukált sűrűség a marginális eloszlás analógiája, és ahhoz hasonlóan egy konkrét felbontáshoz tartozó redukált sűrűségek együttesen sem adnak teljes információt az állapotról.

A redukált sűrűségek kiszámolásához hasznos művelet a *parciális nyom*. Ha egy $H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ szorzattéren ható önadjungált operátorok között rögzítünk egy $\{B_1^{i_1} \otimes \ldots \otimes B_n^{i_n}\}_{i_1,\ldots,i_n}$ bázist, akkor a

$$\mathrm{Tr}_k(B_1^{i_1} \otimes \ldots \otimes B_n^{i_n}) = \mathrm{Tr}(B_k^{i_k})\, B_1^{i_1} \otimes \ldots \otimes B_{k-1}^{i_{k-1}} \otimes B_{k+1}^{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes B_n^{i_n}$$

kiterjed egy lineáris leképezéssé, és

$$D_i = \mathrm{Tr}_1 \ldots \mathrm{Tr}_{i-1} \mathrm{Tr}_{i+1} \ldots \mathrm{Tr}_n D\,.$$

2.2. Kvantum bit és állapotának reprezentációja

Az egyik legegyszerűbb kvantummechanikai rendszer a kvantum bit (röviden qubit, vagy másnéven feles spin). A hozzá tartozó Hilbert-tér $\mathbb{C}^2$. A $\mathbb{C}^2$ téren ható önadjungált mátrixok terében ortogonális bázist alkotnak $\sigma_0 := I$ és a

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli-mátrixok.

A Pauli-mátrixok önadjungáltak, nulla nyomúak, és teljesül rájuk a következő összefüggés:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \sigma_k \,,$$

ahol ϵ_{ijk} a Levi-Civita tenzor:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \exists j,k, \text{ hogy } i_j = i_k, \\ 1 & \text{ha } (i_1 i_2 \ldots i_n) \text{ páros permutáció}, \\ -1 & \text{ha } (i_1 i_2 \ldots i_n) \text{ páratlan permutáció}. \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\sigma_i^2 = \sigma_0, \quad \sigma_1\sigma_2 = \mathrm{i}\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = \mathrm{i}\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = \mathrm{i}\sigma_2.$$

Ebből adódik, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}^3$, akkor

$$(x \cdot \sigma)(y \cdot \sigma) = \langle x, y \rangle \sigma_0 + \mathrm{i}(x \times y) \cdot \sigma,$$

ahol a

$$\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$(z_1, z_2, z_3) \cdot \sigma := z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3$$

jelölést használtuk. Továbbá $\langle x, y \rangle$ a skaláris, $x \times y$ pedig a vektoriális szorzat.

Egy feles spin állapota felírható

$$\frac{1}{2}(I + \sum_{i=1}^{3} x_i \sigma_i)$$

alakban, ahol $x_i \in \mathbb{R}$. Ekkor a pozitivitás kritériuma ekvivalens a $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \leq 1$ egyenlőtlenséggel, és tiszta állapotot kapunk pontosan akkor, ha $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1$. Így az állapotok egy-egyértelműen megfeleltethetőek az $\mathbb{R}^3$-beli egységgömb pontjainak, és ez a megfeleltetés affin. Ezt a reprezentációt nevezzük *Bloch-gömbnek.*

A Bloch-gömbbel történő ábrázolás nagy előnye, hogy könnyen képszerűsíthető.

Ennek a reprezentációnak egy általánosításához, az *általánosított Bloch-vektorhoz* jutunk, ha egy N-szintű rendszer esetén rögzítünk egy $\{\rho_i\}_{i=1}^{N^2-1}$ bázist a $\mathbb{C}^N$ nulla nyomú önadjungált operátorai között, és a

$$D = \frac{1}{N} I + \sum_{i=1}^{N^2-1} \lambda_i \rho_i, \; \lambda_i \in \mathbb{R}$$

állapotnak a $\lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{N^2-1} \in \mathbb{R}^{N^2-1}$ vektort feleltetjük meg. A Bloch-vektorok tere $N \geq 3$ esetben nem olyan egyszerű, mint a Bloch-gömb, de mindig része az N-dimenziós egységgömbnek, és tetszőleges N-re a választott bázis bizonyos strukturális konstansaitól függő egyenlőtlenségek formájában pontosan megadható [3].

3. fejezet

Kvantumrendszer állapotának rekonstrukciója

Az n kvantum bitből álló rendszert az $M_{2^n}(\mathbb{C}) = M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \cdots \otimes M_2(\mathbb{C})$ szorzat algebrával írjuk le, amelynek $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}I \cdots \otimes \mathbb{C}I$ részalgebrája felel meg az első bitnek. Ha a teljes rendszer sűrűsége D^0, akkor a

$$D_1^0 = \mathrm{Tr}_{23\cdots n} D$$

redukált sűrűség adja meg az első bit állapotát. A D_1^0 sűrűségi mátrixot az első biten végrehajtott mérések révén megismerhetjük.

A rendszeren bekapcsolt kölcsönhatás egy U_i unitér transzformációnak felel meg, amely a D^0 sűrűséget a $D^i := U_i D^0 U_i^*$ mátrixba viszi. Az ehhez tartozó redukált

$$D_1^i := \mathrm{Tr}_{23\cdots n} D^i \qquad (1 \leq i \leq k).$$

Így k különböző kölcsönhatást bekapcsolva (a rendszer külömböző példányain), redukáltak egy $\{D_1^i\}_{i=1}^k$ sorozatához jutunk. A kérdés az, hogy mekkora legyen k minimálisan ahhoz , hogy az eredeti sűrűséget már meg tudjuk határozni.

A sűrűség helyett az első bit algebráját is transzformálhatjuk: tekintsük az

$$M_{2^n}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}_i$$

projekciókat, ahol $\mathcal{A}_0 =: M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}I \cdots \otimes \mathbb{C}I$ és $\mathcal{A}_i := U_i \mathcal{A}_0 U_i^*$. Világos, hogy $\mathcal{A}_0 \cong M_2(\mathbb{C})$, például a triviális

$$\iota_0(A \otimes I \cdots I) = A$$

izomorfizmussal, és legyenek az $\iota_i : \mathcal{A}_i \to M_2(\mathbb{C})$ izomorfizmusok az

$$\iota_i(A) = \iota_0(U_i^* A U_i)$$

képlettel értelmezve. Így egyértelműen megfeleltettük egymásnak a $D^0 \mapsto D_1^i$ leképezéseket és az $\mathcal{A}_i$ részalgebrákat.

Mivel $M_{2^n}(\mathbb{C})$ izomorf részalgebrái unitér kapcsolatban vannak, a feladatot átfogalmazhatjuk: az $M_{2^n}(\mathbb{C})$ algebrának olyan $\mathcal{A}_i$ részalgebráit keressük, melyek izomorfak az $M_2(\mathbb{C})$ algebrával, és lineárisan kifeszítik a teljes $M_{2^n}(\mathbb{C})$ algebrát, hiszen pontosan ebben az esetben határozzák meg egyértelműen a megfelelő redukáltak az eredeti sűrűséget.

Világos, hogy $I \in \mathcal{A}_i$ minden i-re, és így csak a $\mathbb{C}I$ altéren kívüli dimenziók érdekesek. Érdemes tehát bevezetni a

$$\underline{\dim}\,\mathcal{A} := \dim\,(\mathcal{A} \ominus \mathbb{C}I) = \dim\,\mathcal{A} - 1$$

nyomnélküli dimnenziót. Mivel $\underline{\dim} M_4(\mathbb{C}) = 2^{2n} - 1$, és $\underline{\dim} M_2(\mathbb{C}) = 3$, ezért legalább

$$\frac{2^{2n} - 1}{3}$$

részalgebrára mindenképp szükség van ahhoz, hogy a redukáltakból rekonstruáljuk a teljes rendszer sűrűségét. Azt kell tehát megmutatni, hogy ennyi elég is.

A továbbiakban az $M_2(\mathbb{C})$ algebrával izomorf részalgebrákat *F-részalgebrának* (itt az F a faktor szóból származik), a maximális kommutatív részalgebrákat pedig *M-részalgebrának* (MASA, Maximal Abelian Subalgebra) nevezzük.

3.1. Pauli-tripletek

P-unitérnek nevezünk egy önadjungált, nulla nyomú, unitér X mátrixot.

Egy $S = \{S_i\}_{i=1}^3 \subset M_{2^n}(\mathbb{C})$ P-unitér mátrixokból álló hármast *Pauli-tripletnek*, vagy *F-tripletnek* nevezünk, ha teljesül rájuk a Pauli-mátrixok szorzásszabálya, azaz

$$S_i S_j = \delta_{ij} I + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} S_k \qquad (3.1)$$

Ha (3.1) helyett az

$$S_3 = S_1 S_2$$

formula teljesül, és az S_i mátrixok páronként merőlegesek, akkor a hármast *M-tripletnek* hívjuk.

Világos, hogy egy X-triplet és az identitás által generált részalgebra X-részalgebra lesz, X=F,M, továbbá, hogy egy rekonstrukció egyértelműen megadható a megfelelő részalgebrákat generáló F-tripletekkel.

3.2. Elemi tenzorok esete

Elemi tenzornak nevezzük a $\sigma_{k(1)} \otimes \ldots \otimes \sigma_{k(n)}$ alakú szorzatokat.

A következő tétel mutatja, hogy két feles spin esetében elemi tenzorokból nem létezik minimális rekonstrukció.

1. Tétel. *Legyenek az $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^k$ algebrák az $M_4(\mathbb{C})$ algebra F-részalgebrái. Ha ezek a részalgebrák kifeszítik a teljes $M_4(\mathbb{C})$ algebrát, és minden $\mathcal{A}_i$ részalgebrát elemi tenzorokbol álló F-triplet generálja, akkor $k >= 6$*

Bizonyítás. Legyen valamelyik $\mathcal{A}_i$ a $\{T_1, T_2, T_3\}$ Pauli-triplet által generált F-részalgebra. Legyen $T_1 = \sigma_i \otimes \sigma_j$ és $T_2 = \sigma_k \otimes \sigma_l$,, ahol $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Ekkor

$$T_1 T_2 = -T_2 T_1$$

miatt

$$(\sigma_i \sigma_k) \otimes (\sigma_j \sigma_l) = -(\sigma_k \sigma_i) \otimes (\sigma_l \sigma_j)$$

teljesül. Mivel

$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} -\sigma_j \sigma_i, & \text{ha } i \neq j \\ I & \text{különben,} \end{cases}$$

így látszik, hogy $i = k$ és $j = l$ közül pontosan az egyiknek kell fennállnia, és minden ilyen F-részalgebra generátorában legalább az egyik tagnak $I \otimes \sigma_j$ vagy $\sigma_j \otimes I$ alakúnak kell lennie.

Viszont nyilván az sem lehet, hogy pontosan két ilyen tag van, mert

$$(\sigma_i \otimes \sigma_0)(\sigma_j \otimes \sigma_0) = \pm \mathrm{i} \sigma_k \otimes \sigma_0$$

is ilyen alakú, azaz három ilyen tagot kapnánk, illetve $(\sigma_i \otimes \sigma_0)$ és $(\sigma_0 \otimes \sigma_j)$ kommutálnak, így nem alkothatnak Pauli-tripletet.

A fentiek alapján a skatulya elvből és abból, hogy összesen három-három $\sigma_0 \otimes \sigma_j$ és $\sigma_j \otimes \sigma_0$ alakú elemi tenzor van, következik a tétel állítása. □

A tétel egy általánosítását Szőllősi Ferenc bizonyította [12] az alábbi tétel formájában:

2. Tétel. *Ha az n feles spinből álló rendszer minden redukáltját elemi tenzorokból álló Pauli-tripletekkel adunk meg, akkor több, mint $\frac{2^{2n}-1}{3}$ redukáltra van szükség.*

Bizonyítás. Világos, hogy egy elemi tenzor mátrix minden eleme tisztán valós vagy tisztán képzetes, mert az egyetlen Pauli-mátrixnak, amelynek képzetes elemei is vannak, minden eleme tisztán képzetes.

Ebből következik, hogy egy $\{T_1, T_2, T_3\}$ Pauli-tripletnek vagy egy vagy három tisztán képzetes tagja van. Legyen egy rekonstrukcióban az előbbiek száma N, az utóbbiaké M. Ekkor, mivel a tisztán képzetes önadjungált mátrixok altere $\frac{2^{2n}-2^n}{2}$ dimenziós, ezért

$$N + 3M = \frac{2^{2n} - 2^n}{2}$$

ami nem állhat egyszerre fent a minimalitásból következő

$$N + M = \frac{2^{2n} - 1}{3}$$

egyenlőséggel. □

3.3. Két kvantum bit rekonstrukciója

Az általános megoldás bemutatása előtt a példa kedvéért kitérünk a két kvantum bitből álló rendszer speciális esetére.

A 1. tétel szerint elemi tenzorokkal generált részalgebrákkal nem létezik minimális rekonstrukció, azonban nem minimális igen. Az alábbi hatos egy lehetséges megoldást mutat.

$$\begin{gathered}
\{\sigma_1 \otimes \sigma_1, \sigma_1 \otimes \sigma_2, I \otimes \sigma_3\} \\
\{\sigma_2 \otimes \sigma_2, \sigma_2 \otimes \sigma_3, I \otimes \sigma_1\} \\
\{\sigma_3 \otimes \sigma_3, \sigma_3 \otimes \sigma_1, I \otimes \sigma_2\} \\
\{\sigma_2 \otimes \sigma_2, \sigma_3 \otimes \sigma_2, \sigma_1 \otimes I\} \\
\{\sigma_3 \otimes \sigma_3, \sigma_1 \otimes \sigma_3, \sigma_2 \otimes I\} \\
\{\sigma_1 \otimes \sigma_1, \sigma_2 \otimes \sigma_1, \sigma_3 \otimes I\}
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Ez a rekonstrukció nem minimális, de jól áttekinthető a struktúrája. A rekonstrukcióban a Pauli-mátrixok indexeit testszőlegesen permutálva egy másik hasonló rekonstrukció kapható.

A következő négy Pauli-hármast 0 nyomú elemi tenzorok alkotják:

$$\begin{gathered}
\{I \otimes \sigma_1, \sigma_1 \otimes \sigma_2, \sigma_1 \otimes \sigma_3\} \\
\{I \otimes \sigma_2, \sigma_2 \otimes \sigma_3, \sigma_2 \otimes \sigma_1\} \\
\{\sigma_1 \otimes I, \sigma_2 \otimes \sigma_2, \sigma_3 \otimes \sigma_2\} \\
\{\sigma_2 \otimes I, \sigma_3 \otimes \sigma_1, \sigma_1 \otimes \sigma_1\}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Ha találunk hozzá egy olyan ötödik Pauli-hármast, hogy az azt alkotó mátrixok főátlója független, akkor egy teljes, és minimális rekonstrukciót kapunk. Erre egy példát Szőllősi Ferenc talált számítógépes kereséssel [12]:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -1 \\ -\mathrm{i} & -1 & -1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 & 1 & -\mathrm{i} \\ -1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

Az ötödik részalgebrát a fenti Hadamard-mátrixok [17] feszítik ki lineárisan.

Egy másik megközelítésben az ötödik részalgebrát véletlen unitér generálásával is kereshetjük [1].

3.4. Minimális rekonstrukció véletlen unitér transzformációkkal

Legyen $k = \frac{2^{2n}-1}{3}$. Könnyen látható, hogy azok a $W_1, W_2, \ldots, W_k$ unitér transzformációk, amelyekre az $W_i(I \otimes M_2(\mathbb{C}))W_i^*$ részalgebrák nem feszítik ki lineárisan az $M_{2^n}(\mathbb{C})$ algebrát egy alacsonyabb dimenziós részhalmazát alkotják az $U(2)$ Lie-csoport k. hatványának. Ezért ez a halmaz a Haar-mértékre nézve 0 mértékű kell, hogy legyen.

Ha tehát a W_i unitéreket a Haar-mérték szerint véletlenül választjuk, akkor a

$$\{W_i(I \otimes \sigma_j)W_i^*\}_{j=1}^{k}$$

Pauli-hármasok 1 valószínűséggel lineárisan függetlenek lesznek, és így az identitással együtt lineárisan kifeszítik az egész $M_{2^n}(\mathbb{C})$ algebrát [12, 1].

4. fejezet

Komplementaritás

A kölcsönösen torzítatlan bázisok fogalma a kvantummechanikai irodalomban Schwinger [20] munkája nyomán jelent meg, és fontos szerepet játszanak például a kvantumtomográfiában [18] és a kvantummechanika más területein [5]. A $\mathbb{C}^n$ vektortér $\{e_i\}_i$ és $\{f_i\}_i$ ortonormált bázisait akkor nevezzük *komplementárisnak* vagy *kölcsönösen torzítatlannak*, ha

$$|\langle e_i, f_i \rangle| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

teljesül minden i-re. Páronként kölcsönösen torzítatlan bázisok maximális száma nyitott kérdés. Könnyen belátható, hogy ez a szám nem haladhatja meg az $n+1$-et, és ismert, hogy ez prímhatvány dimenziókban konstrukcióval el is érhető [19].

A kölcsönösen torzítatlan bázisok páronként komplementáris, maximális kommutatív algebráknak felelnek meg: ha $\{B^j\}_j$ páronként kölcsönösen torzítatlan bázisok, akkor az $\mathcal{A}_j$ algebra a B^j bázisban diagonális mátrixok algebrája [9]. Legyenek $P_i \in \mathcal{A}_j$ minimális projekciók, ekkor

$$\mathrm{Tr} P_i P_j = \frac{1}{n},$$

ha $i \neq j$. A következő tétel ennek egy analógiája:

3. Tétel. *[12] Legyenek az $\mathcal{A}_1$ és az $\mathcal{A}_2$ részalgebrái az $M_n(\mathbb{C})$ algebrának, és legyenek izomorfak az $M_k(\mathbb{C})$ algebrával. Ekkor az $\mathcal{A}_1 \ominus \mathbb{C}I$ és az $\mathcal{A}_2 \ominus \mathbb{C}I$ alterek pontosan akkor ortogonálisak, ha minden $P_1 \in \mathcal{A}_1$ és $P_2 \in \mathcal{A}_2$ minimális projekcióra* $\mathrm{Tr} P_1 P_2 = \frac{n}{k^2}$.

A hasonlóság indokolja a következő elnevezést: azt mondjuk, hogy a fenti tételben szereplő $\mathcal{A}_1$ és az $\mathcal{A}_2$ részalgebrák *komplementárisak*, ha az $\mathcal{A}_1 \ominus \mathbb{C}I$ és az $\mathcal{A}_2 \ominus \mathbb{C}I$

alterek ortogonálisak. Azaz a komplementaritás fogalmát kommutatív részalgebrákról kiterjesztettük a faktoralgebrákra is.

A komplementáritás vizsgálata a nemkommutatív esetben indokolt: egyrészt talán összefüggést találhatunk a kommutatív esettel, másrészt azt sejtjük, hogy a komplementáris mérések hatékonyabb állapotrekonstrukciót tesznek lehetővé [18].

A komplementaritásra a továbbiakban $\perp_0$ jelölést is használjuk.

4.1. Hasznos unitérek

Felmerül a kérdés, hogy mikor lesz két részalgebra komplementáris. Valójában elég a $\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C})$ algebrával való komplementaritást vizsgálni, hiszen tetszőleges $U, W \in M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ unitér transzformációk esetén ha a $\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C})$ és $W(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))W^*$ algebrák komplementárisak, akkor nyilván az

$$U(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))U^* \quad \text{és} \quad UW(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))W^*U^*$$

algebrák is azok.

4. Tétel. *[14] Legyen $W = \sum_{ij} E_{ij} \otimes U_{ij}$ unitér mátrix, ahol $E_{ij}, U_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$, és $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. A $W(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))W^*$ algebra pontosan akkor komplementáris a $\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C})$ algebrával, ha $\{W_{ij}\}$ ortonormált bázist alkot a $M_n(\mathbb{C})$ mátrixok között.*

A tételbeli W unitér mátrixokat *hasznos unitéreknek nevezünk.*

Hasznos unitérre egy jó példa a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & \sigma_3 \\ \sigma_1 & \mathrm{i}\sigma_2 \end{pmatrix}$$

blokkmátrix alakban írt transzformáció.

Ha $\mathcal{B}$ maximális kommutatív részalgebra, akkor $U\mathcal{B}U^* \perp_0 \mathcal{B}$ pontosan akkor teljesül, ha U Hadamard mátrix. Ebből látható, hogy a hasznos unitér mátrixok felfoghatók a Hadamard mátrixok analógiájaként.

A tétel szerint k páronként komplementáris részalgebra létezése ekvivalens hasznos unitérek olyan $W_0 = I, W_1, W_2, \ldots, W_{k-1}$ családjának létezésével, hogy $W_i W_j^*$ is hasznos unitér.

Konstrukció

Hasznos unitérek konstrukciójára jól használható az alábbi módszer [20].

Legyen $\{|e_i\rangle\}_{i=0}^{n-1}$ egy bázis, $q = e^{\frac{i2\pi}{n}}$ és legyenek X és Y a következő unitér transzformációk:

$$X|e_i\rangle = \begin{cases} |e_{i+1}\rangle, & \text{ha } i \in \{0, 1, \dots, n-2\} \\ |e_0\rangle, & \text{ha } i = n-1 \end{cases}$$

$$Y = \sum_i q^i |e_i\rangle\langle e_i|.$$

Látható, hogy $YX = qXY$, vagy általánosabban

$$Y^j X^k = q^{jk} X^k Y^j$$

teljesül. Legyen

$$S_{j,k} = Y^j X^k = \sum_{i=0}^{n-1} q^{ij} |e_i\rangle\langle e_{i+k}|,$$

ahol az indexbeli összeadás modulo n értendő. Ekkor

$$S_{j,k} S_{l,m} = q^{kl} S_{j+l,k+m},$$

és $\mathrm{Tr} S_{j,k} = 0$, kivéve, ha $j = 0$, vagy $k = 0$, így a $\{S_{j,k} : 0 \leq j, k \leq n-1\}$ unitér mátrixok páronként ortogonálisak. Legyen

$$U_{ij} = c_{ij} S_{i,j},$$

ahol (c_{ij}) unitér. Ha

$$W = \sum_{ij} E_{ij} \otimes U_{ij},$$

akkor

$$(WW^*)_{ik} = \sum_j U_{ij} U_{kj}^* = \sum_j c_{ij} c_{kl}^* X^{i-k} = \delta_{ik} I$$

és W unitér mátrix. Másrészt $\mathrm{Tr} U_{ij} U_{ij}^* = |c_{ij}|^2 \mathrm{Tr} I = n|c_{ij}|^2$. Ha ez 1, akkor W egy hasznos mátrix lesz.

4.2. Komplementaritás két kvantum bit esetében

Felmerül a kérdés, hogy maximum hány páronként komplementáris F-részalgebrát találunk a két kvantum bit által alkotott rendszerhez tartózó $M_4(\mathbb{C})$ algebrában. Az

(3.3) konstrukció megad 4 páronként komplementáris F-részalgebrát az azokt generáló F-tripletekkel. Belátható, hogy ez a maximum. Ehhez az eredményhez a hasznos unitér mátrixok vizsgálatán keresztül juthatunk el.

Az su(n) Lie-algebra Cartan felbontásának nevezzük a $\mathcal{K}\oplus\mathcal{P}$ alakú felbontását, ahol

$$[\mathcal{K},\mathcal{K}] \subseteq \mathcal{K}$$

$$[\mathcal{K},\mathcal{P}] \subseteq \mathcal{P}$$

$$[\mathcal{P},\mathcal{P}] \subseteq \mathcal{K}$$

teljesülnek. Ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ egy maximális kommutativ részalgebra, akkor az SU(n) Lie-csoport elemei $W = K_1 N K_2$ alakban írhatók, ahol $K_1, K_2 \in \exp(\mathcal{K})$ és $N \in \exp(\mathcal{A})$ [15]. Az $n = 4$ speciális esetben a formula

$$W = (L_1 \otimes L_2)N(L_3 \otimes L_4)$$

alakban írható [16].

Az $M_4(\mathbb{C})$ algebra hasznos unitér mátrixai jól jellemezhetők az alábbi lemma segítségével:

1. Lemma. *Legyen $W \in M_4(\mathbb{C})$ hasznos unitér. Ekkor*

$$W = (L_1 \otimes L_2)N(L_3 \otimes L_4), \tag{4.1}$$

ahol $L_i \in M_2(\mathbb{C}), i = 1, \ldots, 4$ unitér mátrixok, és

$$N = e^{\mathrm{i}\sum_j \alpha_j \sigma_j \otimes \sigma_j} \in M_4(\mathbb{C}) \tag{4.2}$$

unitér, ahol az α_i paraméterek közül kettő $\pi/4 + k\pi/2$ alakú, a harmadik tetszőleges.

Bizonyítás. A (4.1), (4.2) képletek és az L_i, N mátrixok unitér volta W Cartan felbontásából adódik.

Egyszerű behelyettesítésből látszik, hogy a $W(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))W^*$ algebra nem függ az L_3, L_4 mátrixoktól, a $\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C})$ algebrával való komplementaritás pedig az L_1, L_2 mátrixoktól. Így feltehetjük, hogy $L_i = I$.

A 4. tétel alapján kapjuk, hogy

$$N = \sum_{i=0}^{3} c_i \sigma_i \otimes \sigma_i,$$

Itt

$$c_0 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \mathrm{i}\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3$$
$$c_1 = \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 + \mathrm{i}\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3$$
$$c_2 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 + \mathrm{i}\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3$$
$$c_3 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 + \mathrm{i}\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3,$$

és

$$|c_i|^2 = \frac{1}{4},$$

ahonnan számolással adódnak az α_i paraméterek megkötései [14]. □

Legyen $\mathcal{N}$ a lemmabeli N unitér mátrixok halmaza, és

$$\mathcal{N}_i = \{N \in \mathcal{N} : \alpha_i \text{ tetszőleges, a másik kettő } \pi/4 + k\pi/2 \text{ alakú}\}$$

2. Lemma. *Ha* $N_i \in \mathcal{N}_i, akkor N_i(I \otimes \sigma_i)N_i^* = \pm\sigma_i \otimes I$

Bizonyítás. Jelöljük $\mathcal{N}$ elemeit $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$-al a paraméterek függvényeként. A c_i paraméterek szimmetriájából adódik, hogy ha ρ egy permutáció, akkor

$$N(\alpha_{\rho(1)}, \alpha_{\rho(2)}, \alpha_{\rho(3)}) = \sum_{i=0}^{3} c_{\rho(i)}\sigma_i \otimes \sigma_i = \sum_{i=0}^{3} c_i \sigma_{\rho(i)} \otimes \sigma_{\rho(i)},$$

ezért elég a tétel állítását egy konkrét i-re belátni.

Legyen $N_{k,l}(\phi) = N(\pi/4 + k\pi/2, \pi/4 + l\pi/2, \phi) \in \mathcal{N}_3$. Ekkor $N_{k,l}(\phi)$ az alábbi alakú:

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}(k-l)\pi)e^{\mathrm{i}\phi} & 0 & 0 & \sin(\frac{1}{2}(k-l)\pi)\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\phi} \\ 0 & \sin(\frac{1}{2}(k+l)\pi)e^{-\mathrm{i}\phi} & \cos(\frac{1}{2}(k+l)\pi)\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\phi} & 0 \\ 0 & cos(\frac{1}{2}(k+l)\pi)\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\phi} & -\sin(\frac{1}{2}(k+l)\pi)e^{-\mathrm{i}\phi} & 0 \\ \sin(\frac{1}{2}(k-l)\pi)\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\phi} & 0 & 0 & \cos(\frac{1}{2}(k-l)\pi)e^{\mathrm{i}\phi} \end{pmatrix}.$$

Mivel $N_{k,l}(\phi) = -N_{(k+2),l}(\phi)$, illetve $N_{k,l}(\phi) = -N_{k,(l+2)}(\phi)$, ezért elegendő az $\{N_{k,l}(\phi) : (k,l) \in \{0,1\}^2\}$ transzformációkat vizsgálni, az alábbiak szerint:

$$N_{k,l}(\phi)(I \otimes \sigma_1)N_{k,l}^*(\phi) = (-1)^l \sin(2\phi)\sigma_1 \otimes I + (-1)^l \cos(2\phi)\sigma_2 \otimes \sigma_3,$$
$$N_{k,l}(\phi)(I \otimes \sigma_2)N_{k,l}^*(\phi) = (-1)^k \sin(2\phi)\sigma_2 \otimes I - (-1)^k \cos(2\phi)\sigma_1 \otimes \sigma_3,$$

$$N_{k,l}(\phi)(I\otimes\sigma_3)N^*_{k,l}(\phi)=(-1)^{k+l}\sigma_3\otimes I$$

Az egyenlőségekből látható, hogy valóban teljesül a lemma állítása. Látható az is, hogy az $N_{k,l}(\phi)(\mathbb{C}I\otimes M_n(\mathbb{C}))N^*_{k,l}(\phi)$ algebra nem függ k és l választásától. □

A 2. lemma egy fontos következménye a következő tétel:

5. Tétel. *Ha $\mathcal{A}_0,\mathcal{A}_1$ az $M_4(\mathbb{C})$ algebra F-részalgebrái és az $\mathcal{A}_0\perp_0\mathcal{A}_1$, akkor $\mathcal{A}_0$ és $\mathcal{A}'_1$ metszete nem triviális, ahol $\mathcal{A}'_1$ az $\mathcal{A}_1$ algebra kommutánsa.*

Bizonyítás. Feltehtjük, hogy $\mathcal{A}_1=\mathbb{C}I\otimes M_2(\mathbb{C})$, ekkor $\mathcal{A}'_1=M_2(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}I$. Van olyan $W=(L_1\otimes L_2)N$ hasznos unitér és $i\in\{1,2,3\}$, hogy $N\in\mathcal{N}_i$, és $\mathcal{A}_0=W(\mathbb{C}I\otimes M_n(\mathbb{C}))W^*$. Ekkor

$$(L_1\otimes L_2)N(I\otimes\sigma_i)N^*(L_1^*\otimes L_2^*)=\pm L_1\sigma_iL_1^*\otimes I\in\mathcal{A}'_1,$$

és $L_1\sigma_iL_1^*\neq cI$, hiszen σ_i spektruma $\{1,-1\}$. □

Ennek segítségével már könnyen adódik a fejezet fő eredménye:

6. Tétel. *Az $M_4(\mathbb{C})$ algebrának nincs 5 páronként komplementáris F-részalgebrája.*

Bizonyítás. Legyenek $\{\mathcal{A}\}_{i=1}^4$ F-részalgebrák. Ekkor $\underline{\dim}\mathcal{A}_i\cap(M_2(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}I)\geq 1$, és mivel $\underline{\dim}(M_2(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}I)=3$, ezért az $\mathcal{A}_i$ algebrák nem lehetnek páronként komplementárisak. □

A 6. tétel első bizonyítását Petz Dénes és Jonas Kahn adta [14].

Páronként komplementáris algebrák ortokomplementuma

Érdekes kérdés az, hogy a 4 F-részalgebra ortogonális komplementuma (az identitást hozzáadva) algebra struktúrával is rendelkezik-e, és ha igen, milyennel? Azt találtuk, hogy ez egy M-részalgebra lesz. Az itt bizonyított tételek segítségével azt is belátjuk, hogy ha 4 részalgebra páronként komplementáris, akkor azok unitér ekvivalensek egy elemi tenzorokkal generált részalgebra négyessel [13].

A továbbiak során feltesszük, hogy $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^3$ páronként komplementáris F-részalgebrái az $M_4(\mathbb{C})$ mátrixalgebrának. Az $\mathcal{A}_0=\mathbb{C}I\otimes M_2$ F-részalgebra kommutánsa az $\mathcal{A}'_0=$

$M_2 \otimes \mathbb{C}I$ részalgebra, $\mathcal{A}_i = W_i \mathcal{A}_0 W_i^*, W_i \in \mathcal{W}$, és $\mathcal{A}_i' = W_i \mathcal{A}_0' W_i^*$ az $\mathcal{A}_i$ F-részalgebra kommutánsa.

3. Lemma. *Az $\mathcal{A}_i' \cap \mathcal{A}_j, i \neq j$ metszet legalább kétdimenziós altere az $M_4(\mathbb{C})$ térnek.*

Bizonyítás. A W_i^* unitér mátrixszal konjugálva az $\mathcal{A}_0' \cap W_i^* W_j \mathcal{A}_0 W_j^* W_i, i \neq j$ metszethez jutunk, ami az 5. tétel alapján nem triviális, hiszen $W_i^* W_j \in \mathcal{W}$ az $\mathcal{A}_i$ részalgebrák komplementaritása miatt. □

4. Lemma. *Léteznek olyan $A_0^i \in A_0' \cap A_i, i = 1, 2, 3$ mátrixok, hogy $\{A_0^i\}_{i=1}^3$ egy Pauli-hármas.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{A}_0' \cap \mathcal{A}_i$ metszet egy kétdimenziós kommutatív részalgebra, így van olyan önadjungált, nulla nyomú, unitér A_i^0 mátrix, hogy az $\mathcal{A}_0' \cap \mathcal{A}_i$ részalgebrát I és A_0^i kifeszítik. Ha $A_0^i = x_i \cdot \sigma \otimes I, x_i \in \mathbb{R}^3$, akkor az $\mathcal{A}_i$ részalgebrák komplementaritása miatt az x_i egységvektorok merőlegesek, hiszen

$$\mathrm{Tr}(x_i \cdot \sigma \otimes I)(x_j \cdot \sigma \otimes I) = \langle x_i, x_j \rangle \mathrm{Tr}(I \otimes I),$$

és ezért A_0^3 az előjel megváltoztatásával választható úgy, hogy

$$A_0^1 A_0^2 = \mathrm{i}(x_0^1 \times x_0^2) \cdot \sigma = \mathrm{i} x_0^3 \cdot \sigma = \mathrm{i} A_0^3$$

teljesüljön. Már csak az kell, hogy az A_0^i mátrixok antikommutálnak, ami szintén teljesül:

$$A_0^i A_0^j = \mathrm{i}(x_0^i \times x_0^j) \cdot \sigma = -\mathrm{i}(x_0^j \times x_0^i) \cdot \sigma = -A_0^j A_0^i, i \neq j.$$

□

Triviálisan adódik a következő lemma:

5. Lemma. *Léteznek olyan $A_j^i \in A_j' \cap A_i, i \neq j$ mátrixok, hogy $\{A_j^i\}_{i \neq j}$ Pauli-hármas.*

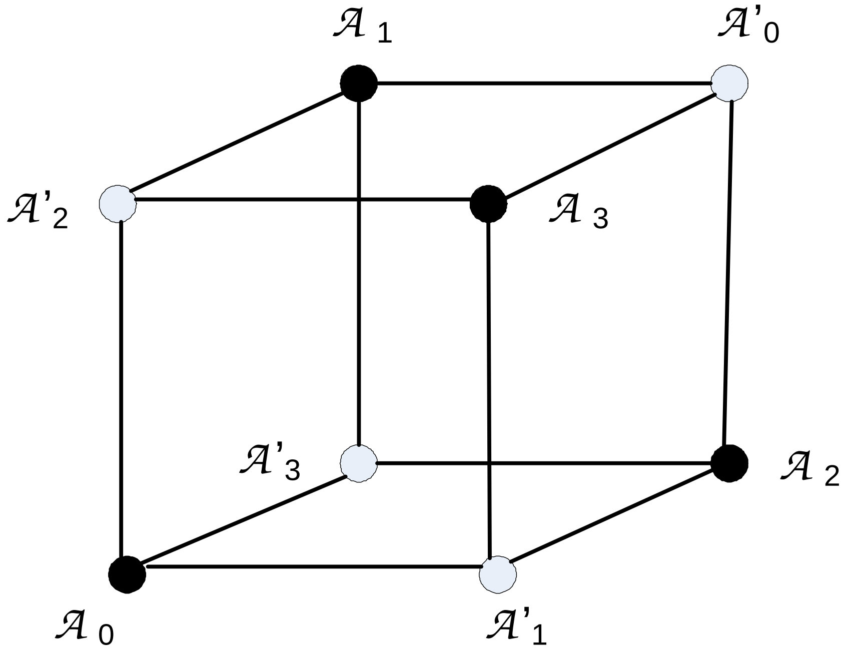
Azt kaptuk, hogy a következő táblázat sorai Pauli-hármasok:

$$\begin{array}{cccc} \star & A_0^1 & A_0^2 & A_0^3 \\ A_1^0 & \star & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^0 & A_2^1 & \star & A_2^3 \\ A_3^0 & A_3^1 & A_3^2 & \star \end{array} \tag{4.3}$$

6. Lemma. *A (4.3) táblázat oszlopai előjeltől eltekintve Pauli-hármasok.*

Bizonyítás. Az $\{\mathcal{A}'_i\}_{i=0}^3$ részalgebrák is páronként komplementárisak. Az $\mathcal{A}''_j = \mathcal{A}_j$ és az $\mathcal{A}'_i$ részalgebrák metszete szintén nem triviális, például az A_i^j mátrix benne van. Rögzített j-re az A_i^j $(i \neq j)$ unitér mátrixok előjel erejéig Pauli-hármast alkotnak. $\square$

A következő ábra jól szemlélteti a részalgebrák és azok metszeteinek struktúráját.



A csúcsokban találhatók a részalgebrák, illetve azok kommutánsai. Összekötött csúcsokhoz tartozó részalgebrák metszete nem triviális. Az élek az A_i^j mátrixokat jelölik. Az egy csúcsból kiinduló élekhez tatrozó mátrixok Pauli-hármast alkotnak.

A következő lemma triviálisan adódik, ha az ábrán három, szomszédos, nem egy csúcsból induló éleknek megfelelő mátrixok szorzatát vizsgáljuk.

7. Lemma. *Ha* $|\{i, l, k, m\}| = 4$ *és* $|\{i, j, k, n\}| = 4$*, akkor teljesülnek:*

$$A_n^i A_k^l = \pm A_j^i A_k^m$$

$$A_i^n A_l^k = \pm A_i^j A_m^k$$

Így már rátérhetünk az ortokomplementum vizsgálatára. A továbbiakra nézve fontos észrevétel, hogy $A_i^j \in \mathcal{A}_j$ és $A_j^k \in \mathcal{A}_j'$, így ezek az operátorok kommutálnak.

7. Tétel. *A $\{B_i^j = A_i^j A_j^i : i \neq j\} \cup \{I\}$ mátrixokkal generált $\mathcal{C}$ részalgebra maximális kommutatív részalgebra.*

Bizonyítás. A $\mathcal{C}$ algebrát lineárisan kifeszítik az $\{B_i^j : i \neq j\}$ mátrixok és az identitás, hiszen ha i, j, ℓ, m különbözők, akkor a 7. lemma felhasználásával kapjuk, hogy

$$B_i^j B_\ell^m = \pm I,$$

$$B_i^j B_i^\ell = \pm B_i^m$$

Mivel $(B_i^j B_\ell^m)^2 = I$, ezért B_i^j és B_ℓ^m kommutálnak, továbbá B_i^j és B_i^ℓ is kommutálnak, hiszen A_i^j kommutál az A_j^i és az A_ℓ^i mátrixokkal, antikommutál az A_i^ℓ mátrixszal, és az A_j^i mátrixra is hasonló felcserélési szabályok teljesülnek.

Az $\mathcal{C}$ részalgebrát kifeszítik a B_0^1, B_0^2, B_0^3, I mátrixok, így négy dimenziós. □

A továbbiakban az $A_i^i = A_0^i A_i^0$ jelölést alkalmazzuk.

8. Tétel. *Az $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^3 \cup \{\mathcal{C}\}$ részalgebrák páronként komplementárisak.*

Bizonyítás. Ha i, j, k, ℓ különbözők, akkor

$$\mathrm{Tr} A_i^j (A_i^j A_j^i) = \mathrm{Tr} A_j^i = 0$$

és

$$\mathrm{Tr} A_k^\ell (A_i^j A_j^i) = \pm \mathrm{Tr} A_k^\ell (A_k^l A_\ell^k) = \pm \mathrm{Tr} A_\ell^k = 0.$$

Továbbá, mivel $\mathcal{A}_k$ és $\mathcal{A}_i$ komplementárisak, $A_i^k \perp A_j^i$, és így

$$\mathrm{Tr} A_i^\ell (A_i^j A_j^i) = \pm \mathrm{Im} \mathrm{Tr} A_i^k A_j^i = 0.$$

Összesítve

$$A_m^n \perp A_i^j A_j^i$$

minden $m \neq n$ és $i \neq j$ esetén. □

Beláttuk tehát, hogy az ortokomplementum mindig egy M-részalgebra. Megmutatjuk, hogy egy ilyen részalgebra ötös mindig unitér ekvivalens egy elemi tenzorokkal generált részalgebra ötössel.

8. Lemma.

$$A_i^j = \pm A_0^i A_j^0$$

Bizonyítás. A 7. lemma felhasználásaával belátható, hogy minden $k \neq i, m \neq j$ esetén

$$A_0^i A_j^0 \perp A_k^m,$$

így csak $A_0^i A_j^0 = cA_i^j$ lehet, viszont $(A_0^i A_j^0)^2 = I$ és $(A_0^i A_j^0)^* = A_0^i A_j^0$ miatt $c = \pm 1$. □

9. Tétel. *Létezik olyan* $U = U_1 \otimes U_2 \in M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$ *unitér mátrix, hogy az* $\{U\mathcal{A}_i U^*\}_{i=0}^3 \cup \{U\mathcal{C}U^*\}$ *részalgebrákat elemi tenzorok generálják.*

Bizonyítás. Mivel $A_0^i \in M_2 \otimes \mathbb{C}I$, és $A_i^0 \in \mathbb{C}I \otimes M_2$, ezért léteznek $U_1, U_2 \in M_2(\mathbb{C})$ unitér mátrixok, hogy

$$(U_1 \otimes U_2) A_0^i (U_1 \otimes U_2)^* = \sigma_i \otimes I,$$

$$(U_1 \otimes U_2) A_i^0 (U_1 \otimes U_2)^* = I \otimes \sigma_i$$

Ekkor a 8. lemma miatt

$$(U_1 \otimes U_2) A_i^j (U_1 \otimes U_2)^* = \pm \sigma_i \otimes \sigma_j,$$

tehát az összes részalgebra elemi tenzorokkal generálható. □

Komplementáris felbontások

Láttuk, hogy a 4×4-es mátrixalgebra felbontható 4 F-részalgebrára és 1 M-részalgebrára úgy, hogy ezek páronként komplementárisak. A következő M-tripletekből álló példa mutatja, hogy 5 páronként komplementáris M-részalgebra is adható:

$$\{\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}$$

$$\{\sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{32}\}$$

$$\{\sigma_{01}, \sigma_{10}, \sigma_{11}\} \tag{4.4}$$

$$\{\sigma_{02}, \sigma_{20}, \sigma_{22}\}$$

$$\{\sigma_{03}, \sigma_{30}, \sigma_{33}\}$$

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy milyen egyéb komplementáris felbontások adhatók F- és M-részalgebrákkal.

Először a 5. Tétel egy általánosítását bizonyítjuk, melynek érdekessége az is, hogy nem használja a Cartan-felbontást.

10. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ az $M_4(\mathbb{C})$ algebra F-részalgebrája és $\mathcal{A}'$ az $\mathcal{A}$ algebra kommuntánsa.*

(a) Ha $\mathcal{B}$ M-részalgebra, akkor $\mathcal{A}' \perp_0 \mathcal{B}$.

(b) Ha $\mathcal{B}$ F-részalgebra, akkor vagy $\underline{\dim}\,(\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}) = 1$, vagy $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}$.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}I$. Legyen a $\mathcal{B}$ részalgebrát generáló triplet az (X, Y, Z). Ekkor X a $\sum_{i=0}^{3}(x_i \cdot \sigma) \otimes \sigma_i$ alakban írható, ahol $x_i \in \mathbb{R}^4$. Mivel

$$\begin{aligned} I &= X^2 = \sum_{i,j=0}^{3} (x_i \cdot \sigma)(x_j \cdot \sigma) \otimes \sigma_i \sigma_j \\ &= \sum_{i=0}^{3} \langle x_i, x_i \rangle I \otimes I \\ &\quad + \Big(\mathrm{i}(x_1 \cdot \sigma)(x_2 \cdot \sigma) - \mathrm{i}(x_2 \cdot \sigma)(x_1 \cdot \sigma) + (x_0 \cdot \sigma)(x_3 \cdot \sigma) + (x_3 \cdot \sigma)(x_0 \cdot \sigma)\Big) \otimes \sigma_3 \\ &\quad + (\ldots) \otimes \sigma_2 + (\ldots) \otimes \sigma_1 \\ &= \sum_{i=0}^{3} \langle x_i, x_i \rangle I \otimes I + 2\left(-(x_1 \times x_2) \cdot \sigma + \langle x_0, x_3 \rangle I\right) \otimes \sigma_3 + \ldots \end{aligned}$$

ezért

$$\langle x_0, x_i \rangle = 0$$

és

$$x_i \times x_j = 0 \tag{4.5}$$

teljesül minden $i, j \neq 0$ esetén.

Feltehetjük, hogy

$$X, Y, Z \notin \mathcal{A}', \tag{4.6}$$

hiszen másképp a (b) esetben készen lennénk, az (a) esetben pedig, ha például $X = I \otimes A$, akkor az X kommutánsát az

$$\{V \otimes A, V \otimes I\}_{V \in M_2(\mathbb{C})}$$

mátrixok generálják, és így $\mathcal{B} \perp_0 \mathcal{A}$ miatt

$$Y = V_1 \otimes A,$$

$$Z = V_2 \otimes A$$

teljesülne, amiből $V_1 = V_2$, azaz $Y = Z$ következne, ami lehetetlen.

Tehát nem lehet minden $x_i = 0$. Ekkor (4.5) miatt léteznek olyan $x, \mu \in \mathbb{R}^3$ nemnulla vektorok, hogy

$$X = (x \cdot \sigma) \otimes (\mu \cdot \sigma) + x_0 \cdot \sigma \otimes I,$$

és hasonlóan

$$Y = (y \cdot \sigma) \otimes (\lambda \cdot \sigma) + y_0 \cdot \sigma \otimes I,$$

$$Z = (z \cdot \sigma) \otimes (\gamma \cdot \sigma) + z_0 \cdot \sigma \otimes I.$$

Kiszámítjuk az XY szorzatot az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}
XY &= (x \cdot \sigma)(y \cdot \sigma) \otimes (\mu \cdot \sigma)(\lambda \cdot \sigma) + (x \cdot \sigma)(y_0 \cdot \sigma) \otimes \mu \cdot \sigma \\
&\quad + (x_0 \cdot \sigma)(y \cdot \sigma) \otimes \lambda \cdot \sigma + (x_0 \cdot \sigma)(y_0 \cdot \sigma) \otimes I \\
&= -(x \times y) \cdot \sigma \otimes (\mu \times \lambda) \cdot \sigma + (\langle x, y \rangle \langle \mu, \lambda \rangle + \langle x_0, y_0 \rangle) \, I \otimes I \\
&\quad + I \otimes (\langle x, y_0 \rangle \mu + \langle x_0, y \rangle \lambda) \cdot \sigma \\
&\quad + i((\langle \mu, \lambda \rangle (x \times y) + (x_0 \times y_0)) \cdot \sigma \otimes I + I \otimes \langle x, y \rangle (\mu \times \lambda) \cdot \sigma \\
&\quad + (x \times y_0) \cdot \sigma \otimes \mu \cdot \sigma + (x_0 \times y) \cdot \sigma \otimes \lambda \cdot \sigma)
\end{aligned}$$

Mivel $\mathrm{Tr} XY = 0$, ezért $\langle x, y \rangle \langle \mu, \lambda \rangle + \langle x_0, y_0 \rangle = 0$.

Az (a) esetben XY önadjungált, így

$$\begin{aligned}
Z = XY &= -(x \times y) \cdot \sigma \otimes (\mu \times \lambda) \cdot \sigma \\
&= z \cdot \sigma \otimes \gamma \cdot \sigma
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
ZX = Y &= (z\cdot\sigma)(x\cdot\sigma)\otimes(\gamma\cdot\sigma)(\mu\cdot\sigma) + (z\cdot\sigma)(x_0\cdot\sigma)\otimes I \\
&= -(z\times x)\cdot\sigma\otimes(\gamma\times\mu)\cdot\sigma \\
&\quad + (\langle z,x\rangle\langle\gamma,\mu\rangle + \langle z,x_0\rangle)I\otimes I \\
&\quad + i((z\times x_0) + \langle\gamma,\mu\rangle(z\times x))\cdot\sigma\otimes I
\end{aligned}$$

alapján, kihasználva, hogy Y önadjungált, kapjuk, hogy $y_0 = 0$, és hasonlóan adódik $x_0 = z_0 = 0$ is. Ezzel az állítást beláttuk

A (b) esetben $Z = iXY$ önadjungált, így $(x \times y) = 0$, vagy $\mu \times \lambda = 0$, valamint $XY \perp_0 \mathcal{A}$ miatt $\langle x, y\rangle(\mu \times \lambda) = 0$. A (4.6) feltevésünk miatt x, y, μ, λ nem nullák, és így $(x \times y)$ és $\langle x, y\rangle$ nem lehetnek egyszerre nullák, azaz $\mu \times \lambda = 0$. Világos tehát, hogy λ, μ, γ párhuzamosak.

Az $\mathcal{A}$ részalgebra unitér transzformációjával elérhetjük, hogy az algebrát generáló tripletet az alábbi alakban írjuk fel:

$$X = (\alpha_x\cdot\sigma)\otimes(\mu\cdot\sigma) + (\beta_x\cdot\sigma)\otimes I$$

$$Y = (\alpha_y\cdot\sigma)\otimes(\mu\cdot\sigma) + (\beta_y\cdot\sigma)\otimes I$$

$$Z = (\alpha_z\cdot\sigma)\otimes(\mu\cdot\sigma) + (\beta_z\cdot\sigma)\otimes I,$$

ahol $|\mu| = 1$, $\alpha_x = (\sin\phi, 0, 0), \beta_x = (0, \cos\phi, 0)$, $\alpha_k \perp \beta_k, k \in \{x, y, z\}$, és teljesülnek a következő összefüggések is:

$$\alpha_z = \alpha_x \times \beta_y + \beta_x \times \alpha_y,$$

$$\alpha_z = \beta_x \times \beta_y + \alpha_x \times \alpha_y.$$

Itt α_y és β_y koordinátáival behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\alpha_z = (\cos(\phi)\alpha_y^3, -\sin(\phi)\beta_y^3, \sin(\phi)\beta_y^2 - \cos(\phi)\alpha_y^1),$$

$$\beta_z = (\cos(\phi)\beta_y^3, -\sin(\phi)\alpha_y^3, \sin(\phi)\alpha_y^2 - \cos(\phi)\beta_y^1).$$

A ZX szorzatot vizsgálva a következő egyenleteket kapjuk:

$$\alpha_y^T = \begin{pmatrix} \alpha_y^1 \\ \alpha_y^2 \\ \alpha_y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\phi)\alpha_y^1 - \cos(\phi)\sin(\phi)\beta_y^2 \\ \sin^2(\phi)\alpha_y^2 - \cos(\phi)\sin(\phi)\beta_y^1 \\ \alpha_y^3 \end{pmatrix}$$

$$\beta_y^T = \begin{pmatrix} \beta_y^1 \\ \beta_y^2 \\ \beta_y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\phi)\beta_y^1 - \cos(\phi)\sin(\phi)\alpha_y^2 \\ \sin^2(\phi)\beta_y^2 - \cos(\phi)\sin(\phi)\alpha_y^1 \\ \beta_y^3 \end{pmatrix}$$

Nyílván (4.6) miatt $\sin\phi \neq 0$.

Tegyük fel, hogy $\cos\phi \neq 0$. Ekkor $\beta_y^1 = -\cos(\phi)\alpha_y^2$, amiből $\alpha_y^2 = \sin(\phi)\cos(\phi)\alpha_y^2$ következik, és így $0 < \sin(\phi) < 1$ miatt kapjuk, hogy

$$\beta_y^1 = \alpha_y^2 = 0$$

és $\sin(\phi) = \cos(\phi)$. Hasonlóan adódik

$$\beta_y^2 = \alpha_y^1 = 0$$

is, és ez esetben a merőlegesség miatt $\beta_y^3\alpha_y^3 = 0$, és $\alpha_y \neq 0$ miatt $\beta_y = 0$. A koordinátákat α_z-be és β_z-be visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $Z = -X$, ami lehetetlen.

Tegyük fel most azt, hogy $\sin\phi = 1$, és $\cos\phi = 0$. Helyettesítés után azt kapjuk, hogy $\alpha_y^1 = \beta_y^1 = 0$. Ha $\beta_y = 0$, akkor $\alpha_z = 0$, ami ellentmond (4.6)-nek. Tehát $\beta_y \neq 0$, és így könnyen kiszámítható, hogy $\alpha_z \perp \beta_y$, valamint $\beta_z \perp \alpha_y$. De tudjuk, hogy $\beta_z \perp \alpha_z$ és $\alpha_y \perp \beta_y$, azaz azt kapjuk hogy β_y és β_z vagy α_z és α_y párhuzamosak. Mind az α, mind a β vektorok vektorok párhuzamosságból az következik, hogy valamilyen $X \neq 0$-ra $X \otimes I \in \mathcal{B}$. □

A tétel segítségével már könnyen jellemezhetők a komplementáris felbontások:

11. Tétel. *Legyenek $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^4$ páronként komplementáris X-részalgebrái az $M_4(\mathbb{C})$ mátrixalgebrának, $X \in \{F, M\}$, és legyen ezek közül az F-részalgebrák száma k. Ekkor $k \in \{0, 2, 4\}$, és ezek közül az összes érték lehetséges.*

Bizonyítás. A $k = 0$ esetre már mutattunk példát (4.4).

Ha $k = 1$, akkor legyen például $\mathcal{A}_0$ az F-részalgebra. Ekkor az $\{\mathcal{A}_i\}_i = 1^4$ részalgebrák komplementárisak az $\mathcal{A}_0'$ részalgebrára is, és így $\underline{\dim} \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{A}_i \leq 9$, ami ellentmond a páronkénti komplementaritásnak.

A $k = 2$ eset lehetséges, a

$$\{\sigma_0 \otimes \sigma_1, \sigma_0 \otimes \sigma_2, \sigma_0 \otimes \sigma_3, \},$$

$$\{\sigma_1 \otimes \sigma_0, \sigma_2 \otimes \sigma_0, \sigma_3 \otimes \sigma_0, \}$$

F-tripletek, és a

$$\{\sigma_1 \otimes \sigma_1, \sigma_2 \otimes \sigma_2, \sigma_3 \otimes \sigma_3, \},$$

$$\{\sigma_1 \otimes \sigma_2, \sigma_2 \otimes \sigma_3, \sigma_3 \otimes \sigma_1, \},$$

$$\{\sigma_1 \otimes \sigma_3, \sigma_2 \otimes \sigma_1, \sigma_3 \otimes \sigma_2, \}$$

M-tripletek megfelelő részalgebrákat határoznak meg.

A $k = 3$ esetben a $k = 1$ esethez hasonlóan látható, hogy a két M-részalgebra által kifeszített altér nyomnélküli dimenziója legfeljebb 5, ami ellentmond a komplementaritásuknak.

A $k = 4$ esetre jó példa a (3.3) F-tripletek és a

$$\{\sigma_1 \otimes \sigma_1, \sigma_2 \otimes \sigma_2, \sigma_3 \otimes \sigma_3, \}$$

M-triplet.

A 6. tételben bizonyítottuk, hogy $k = 5$ lehetetlen. $\square$

5. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban részletesen tárgyaltuk a két kvantum bitől álló összetett rendszert leíró 4x4-es mátrixalgebra esetét. Beláttuk, hogy lineáris kifeszítéshez egy ötödik részalgebrát, vagy mind az ötöt véletlen unitérrel generálhatjuk.

Petz és Kahn öt páronként komplememtáris részalgebra maximális számáról szóló tételére új bizonyítást adtunk, és azt is megmutattuk, hogy a négy komplementáris részalgebra ortogonális komplementuma egy maximális kommutatív algebra. Megmutatjuk továbbá, hogy az így nyert komplementáris részalgebrák unitér ekvivalensek egy elemi tenzorokkal generált algebra ötössel.

Megválaszoltuk a kérdést, hogy a 4×4-es mátrixalgebra a F- és M-részalgebrák milyen páronként komplementáris kombinációival feszíthető ki.

Ohno megmutatta, hogy $p \geq 3$ prímre és $k \geq 1$ egészre az $M_{p^{kn}}$ mátrixalgebrának konstruálható $\frac{p^{2kn}-1}{p^{2k}-1}$ páronként komplementáris, az M_{p^k} algebrával izomorf részalgebrája [22], ami a dimenziószámból adódó maximum. Felemrül a kérdés, hogy a $p = 2, k = 1$ eset miért ennyire különböző, továbbá, hogy mit állíthatunk a $p = 2, k > 1$ esetről, vagy ha p nem prím. A továbbiakban ezen esetek kutatását tervezzük, illetve bizonyos, az M-részalgebrák relatív entrópiájára vonatkozó eredményeket [21] szeretnénk általánosítani.

Irodalomjegyzék

[1] K. M. Hangos: Systems and control methods for quantum systems, `http://daedalus.scl.sztaki.hu/PCRG/quantum`, 2006.

[2] C. W. Helstrom: *Quantum Decision and Estimation Theory*, Academic Press, New York, 1976.

[3] G. Kimura: The Bloch-vector for N-level systems, *Physics Letters A*, **314**, 5-6, 339-349, 2003.

[4] A. Klappenecker, M. Rötteler: Constructions of mutually unbiased bases, in *Finite fields and applications*, pp. 137–144, eds. G. L. Mullen, A. Poli and H. Stichtenoth. Lecture Notes in Computer Science, **2948**. Springer-Verlag, 2004.

[5] K. Kraus: Complementarity and uncertainty relations *Phys. Rev.* D **35** 3070-5, 1987.

[6] J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, 1930.

[7] M. A. Nielsen, I. L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.

[8] M. Ohya, D. Petz: *Quantum Entropy and its Use*, Springer-Verlag, Berlin, 1993. 2nd ed. 2004.

[9] K. R. Parthasarathy: On estimating the state of a finite level quantum system, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **7**(2004), 607–617.

[10] D. Petz: *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*, Springer, 2008.

[11] Petz D.: *Lineáris Analízis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2001.

[12] D. Petz, K. M. Hangos, F. Szöllősi, A. Szántó: State tomography for two qubits using reduced densities, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 10901-10907. (2006)

[13] H. Ohno, D. Petz, A. Szántó: Quasi-othogonal subalgebras of 4×4 matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **425**, 109-118, (2007)

[14] D. Petz, J. Kahn: Complementary reductions for two qubits, *J. Math. Phys.* **48**(2006), 012107.

[15] D. D'Alessandro, F. Albertini: Quantum Symmetries and Cartan Decompositions in Arbitrary Dimensions, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **40**,10,2439 (2007)

[16] J. Zhang, J. Vala, K. B. Whaley, S. Sastry: A geometric theory of non-local two-qubit operations, *Phys Rev. A*, **67**, 042313 2003.

[17] W. Tadej, K. Zyczkowski: A concise guide to complex Hadamard matrices, *Open Syst. Inf. Dyn.* **13**(2006), 133–177.

[18] W. K. Wooters, B. D. Fields: Optimal state determinationby mutually unbiased measurements, *Ann. Phys.*, NY, **191** 363-81, (1989)

[19] A. Klappenecker, A. Rötteler: Constructions of Mutually Unbiased Bases *Lect. Notes Comput. Sci.* **2948** ,137-144, (2004)

[20] J. Schwinger: Unitary operator bases, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 46:570-579 (1960)

[21] M. Choda: Relative entropy for maximal abelian subalgebras of matrices is the entropy of unistochastic matrices, Internat. J. Math. (2007)

[22] H. Ohno: Quasi-orthogonal subalgebras of matrix algebras, magánközlés (2007)