

2013. május 30.

Bevezetés a lineáris analízisbe és alkalmazásaiba



Petz Dénes

E-mail: petz@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

Előszó	1
1. Lineáris terek és lineáris leképezések	3
1.1. Lineáris terek	3
1.2. Tenzorszorzatok	9
1.3. Mátrixok és sajátértékeik	14
1.4. Önadjungált mátrixok	19
1.5. Blokkmátrixok	22
1.6. Gyakorlófeladatok	24
2. Normált terek	27
2.1. Nevezetes normált terek	27
2.2. Banach-terek	36
2.3. Hilbert-tér	42
2.4. A duális tér	44
2.5. Bázis és frame	49
2.6. Spektrum	52
2.7. Multinormált terek	54
2.8. Polinomrendszerek	57
2.9. Gyakorlófeladatok	63
3. Hilbert-terek korlátos operátorai	68
3.1. A Hilbert-tér geometriája	68
3.2. Operátorok, funkcionálok és formák	70
3.3. Kompakt tartójú sima függvények	72
3.4. Az adjungált operátor	73
3.5. Tenzorszorzat	77

3.6. Nevezetes topológiák	80
3.7. Pozitív operátorok	81
3.8. Unitér operátorok	86
3.9. A Fourier-transzformáció	91
3.10. Rezolvens és spektrum	94
3.11. Operátorok függvényei	101
3.12. Önadjungált operátorok	104
3.13. A spektráltétel	105
3.14. Kompakt operátorok	112
3.15. Gyakorlófeladatok	116
4. Nemkorlátos operátorok	126
4.1. Zárt operátorok	126
4.2. Az adjungált	128
4.3. Önadjungált operátorok	132
4.4. Önadjungált kiterjesztések	135
4.5. Lényegében önadjungált operátorok	138
4.6. Sturm–Liouville-féle operátorok	142
4.7. A Laplace-operátor	146
4.8. Egyparaméteres unitér csoportok	151
4.9. Gyakorlófeladatok	155
5. A kvantummechanika axiómái	159
5.1. Állapotok és dinamikai változók	160
5.2. Összetett rendszerek	164
5.3. A mérés	168
5.4. Szuperszelekció	174
5.5. A projekciók alkotta logika	175
5.6. Időfejlődés	177
5.7. Gyakorlófeladatok	179
6. A feladatok megoldása	181
Függelék	200
A. Metrikus és topologikus terek	200

B.	Mérték és integrál	210
B.1.	A Riemann-integrál	210
B.2.	Az absztrakt Lebesgue-integrál	212
B.3.	A szorzatmérték	218
B.4.	Mértékek metrikus téren	221
C.	Csoportok	228
D.	Haar-mérték	234
Jegyzetek		242
Ajánlott irodalom		246
Tárgymutató		248

Előszó

Ez a könyv a lineáris analízisbe ad bevezetést, és alkalmazásként bemutatja a kvantumelmélet matematikai megalapozását. Bár feltételezzük, hogy az olvasó már elsajátította a lineáris algebrai alapokat, az első fejezet végigfut néhány, mátrixokkal kapcsolatos témakörön, részben ismétlésként, részben pedig azért, hogy a lineáris analízisnek a lineáris algebraától némileg különböző szemlélete érvényre jusson. A második fejezetben viszonylag kisebb hangsúlyt kapnak a normált és multinormált (más néven lokálisan konvex) terek, inkább a Hilbert-terek elméletének szentelünk nagyobb teret a harmadik fejezettől kezdve. A Hilbert-tér nagyon jó példa végtelen dimenziós topologikus vektortérre és a lineáris analízis módszereinek megmutatására. Az absztrakt Lebesgue-integrál fogalmát a lehetőségekhez képest elkerüljük, de az $\mathbb{R}^n$ -en négyzetesen integrálható függvények terét természetesen használjuk. Ezt a nehézséget igyekszik áthidalni a függelék, amely a topologikus terekre vonatkozó alapvető ismereteket összegyűjti, és egy tömörített, ugyanakkor elég teljes integrálméletet is tartalmaz. Az ortogonális polinomokat és más speciális függvényeket, továbbá bizonyos konkrét csoportok ábrázolásait fizikában való fontosságuk miatt részletesen tárgyaljuk. A negyedik fejezet a Hilbert-terek nemkorlátos operátoraiba ad bepillantást. A témák választása a kvantummechanika matematikai igényeihez igazodik. A könyv utolsó fejezete éppen a kvantummechanika megalapozását mutatja be, és a korábbi tisztán matematikai tételek és fogalmak itt fizikai interpretációt is kapnak.

A tárgyalásmód a bizonyítások helyett inkább a példákra teszi a fő hangsúlyt. A tipikus bizonyítási módszerek megjelennek, de számos tétel szerepel bizonyítás nélkül vagy egy egyszerűsített eset, illetve a bizonyítás gondolatmenetének tárgyalásával. A fejezetek végén gyakorlófeladatok bőséges mennyiségben találhatók. Változó nehézségűek, a legnehezebbekhez útmutatás is van. A szerző véleménye szerint a példák alapos áttanulmányozása és a hozzájuk hasonló gyakorlófeladatok egyéni megoldása nagyon fontos része a fogalmak és módszerek megértésének éppen úgy, mint az anyag peremértékfeladatokban, disztribúcióelméletben és az alkalmazások más területein való hasznosításának. A feladatok jelentős részének részletes megoldását a 6. fejezet tartalmazza. Azokat a gyakorlófeladatokat, amelyek megoldása meg van adva, ^M jelöli, a nehezebbeket pedig *.

A XX. század magyar matematikájában a lineáris és funkcionál analízis kiemelkedő szerepet játszott, hiszen például a magyar Riesz Frigyes a diszciplína egyik atyja volt, számos alapvető eredmény tőle származik. Neumann János nagyon sokirányú matematikai munkásságából a nemkorlátos operátorok elméletének megalapozása kapcsolódik a könyv anyagához. Ezekből az okokból kifolyólag, és csak úgy érdekességképpen is, néhány tudománytörténeti illusztráció és megjegyzés igyekszik az anyagot színesebbé tenni.

A könyv anyaga fokozatosan bővült, és évek munkájával állt össze. Sok segítséget kaptam a BME fizikus és matematikus hallgatóitól a hibák és pontatlanságok kiszűrésében. Doktorandusz hallgatóim, Andai Attila, Mosonyi Milán, Pitrik József és Réffy Júlia közreműködtek a gyakorlófeladatok megoldásainak leírásában.

Budapest, 2011. május

A szerző

1. Lineáris terek és lineáris leképezések

A lineáris tér fogalma a két- vagy háromdimenziós euklideszi tér messzemenő általánosítása. A téren van egy **algebrai struktúra**, az elemeket össze lehet adni, és számmal is meg lehet szorozni. Ezek a műveletek a vektorokra emlékeztetnek, és ez is oka annak, hogy a tér elemeit vektoroknak fogjuk nevezni, még akkor is, ha azok számos esetben függvények lesznek. Ebben a fejezetben elsősorban véges dimenziós vektorterekkel¹ és azok lineáris transzformációival foglalkozunk. Utóbbiak mátrixokkal adhatók meg. A fejezet célja a lineáris algebrai alapok megszilárdítása a végtelen dimenziós vektorterek tárgyalása előtt.

1.1. Lineáris terek

A **lineáris tér** olyan matematikai struktúra, amelynek elemeit **vektoroknak** nevezzük, a vektorok összeadhatók és számmal szorozhatók. A vektorok összeadása kommutatív és asszociatív művelet. Létezik egy **nulla vektor**, amely az $x + \underline{0} = x$ tulajdonsággal rendelkezik, x tetszőleges vektora a lineáris térnek. Természetesen az összeadás felcserélhetősége miatt $\underline{0} + x = x$ ugyancsak teljesül. Minden x vektornak van egy $-x$ -szel jelölt additív inverze, amelyet az $x + (-x) = \underline{0}$ tulajdonság jellemez. Ha λ egy szám, és x egy vektor, akkor adott a $\lambda \cdot x$ vektor a

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot x &= \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \\ \lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y\end{aligned}$$

disztributivitási szabályoknak eleget téve. Valós vagy komplex lineáris térről beszélünk annak megfelelően, hogy λ szerepében valós vagy komplex számok állnak. A számmal való szorzástól megköveteljük még

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \quad \text{és} \quad 1 \cdot x = x$$

teljesülést is. Levezethető, hogy $0 \cdot x = \underline{0}$ és $(-1) \cdot x = -x$.

Valós lineáris teret alkotnak a legfeljebb n -ed fokú valós együtthatós polinomok, komplex lineáris teret alkotnak az összes (z_1, z_2, z_3) komplex számhármassok a koordinátánkénti összeadásra és a számmal való koordinátánkénti szorzásra nézve. Mivel a lineáris tér elemeit vektoroknak nevezzük, a lineáris tér helyett **vektortérről** is szoktak beszélni. Nem okozhat gondot, hogy a továbbiakban $\lambda \cdot x$ helyett egyszerűen λx -et írunk, és a jelölésben nem teszünk különbséget a 0 szám és a $\underline{0}$ vektor között.

1. példa: Az $n \times m$ -es valós mátrixok valós lineáris teret alkotnak. (A mátrixokat elemenként adjuk össze, és elemenként szorozzuk meg a valós számokkal.) Az $n \times m$ -es komplex elemű mátrixok komplex lineáris teret alkotnak. $\square$

2. példa: Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Egy $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **tartója** az $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ halmaz lezárása, amit $\text{supp}(f)$ -fel fogunk jelölni. $C_0(\Omega)$ a kompakt tartójú folytonos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvények tere. Ez lineáris tér. Ha $f, g \in C_0(\Omega)$, akkor $f + g$ folytonos, és $\text{supp}(f + g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$. Mivel $\text{supp}(f)$ és $\text{supp}(g)$ kompakt, az egyesítésük is az, ezért $\text{supp}(f + g)$ is kompakt. $\lambda f \in C_0(\Omega)$ nyilvánvaló, ugyanis, ha $\lambda \neq 0$, akkor $\text{supp}(\lambda f) = \text{supp}(f)$. $\square$

Legyen V egy lineáris tér, és $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$. A $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ alakú vektorokat az $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorok **lineáris kombinációjának** nevezzük. A V lineáris tér **véges dimenziós**, ha van véges sok vektora, amelynek lineáris kombinációjaként a tér bármely vektora előáll. A fenti mátrixos példa véges dimenziós.² Jelölje E_{ij} azt az $n \times m$ -es mátrixot, amelynek i -edik sora j -edik eleme 1 és mindenütt másutt 0 áll. Az $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ **mátrixegységek** lineáris kombinációjaként minden mátrix előáll. A mátrixok tere tehát véges dimenziós. Nem véges dimenziós valós vektorteret alkotnak a valós számsorozatok vagy a $[0, 1]$ intervallumon folytonosan differenciálható valós függvények.

Egy lineáris tér olyan részhalmaza, amely elemeinek lineáris kombinációit is tartalmazza, maga is lineáris tér. Az eredeti tér **alterének** nevezzük.

3. példa: $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvények lineáris terében alteret alkotnak például a folytonosan differenciálható függvények vagy a polinomok. Nem alkotnak alteret a monoton növekvő folytonos függvények. $\square$

A V lineáris tér H részhalmaza **lineárisan független**, ha H 0-tól különböző $x_1, x_2, \dots, x_k$ vektoraira a

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$$

összefüggés csak a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ esetben áll fenn. Egy végtelen H vektorhalmaz pontosan akkor lineárisan független, ha minden véges részhalmaza is az.

4. példa: Az $x, x^2, x^3, \dots$ függvények lineárisan függetlenek az $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvények lineáris terében. Valóban, legyen $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$ egész számok növekvő sorozata és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 0-tól különböző számok. Ekkor

$$\lambda_1 x^{n_1} + \lambda_2 x^{n_2} + \dots + \lambda_k x^{n_k}$$

egy polinom, amelynek csak véges sok gyöke lehet $[0, 1]$ -ben, és így nem lehet azonosan 0. $\square$

Az olyan lineárisan független vektorrendszert, amelynek véges lineáris kombinációjaként a vektortér bármely eleme előáll, **bázisnak** nevezzük. Azt is mondhatjuk, hogy a bázis olyan vektorrendszer, amelynek véges lineáris kombinációjaként a vektortér bármely eleme egyértelműen áll elő. Egy vektortér két különböző bázisa ugyanolyan elemszámú. Ez a szám a vektortérre jellemző mennyiség, a tér **dimenziójának** nevezzük.

5. példa: A valós számhármassok $\mathbb{R}^3$ terében az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok bázist alkotnak, $\mathbb{R}^3$ háromdimenziós. $\square$

6. példa: Az $n \times m$ -es $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ mátrixegységek lineárisan függetlenek az $n \times m$ -es mátrixok terében, és bázist alkotnak. A tér tehát nm dimenziós. $\square$

Ha adott a V vektortérben egy $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázis, akkor minden vektor egyértelműen áll elő $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ alakban, és így egy $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ szám n -essel jellemezhető. (A számok valósak vagy komplexek aszerint, hogy V valós vagy komplex tér.)

Legyen $V_1, V_2, \dots, V_k$ a V lineáris tér altere. Azt mondjuk, hogy V ezeknek az altereknek a **direkt összege**, ha V bármely v vektora egyértelműen áll elő $v_1 + v_2 + \dots + v_k$ alakban úgy, hogy $v_i \in V_i$, $1 \leq i \leq k$. Ebben az esetben a $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$ jelölést használjuk.

7. példa: Tegyük fel, hogy V a V_1 és V_2 alterek direkt összege. Ekkor véve V_1 -ben egy tetszőleges $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ bázist és V_2 -ben egy tetszőleges $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ bázist, az $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_m$ vektorok V bázisát adják. $\square$

Legyen V_1 és V_2 két lineáris tér ugyanarra a skalár testre vonatkozóan, azaz mindkettő komplex vagy mindkettő valós. Az $A : V_1 \rightarrow V_2$ leképezést **lineárisnak** nevezzük, ha

$$A(x + y) = Ax + Ay \quad \text{és} \quad A(\lambda x) = \lambda Ax$$

minden $x, y \in V_1$ és minden λ skalár esetén. Komplex lineáris terek között a

$$B(x + y) = Bx + By \quad \text{és} \quad B(\lambda x) = \bar{\lambda} Bx$$

tulajdonságokkal rendelkező B leképezést **konjugált lineáris** transzformációnak nevezzük. A konjugált lineáris transzformációk ritkábban fordulnak elő, mint a lineárisak. Sok lineáris transzformációkra megfogalmazott kijelentés konjugált lineáris transzformációkra is igaz.

8. példa: Legyen a V valós lineáris tér bázisa $e_1, e_2, \dots, e_n$. Értelmezzünk egy $A : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést a

$$Vx = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \text{ha} \quad x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

képlettel. Ekkor A egy lineáris leképezés, amely koordinátázza a V vektorteret. $\square$

Legyen Az $A : V_1 \rightarrow V_2$ egy lineáris leképezés. Ennek $\text{Ker } A := \{v_1 \in V_1 : Av_1 = 0\}$ **magtere** V_1 , $\text{Rng } A := \{Av_1 : v_1 \in V_1\}$ **képtere** V_2 lineáris altere. Ha $\text{Rng } A$ véges dimenziós, akkor A -t **véges rangúnak** nevezzük. Ha V_1 vagy V_2 véges dimenziós, akkor A véges rangú. A képterének dimenziója A **rangja**.

9. példa: Legyen $V = V_1 + V_2$. Értelmezhetünk egy $A \in L(V)$ lineáris leképezést a következőképpen. Ha $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$ és $v_2 \in V_2$, akkor legyen $Av := v_1$. Ekkor A képtere V_1 , magtere V_2 . Ezt az A transzformációt a V_1 altérre való és a V_2 altérrel párhuzamos irányú **vetítésnek** mondhatjuk. $\square$

10. példa: Az $n \times n$ -es komplex mátrixok lineáris terén értelmezzünk egy Tr leképezést, amely egy mátrixhoz a diagonálisában lévő elemek összegét rendeli. Ez egy lineáris leképezés, ami számértékű, és **mátrixnyomnak** nevezik. A számértékű lineáris leképezéseket gyakran **lineáris funkcionálnak** hívják. $\square$

Lineáris leképezések kompozíciója is lineáris. A $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezések halmazát $L(V_1, V_2)$ -vel fogjuk jelölni. Az $L(V_1, V_2)$ halmaz maga is lineáris tér a megfelelő műveletekkel. Ha $A_1, A_2 \in L(V_1, V_2)$, akkor $A_1 + A_2$ -t az $(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x$ képlettel értelmezzük, és λA_1 értelmezése is hasonlóan nyilvánvaló: $\lambda A_1(x) = A_1(\lambda x)$.

Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ a V_1 tér bázisa és $f_1, f_2, \dots, f_m$ a V_2 tér bázisa. Ekkor az $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris transzformációt meghatározzák az $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m$ vektorok. Ezeknek a V_2 tér adott bázisa szerint kifejezhetők:

$$Ae_j = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m.$$

Az a_{ij} számokat téglalap alakú táblázatba írva kapjuk az A transzformáció mátrixát. a_{ij} az $m \times n$ -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme. A mátrix j -edik oszlopában az e_j bázisvektor képének koordinátái állnak. Ha $v \in V_1$ koordinátái $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ és Av koordinátái $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, akkor ezeket a számokat függőlegesen érdemes elrendezni. Így a mátrix szorzás szabálya érvényesül:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}$$

(a_{ij}) az A lineáris transzformációnak az adott bázisokra vonatkozó **mátrixa**. Ez a mátrix tehát a bázisoktól is függ, ugyanannak a transzformációnak más bázisokban különböző mátrixa van.

11. példa: Legyen A a 9. példa lineáris leképezése. Ha a V_1 altérben választunk egy $e_1, e_2, \dots, e_k$ bázist és a V_2 altérben egy $f_1, f_2, \dots, f_m$ bázist, akkor a V tér $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_m$ bázisában A mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

ahol a $(k + m) \times (k + m)$ méretű mátrix főátlójában k darab 1-es és m darab 0 van. $\square$

Ha V komplex vektortér, akkor lineáris funkcionáljainak $L(V, \mathbb{C})$ terét V **duálisának** nevezzük, és V^* -gal jelöljük. Valós lineáris tér duálisa a valós lineáris funkcionálok tere. Ha $e_1, e_2, \dots, e_n$ a V vektortér bázisa, akkor a V^* duálisban van egy természetes bázis:

$$e_k^*(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) := \lambda_k \quad (1 \leq k \leq n). \quad (1.1.1)$$

Ennek neve **duális bázis**. A véges dimenziós vektortér és duálisa között így egy, az adott bázistól függő, izomorfia van.

12. példa: Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ a V_1 vektortér, $f_1, f_2, \dots, f_m$ a V_2 vektortér bázisa és $A \in L(V_1, V_2)$. Ekkor a duális bázis segítségével az A transzformáció $[A_{ij}]$ mátrixának elemei

$$A_{ij} = f_i^*(Ae_j)$$

alakban adhatók meg. □

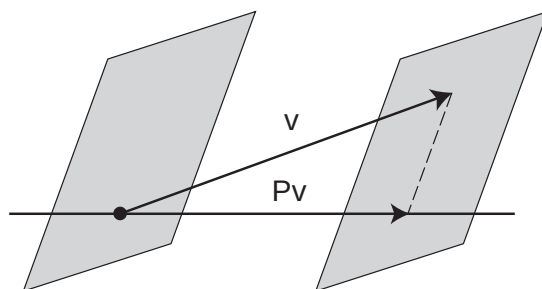
Ha $A \in L(V_1, V_2)$, akkor az

$$(A^t v_2^*)v_1 = v_2^*(Av_1) \quad (v_1 \in V_1, v_2^* \in V_2^*)$$

képlet egy $A^t \in L(V_2^*, V_1^*)$ lineáris transzformációt határoz meg. Ezt A **(algebrai) du-alitásának** nevezzük. A^t mátrixa a duális bázisokban A mátrixának **transzponáltja**, azaz $[A^t]$ i -edik sorának j -edik eleme $[A]$ j -edik sorának i -edik eleme.

Az $\mathbb{R}^n$ valós lineáris teret **euklideszi térnek** is szokás nevezni. Az euklideszi tér geometriai szempontból is lényeges, a későbbiekben főleg komplex terekkel foglalkozunk. Most az euklideszi terek bizonyos lineáris transzformációit nézzük meg részletesebben.

13. példa: Az altérre való vetítéssel már megismerkedtünk a 9. példában. Az ábrán az $\mathbb{R}^3$ tér egy vetítését szemléltjük. (Egy dimenziós altérre történik a vetítés egy adott síkkal párhuzamos irányba.) □



Ferde vetítés $\mathbb{R}^3$ -ban: A vízszintesen látható egydimenziós altérre történik a vetítés az árnyékolt két dimenziós altérrel párhuzamos irányban. A v vektor képe Pv

$\mathbb{R}^3$ a valós számhármassok három dimenziós vektortere, amin a lineáris struktúra mellett más is van. Az (x_1, x_2, x_3) vektor hossza

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

és az (x_1, x_2, x_3) , valamint (y_1, y_2, y_3) vektorok skaláris szorzata

$$\sum x_i y_i =: \langle x, y \rangle.$$

A skaláris szorzat lehetőséget ad két vektor által bezárt szög meghatározására is:

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

14. példa: $\mathbb{R}^3$ olyan lineáris transzformációival akarunk foglalkozni, amelyek hosszúságtartók, azaz $\|Ox\| = \|x\|$ ($x \in \mathbb{R}^3$). Mivel

$$4\langle x, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle$$

az ilyen O transzformáció skaláris szorzat tartó, és egyben szögtartó is. Ha $[O_{ij}]$ a transzformáció mátrixa a standard $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ortogonális bázisban, akkor a szögtartásból

$$\sum_{i=1}^3 O_{ij}O_{ik} = \delta(j, k) \quad (i \leq j \leq k). \quad (1.1.2)$$

Megállapíthatjuk, hogy $[O]$ inverze a transzponáltja, ezért O determinánsa ± 1 . Mivel

$$O - E = -(O - E)^t O,$$

$\det(O - E) = 0$, ha $\det O = 1$. Ebben az esetben $\lambda = 1$ sajátértéke O -nak és van egy hozzá tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor, f_3 . Legyen f_1 és f_2 olyan egységvektorok, hogy f_1, f_2, f_3 páronként merőlegesek. Írjuk fel O mátrixát az f_1, f_2, f_3 bázisban:

$$\begin{aligned} Of_1 &= \alpha_1 f_1 + \beta_1 f_2, \\ Of_2 &= \alpha_2 f_1 + \beta_2 f_2, \\ Of_3 &= f_3. \end{aligned}$$

A (1.1.2) relációkból $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$ és $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$. Ezeknek az egyenleteknek csak egy megoldása van: $\alpha_1 = \beta_2 = \cos \theta$ és $\beta_1 = -\alpha_2 = \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$). Tehát O mátrixa

$$[O] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1.3)$$

Némi elemi geometriával megállapíthatjuk, hogy az O transzformáció nem más, mint az f_3 tengely körüli θ szögű forgatás (az óramutató járásával ellenkezőleg).

Az 1 determinánsú ortogonális transzformációk tehát a forgatások. Csoportot alkotnak mert ilyen transzformációk kompozíciója és inverze is ilyen. A forgatások csoportjára $SO(3)$ a megszokott jelölés, az összes ortogonális transzformációra pedig $O(3)$. Egy síkra való tükrözés -1 determinánsú ortogonális transzformáció. $\square$

A skaláris szorzat, a vektor hossza és a vektorok szögének a fogalma a háromdimenziós euklideszi térről $\mathbb{R}^n$ -re is kiterjeszthető. $\mathbb{R}^n$ hosszúságtartó lineáris transzformációit is ortogonálisnak nevezzük, csoportjuk $O(n)$. Az egy determinánsúak részcsoportja $SO(n)$. A fenti háromdimenziós megfontoláshoz hasonlóan egy ortogonális transzformáció inverze a transzponáltja.

Az $\mathbb{R}^{2n+1}$ tér 1 determinánsú ortogonális transzformációinak mátrixa (1.1.3)-hez hasonló, de n darab

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

alakú blokk van a diagonális mentén alkalmas bázisban. Páros dimenzióban a jobb alsó sarokban álló 1-es hiányzik.

$\mathbb{R}^n$ egy bázisát **ortonormált bázisnak** nevezzük, ha páronként merőleges egy hosszúságú vektorokból áll. Azt is lehetne mondani, hogy egy bázis ortonormált, ha a standard bázisból ortogonális transzformációval lehet megkapni. Ebből következik, hogy ha egy mátrix a standard bázisban szimmetrikus, akkor minden ortonormált bázisban is szimmetrikus lesz.

$\mathbb{C}^n$ a tipikus komplex tér. Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ vektorok skalár, vagy belső szorzata

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$$

Hasonlóan az euklideszi térhez $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ az x vektor hossza. Ortonormált bázis olyan $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ vektorokból áll, amire

$$\|x^{(i)}\| = 1 \quad \text{és} \quad \langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j.$$

1.2. Tenzorszorzatok

A V_1 és a V_2 vektorterek **algebrai tenzorszorzata** $\sum_{i,j} x_i \otimes y_j$ alakú formális véges összegekből áll, $x_i \in V_1$, $y_j \in V_2$. Az ilyen összegekkel a

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, & (\lambda x) \otimes y &= \lambda(x \otimes y), \\ y \otimes (x_1 + x_2) &= y \otimes x_1 + y \otimes x_2, & x \otimes (\lambda y) &= \lambda(x \otimes y) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

számolási szabályok figyelembevételével lehet számolni.

A $V_1 \otimes V_2$ tenzorszorzattér $x \otimes y$ elemi tenzora egy $V_2^* \rightarrow V_1$ lineáris leképezésnek is felfogható:

$$(x \otimes y)(v_2^*) = v_2^*(y)x. \quad (1.2.5)$$

Ezzel az azonosítással az (1.2.4) számolási szabályok automatikusan teljesülnek. Amennyiben V_1 és V_2 véges dimenziósak, akkor $V_1 \otimes V_2$ izomorf az $L(V_2^*, V_1)$ térrel. Ha $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ V_1 -nek a bázisa és $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ V_2 bázisa, akkor $\{e_i \otimes f_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ a $V_1 \otimes V_2$ tér bázisa. Látható, hogy a tenzorszorzatban a dimenziók összeszorzódnak.

Ha a V_1 és V_2 térben van skalárszorzat, akkor a $V_1 \otimes V_2$ térben is lehet:

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_{V_1} \langle y_1, y_2 \rangle_{V_2}.$$

15. példa: Az $x \otimes y$ elemi tenzort (1.2.5) szerint egy $V_2^* \rightarrow V_1$ lineáris transzformációként fogjuk fel. Mi lesz ennek a mátrixa, ha V_2^* -on a duális $\{f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*\}$ bázist és V_1 -en a $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bázist tekintjük?

Legyen először $x = e_i$ és $y = f_j$. Ekkor

$$(e_i \otimes f_j)f_k^* = f_k^*(f_j)e_i = \delta(j, k)e_i,$$

és megállapíthatjuk, hogy $e_i \otimes f_j$ mátrixa éppen az E_{ij} mátrix egység. Ebből már levezethető $x \otimes y$ x -ben és y -ban való linearitása alapján, hogy amennyiben x koordinátái $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ és y koordinátái $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, úgy $x \otimes y$ mátrixa

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \mu_1 & \lambda_1 \mu_2 & \dots & \lambda_1 \mu_m \\ \lambda_2 \mu_1 & \lambda_2 \mu_2 & \dots & \lambda_2 \mu_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n \mu_1 & \lambda_n \mu_2 & \dots & \lambda_n \mu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]. \quad (1.2.6)$$

(Itt az egyenlőség jobb oldalán egy „oszlopmátrixnak” és egy „sormátrixnak” a mátrixszorzata áll. Az ebben az alakban előálló mátrixot **diádnak** is szokták nevezni.) $\square$

Lineáris **transzformációk tenzorszorzata** is értelmezhető. Ha $A : V_1 \rightarrow W_1$ és $B : V_2 \rightarrow W_2$ lineáris leképezések, akkor egyértelműen létezik egy olyan $A \otimes B : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$ lineáris transzformáció, amelyre

$$(A \otimes B)(v_1 \otimes v_2) = Av_1 \otimes Bv_2 \quad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2).$$

16. példa: Legyen V_1 bázisa $\{e_1, e_2, e_3\}$ és V_2 bázisa $\{f_1, f_2\}$. Ha az $A \in L(V_1)$ transzformáció mátrixa $[A_{ij}]$ és a $B \in L(V_2)$ transzformáció mátrixa $[B_{kl}]$, akkor

$$(A \otimes B)(e_j \otimes f_l) = \sum_{i,k} A_{ij} B_{kl} e_i \otimes f_k.$$

Rendezzük a szorzatbázist lexikografikusan, azaz $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, e_3 \otimes f_1, e_3 \otimes f_2$. Ilyen elrendezés esetén $A \otimes B$ mátrixa

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} & A_{13}B_{11} & A_{13}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} & A_{13}B_{21} & A_{13}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} & A_{23}B_{11} & A_{23}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} & A_{23}B_{21} & A_{23}B_{22} \\ A_{31}B_{11} & A_{31}B_{12} & A_{32}B_{11} & A_{32}B_{12} & A_{33}B_{11} & A_{33}B_{12} \\ A_{31}B_{21} & A_{31}B_{22} & A_{32}B_{21} & A_{32}B_{22} & A_{33}B_{21} & A_{33}B_{22} \end{bmatrix}.$$

$\square$

A kéttényezős tenzorszorzathoz hasonlóan értelmezhető a $V_1, V_2, \dots, V_k$ lineáris terek $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ tenzorszorzata. A $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k$ elemi tenzorokat most célszerűbb multilineáris funkcionáloknak tekinteni.

Ha $W_1, W_2, \dots, W_k$ lineáris terek, akkor **multilineáris funkcionál**on olyan

$$F : W_1 \times W_2 \times \dots \times W_k \rightarrow \mathbb{C}$$

függvényt értünk, amely rendelkezik az

$$\begin{aligned} F(w_1, \dots, \alpha w_\ell + \beta w'_\ell, w_{\ell+1}, \dots, w_k) = \\ = \alpha F(w_1, \dots, w_\ell, w_{\ell+1}, \dots, w_k) + \beta F(w_1, \dots, w'_\ell, w_{\ell+1}, \dots, w_k) \end{aligned}$$

tulajdonsággal. A $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ elemi tenzor olyan $F : V_1^* \times \dots \times V_k^* \rightarrow \mathbb{C}$ multilineáris funkcionál, amelyre

$$F(w_1^*, w_2^*, \dots, w_k^*) = \prod_{i=1}^k w_i^*(v_i) \quad (w_\ell^* \in V_\ell^*, 1 \leq \ell \leq k).$$

Ha a $V_1, V_2, \dots, V_k$ tényezők azonosak, és mindegyik V , akkor a $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ tenzorszorzatot V k -adik **tenzorhatványának** nevezzük, jelben $V^{\otimes k}$. Ha V dimenziója n , akkor

$V^{\otimes k}$ dimenziója n^k . Ha $A \in L(V)$, akkor az $A^{(1)} \otimes A^{(2)} \dots \otimes A^{(k)}$ lineáris transzformációra a $A^{\otimes k}$ jelölést használjuk.

$V^{\otimes k}$ -nak két fontos altere van, a **szimmetrikus** és az **antiszimmetrikus altér**. A $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ vektorok **antiszimmetrikus tenzorszorzata** a

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k := \frac{1}{\sqrt{k!}} \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} v_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(2)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(k)} \quad (1.2.7)$$

lineáris kombináció, amiben az összegzés az $\{1, 2, \dots, k\}$ számok valamennyi permutációjára történik, és $\sigma(\pi)$ jelöli a σ permutáció paritását. ($\sigma(\pi) = 0$, ha π -ben az inverziók száma páros, és $\sigma(\pi) = 1$, ha ugyanez a szám páratlan.) Az antiszimmetrikus elnevezés abból a tulajdonságból ered, hogy $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ előjelet vált, ha v_i -t és v_j -t felcseréljük ($1 \leq i < j \leq k$). Ebből az is következik, hogy $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = 0$, ha a v_i -k között két azonos van.

17. példa: Meggondoljuk, hogy az (1.2.7) formulában miért van egy $1/\sqrt{k!}$ szorzat. Egyszerűbb a $k = 2$ eset $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ feltétellel:

$$\langle v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \rangle.$$

Tehát ez $\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle$ lesz. □

Az elemi tenzorok (1.2.4) tulajdonságából adódik, hogy az antiszimmetrikus elemi tenzorokra is hasonló számolási szabályok érvényesek. Nevezetesen

$$\lambda(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{\ell-1} \wedge (\lambda v_{\ell}) \wedge v_{\ell+1} \wedge \dots \wedge v_k$$

és

$$\begin{aligned} & (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{\ell-1} \wedge v \wedge v_{\ell+1} \wedge \dots \wedge v_k) + \\ & + (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{\ell-1} \wedge v' \wedge v_{\ell+1} \wedge \dots \wedge v_k) = \\ & = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{\ell-1} \wedge (v + v') \wedge v_{\ell+1} \wedge \dots \wedge v_k. \end{aligned}$$

A $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ vektorok által kifeszített alteret a V tér n -edik **antiszimmetrikus tenzorhatványának** nevezzük, jele $V^{\wedge k}$. Tehát $V^{\wedge k} \subset V^{\otimes k}$. $A \in L(V)$ -re az $A^{\otimes k}$ transzformáció a $V^{\wedge k}$ alteret önmagába viszi, erre az alterre való megszorítását $A^{\wedge k}$ -val jelöljük. A $A^{\wedge k}$ transzformáció ekvivalens módon a

$$A^{\wedge k}(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) = Av_1 \wedge Av_2 \wedge \dots \wedge Av_k \quad (1.2.8)$$

formulával is megadható.

Amennyiben adott V -nek egy $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisa, $V^{\wedge k}$ -ben is megadható egy megfelelő bázis. Az

$$\{e_{i(1)} \wedge e_{i(2)} \wedge \dots \wedge e_{i(k)} : 1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(k) \leq n\} \quad (1.2.9)$$

vektorrendszer $V^{\wedge k}$ bázisa.

18. példa: Legyen $A \in M_n(\mathbb{C})$ egy önadjungált mátrix. Van egy $v_1, v_2, \dots, v_n$ ortonormált bázis, amely A sajátvektoraiból áll. Tételezzük fel, hogy $Av_i = \lambda_i v_i$ és $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

$A^{\wedge 2}$ sajátvektorai $\{v_i \wedge v_j : i < j\}$.

$$A^{\wedge 2}v_i \wedge v_j = Av_i \wedge Av_j = (\lambda_i \lambda_j)v_i \wedge v_j,$$

tehát a sajátértékek $\{\lambda_i \lambda_j : i < j\}$. □

(1.2.9)-nak megfelelően $V^{\wedge k}$ dimenziója

$$\binom{n}{k} \quad \text{ha} \quad k \leq n,$$

egyébként $k > n$ -re $V^{\wedge k}$ nulla dimenziós.

Ha V n dimenziós, akkor $V^{\wedge n}$ egydimenziós. Egy $A \in L(V)$ lineáris transzformációra $A^{\wedge n}$ az egydimenziós tér identikus transzformációjának valamilyen számszorosa. Ezt a számot A **determinánsának** nevezzük, jelben $\det A$. Mivel

$$(AB)^{\wedge k} = (A^{\wedge k})(B^{\wedge k})$$

a definíció alapján, nyomban megkaptuk a determinánsra vonatkozó szorzástételt:

1. tétel: Egy véges dimenziós V vektortér A és B lineáris transzformációra

$$\det(AB) = \det A \times \det B.$$

érvényes.

19. példa: Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ a V vektortér bázisa, és A olyan lineáris transzformáció, amely a bázisvektorokat kettő kivételével helyben hagyja, a kettőt pedig felcseréli egymással. Az általánosság megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy $Ae_1 = e_2$ és $Ae_2 = e_1$. Ekkor

$$A^{\wedge n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_n = -e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Tehát A determinánsa -1 . □

Most megmutatjuk, hogy egy lineáris transzformáció determinánsa ugyanaz, mint valamilyen bázisban vett mátrixának a lineáris algebrából jól ismert determinánsa.

2. tétel: Legyen az $A \in L(V)$ lineáris transzformáció mátrixa az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisban $[a_{ij}]_n$. Ekkor

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n},$$

ahol az összegzés az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok összes π permutációjára történik, és $\sigma(\pi)$ a π permutáció paritása.

Bizonyítás: A $V^{\wedge n}$ térben $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ egyelemű bázis, és $(A^{\wedge n})(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)$ -et kell kiszámolnunk.

$$\begin{aligned} (A^{\wedge n})(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) &= (Ae_1) \wedge (Ae_2) \wedge \dots \wedge (Ae_n) = \\ &= \left(\sum_{i(1)=1}^n a_{i(1),1} e_{i(1)} \right) \wedge \left(\sum_{i(2)=1}^n a_{i(2),2} e_{i(2)} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i(n)=1}^n a_{i(n),n} e_{i(n)} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i(1), i(2), \dots, i(n)=1}^n a_{i(1),1} a_{i(2),2} \dots a_{i(n),n} e_{i(1)} \wedge \dots \wedge e_{i(n)} = \\
&= \sum_{\pi} a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} e_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge e_{\pi(n)} = \\
&= \sum_{\pi} a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} (-1)^{\sigma(\pi)} e_1 \wedge \dots \wedge e_n.
\end{aligned}$$

(Az egyes lépéseknél rendre a következő tényeket használtuk: a transzformáció mátrixának definíciója, az antiszimmetrikus tenzor multilinearitása, $e_{i(1)} \wedge \dots \wedge e_{i(n)} = 0$, ha az indexek között van két azonos és végül egy permutáció paritása az őt megvalósító transzpozíciók számának paritása.) $\square$

20. példa: Egy $n \times n$ -es $[A]$ mátrixot alsó (illetve felső) háromszögmátrixnak nevezzük, ha $A_{ij} = 0$, ha $j > i$ (illetve $j < i$). Egy alsó (illetve felső) háromszögmátrixnak a determinánsa a diagonálisában álló elemek szorzata. Valóban, a kifejtési tételben kizárólag az identikus permutációhoz tartozó tag nem 0. $\square$

A $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ vektorok **szimmetrikus tenzorszorzata** a

$$v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_k := \frac{1}{\sqrt{k!}} \sum_{\pi} v_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(2)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(k)}$$

lineáris kombináció. (Az összegzés most is az $\{1, 2, \dots, k\}$ számok összes π permutációjára történik.) A szimmetrikus tenzorszorzatuk által kifeszített altér a $V^{\vee k}$ k -adik **szimmetrikus tenzorhatvány**. Ebben is konstruálunk bázist.

$$\{e_{i(1)} \vee e_{i(2)} \vee \dots \vee e_{i(k)} : 1 \leq i(1) \leq i(2) \leq \dots \leq i(k) \leq n\} \quad (1.2.10)$$

a $V^{\vee k}$ tér bázisa. A bázis n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációival adható meg, tehát elemszáma, a tér dimenziója

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

21. példa: Legyen a V vektortér $\mathbb{C}^n$ egy $x_1, x_2, \dots, x_n$ orthonormált bázissal. Mivel

$$\langle v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k, w_1 \otimes w_2 \otimes \dots \otimes w_k \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle \dots \langle v_k, w_k \rangle$$

a természetes formula, kiszámolhatjuk $x_{i(1)} \vee x_{i(2)} \vee \dots \vee x_{i(k)}$ hosszát:

$$\begin{aligned}
&\langle x_{i(1)} \vee x_{i(2)} \vee \dots \vee x_{i(k)}, x_{i(1)} \vee x_{i(2)} \vee \dots \vee x_{i(k)} \rangle = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\pi} \sum_{\pi'} \langle x_{\pi(i(1))}, x_{\pi'(i(1))} \rangle \langle x_{\pi(i(2))}, x_{\pi'(i(2))} \rangle \dots \langle x_{\pi(i(k))}, x_{\pi'(i(k))} \rangle.
\end{aligned}$$

Minden egyes tag 0 vagy 1. Utóbbi csak akkor, ha $\pi = \pi'$. A π -k száma $k!$, ezért egy normált vektort kaptunk. Ez az oka annak, hogy a definícióban van egy $\sqrt{k!}$ -sal való leosztás. $\square$

1.3. Mátrixok és sajátértékeik

Egy lineáris transzformáció hatását akkor könnyű megérteni, ha mátrixában sok 0 elem van. Ezért olyan bázist igyekszünk találni, amiben ez a tulajdonság minél inkább megvalósul.

22. példa: Az $e \in V$ vektort az $A \in L(V)$ lineáris transzformáció **ciklikus vektorának** nevezzük, ha az $e, Ae, A^2e, \dots, A^{n-1}e$ vektorok a V tér bázisát alkotják. Ha e ciklikus vektor, akkor az $e, Ae, \dots, A^{n-1}e$ bázisban A mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \mu_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \mu_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.3.11)$$

alakot ölt. Ezt az A ciklikus transzformáció kanonikus mátrixának nevezzük. $\square$

A ciklikus transzformációk jelentősége abban van, hogy $A \in L(V)$ esetén találhatók olyan $V_1, V_2, \dots, V_k$ alterek, hogy ezeket A önmagába viszi, $A|_{V_i}$ ciklikus és V a V_i alterek direkt összege.

Legyen a V_1, V_2 és V_3 vektorterek bázisa rendre $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ és $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$. Ha $A_1 : V_2 \rightarrow V_3$ és $A_2 : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris transzformációk, akkor $A_1 \circ A_2$ kompozíciójuk is az, és $A_1 \circ A_2$ a V_1 teret V_3 -ba képezi. Legyen A_1 mátrixa $[a_{ij}]$ és A_2 mátrixa $[b_{kl}]$. Ekkor

$$A_2 e_j = \sum_{u=1}^k b_{uj} f_u \quad \text{és} \quad A_1 f_j = \sum_{v=1}^m a_{vj} g_v.$$

Ebből

$$\begin{aligned} (A_1 \circ A_2) e_j &= A_1 \sum_{u=1}^k b_{uj} f_u = \sum_{u=1}^k b_{uj} A_1 f_u = \\ &= \sum_{u=1}^k b_{uj} \sum_{v=1}^m a_{vu} g_v = \\ &= \sum_{v=1}^m \left(\sum_{u=1}^k a_{vu} b_{uj} \right) g_v, \end{aligned}$$

ezért $A_1 \circ A_2$ mátrixában az i -edik sor j -edik eleme $\sum_{u=1}^k a_{iu} b_{uj}$, ami nem más, mint az $[a_{ij}][b_{kl}]$ mátrixszorzatban ugyanez az elem. Megállapíthatjuk, hogy lineáris transzformációk kompozíciójának mátrixa az egyes mátrixok szorzata. Ez az a tény, ami a lineáris transzformációk elméletének és a mátrixszámításnak a kapcsolatát meghatározza.

23. példa: Legyen a V lineáris tér bázisa $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ és $A \in L(V)$ lineáris transzformáció. Ekkor A -nak van egy $[a_{ij}]$ mátrixa az adott bázisra vonatkozóan. Hogyan változik meg ez a mátrix, ha áttérünk egy másik, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ bázisra? Egyértelműen

létezik egy olyan S transzformáció, amely e_i -t f_i -be viszi, $1 \leq i \leq n$. Ez invertálható, és $S^{-1}f_i = e_i$, $1 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned} Af_j = AS e_j &= \sum_{i=1}^n [AS]_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n [AS]_{ij} \left(\sum_{l=1}^n [S^{-1}]_{li} f_l \right) = \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n [S^{-1}]_{li} [AS]_{ij} \right) f_l = \\ &= \sum_{l=1}^n [S^{-1}AS]_{lj} f_l. \end{aligned}$$

Tehát A mátrixa az $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ bázisban $[S]^{-1}[A][S]$ alakú, ahol $[A]$ jelöli A mátrixát az $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bázisban, és $[S]$ a **bázistranszformáció mátrixa** (ugyanebben a bázisban). $\square$

3. tétel: Az $A \in L(V)$ lineáris transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha $\det A \neq 0$.

Bizonyítás: Ha A invertálható, akkor létezik egy olyan B lineáris transzformáció, amelyre $AB = \text{id}$. A determinánsra vonatkozó szorzástétel szerint $\det A \times \det B = \det \text{id} = 1$, és ekkor $\det A \neq 0$ teljesül.

Ha A nem invertálható, akkor van a térben egy olyan $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bázis, hogy $Ae_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i Ae_i$. Számoljuk ki $\det A$ -t ebben a bázisban.

$$Ae_1 \wedge Ae_2 \wedge \dots \wedge Ae_n = \sum_{i=2}^n \lambda_i Ae_i \wedge Ae_2 \wedge \dots \wedge Ae_n = 0,$$

ugyanis minden tag külön-külön is 0 az ismétlődés miatt. Ezért $\det A = 0$. $\square$

Egy mátrix inverzét az algebrai adjungáltja segítségével is kiszámolhatjuk. Az $[A]$ mátrix $[A]^{\text{Adj}}$ **algebrai adjungáltjának** ij eleme $(-1)^{i+j}$ szorozva az j -edik sor i -edik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsával.

4. tétel:

$$[A]^{-1} = \frac{[A]^{\text{Adj}}}{\det[A]}.$$

Az inverz mátrix ilyen módon való meghatározása számolási szempontból nehézkes, a sok determináns kiszámolása nagyon sok művelet végrehajtását igényli.

Legyen $A \in L(V)$. Ha valamely μ skalár és $0 \neq x \in V$ vektorra $Ax = \mu x$, akkor μ -t az A transzformáció **sajátértékének** és x -t a μ -höz tartozó **sajátvektornak** nevezzük. Ha μ sajátérték, akkor $A - \mu \cdot \text{id}$ transzformáció nem invertálható, hiszen $(A - \mu \cdot \text{id})(x) = 0$ és $x \neq 0$. Ilyenkor $\det(A - \mu \cdot \text{id}) = 0$. Ha λ -t határozatlannak tekintjük, akkor $\det(A - \lambda \cdot \text{id})$ a λ -nak n -edfokú polinomja, A **karakterisztikus polinomjának** nevezzük. Az imént megmutattuk, hogy minden sajátérték a karakterisztikus polinom gyöke. Megfordítva, ha μ a karakterisztikus polinom gyöke, akkor $A - \mu \cdot \text{id}$ determinánsa 0, tehát $A - \mu \cdot \text{id}$ nem invertálható. Ezért van olyan $x \neq 0$ vektor, amelyre $(A - \mu \cdot \text{id})x = 0$. Ez az x vektor tehát a μ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

Mivel komplex együtthatós polinomoknak mindig van gyökük, a fenti gondolatmenetből következik:

5. tétel: Véges dimenziós komplex lineáris tér transzformációjának van legalább egy sajátvektora.

Többet nem is lehet mondani. Az alábbi mátrixnak egyetlen sajátvektora van.

24. példa: Az

$$[A] = \begin{bmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (1.3.12)$$

mátrixnak az $(1, 0, 0, 0)$ vektor sajátvektora μ sajátértékkel. Ugyanekkor az $e_1 = (0, 0, 0, 1)$ vektor képe $e_2 = (0, 0, 1, \mu)$, ennek képe $e_3 = (0, 1, 2\mu, \mu^2)$, ennek képe $e_4 = (1, 3\mu, 3\mu^2, \mu^3)$. Az e_1, e_2, e_3, e_4 vektorok lineárisan függetlenek, tehát bázist alkotnak. Ebben a bázisban az A transzformáció mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mu^4 \\ 1 & 0 & 0 & 4\mu^3 \\ 0 & 1 & 0 & -6\mu^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4\mu \end{bmatrix}.$$

e_1 tehát a transzformáció ciklikus vektora. $\square$

1. lemma: Ha A és B invertálható lineáris transzformációk, akkor AB és BA sajátértékei megegyeznek.

Bizonyítás: Az

$$AB - \lambda \cdot I = A(BA - \lambda \cdot I)A^{-1}$$

azonosságból látható, hogy $AB - \lambda \cdot I$ akkor és csak akkor invertálható, ha $BA - \lambda \cdot I$ invertálható. Mivel AB sajátértékei azok a λ számok amelyekre $AB - \lambda \cdot I$ nem invertálható, ebből az állítás nyomban következik. $\square$

A (1.3.12) mátrixot **Jordan-blokknak** nevezzük. Általánosabban egy $n \times n$ -es mátrix Jordan-blokk, ha diagonálisában ugyanazok a számok állnak, a diagonális feletti ferde sorban csupa 1-es és a többi elem 0. A következő tétel a **Jordan-féle normálalakról** szól.

6. tétel: Véges dimenziós komplex vektortér $A \in L(V)$ transzformációjához létezik a térnek olyan $V_1 + \dots + V_k$ direktösszeg-felbontása, hogy A a V_i altereket invariánsan hagyja, és $A|_{V_i}$ mátrixa V_i alkalmas bázisában Jordan-blokk.

Egy lineáris transzformáció Jordan-blokkokra bontása, azaz az előző tételben garantált bázisnak a megkeresése a lineáris algebra egyik alapvető problémája. Valós terek, illetve valós mátrixok esetében más a helyzet. Például a

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs (valós) sajátértéke, ezért sem diagonális alakban, sem Jordan-blokkként nem írható fel. Valós mátrixok **Jordan-féle normálalakja** némileg különböző.

Az $n \times n$ -es $[A]$ komplex elemű mátrixot **önadjungáltnak** nevezzük, ha $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ ($1 \leq i, j \leq n$). (Valós elemű mátrixokat inkább **szimmetrikusnak** szoktuk hívni, ha önadjungáltak.)

7. tétel: Önadjungált mátrixhoz van a térnek olyan bázisa, amelyben a mátrix diagonális, és a diagonálisban valós számok állnak.

A tételt úgy is kimondhattuk volna, hogy egy $n \times n$ -es önadjungált mátrixnak létezik n darab lineárisan független sajátvektora, és sajátértékei valósak.

A mátrixok östörténetéhez tartozik az $n \times n$ -es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

úgynevezett tridiagonális szimmetrikus mátrix. Ennek sajátértékeit **Lagrange** számolta ki 1759-ben. Azt találta, hogy a sajátértékek $2 \cos j\pi/(n+1)$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

25. példa: Egy mátrix önadjungált volta nem bázisfüggetlen tulajdonság. Például

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a diagonális $\text{Diag}(2, 1)$ mátrix alkalmas bázisban nem szimmetrikus. $\square$

Ha $[A]$ egy $n \times n$ -es komplex elemű mátrix, akkor tartozik hozzá a $z_1, z_2, \dots, z_n$ komplex változóknak egy **kvadratikus alaknak** nevezett

$$q(z_1, z_2, \dots, z_n) := \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \bar{z}_i z_j \quad (1.3.13)$$

függvénye. Ha az $[A]$ mátrix önadjungált, akkor

$$q(z_1, z_2, \dots, z_n) = \overline{q(z_1, z_2, \dots, z_n)},$$

tehát q csak valós értékeket vesz fel. Az önadjungált mátrix diagonalizálására vonatkozó 7. tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy létezik a $z_1, z_2, \dots, z_n$ változóknak olyan lineáris

$$z'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j$$

transzformáltja, hogy

$$q(z_1, \dots, z_n) = \sum \lambda_i \bar{z}'_i z'_i, \quad (1.3.14)$$

valamilyen valós λ_i számokkal. Ezt a tényt úgy szokták kifejezni, hogy a kvadratikus alak **főtengelyre transzformálható**. A λ_i számok csak pozitív szorzótól és sorrendtől eltekintve meghatározottak, azaz egyértelmű, hogy közöttük hány pozitív és hány negatív van. (Ez a a Sylvester-féle **tehetetlenségi törvény**.)

Az $[A]$ mátrixot **pozitív szemidefinitnek** nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak csak nemnegatív értékeket vesz fel.

Az $n \times m$ -es $[B]$ mátrix **adjungáltja** az a $m \times n$ -es mátrix, amelynek ij eleme $\overline{B_{ji}}$. $[B]$ adjungáltját $[B]^*$ -gal jelöljük. Egy $[A]$ mátrix tehát önadjungált, ha megegyezik az adjungáltjával. A definíció alapján ellenőrizhető, hogy

$$([A][B])^* = [B]^*[A]^*, \quad (1.3.15)$$

ha $[A]$ és $[B]$ olyan méretű mátrixok, hogy az $[A][B]$ mátrixszorzat értelmes.

26. példa: Ha $[A] = [B]^*[B]$, akkor A pozitív szemidefinit. Valóban,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \bar{z}_i z_j &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \overline{B_{ki}} B_{kj} \bar{z}_i z_j = \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\overline{\sum_{i=1}^n B_{ki} z_i} \sum_{j=1}^n B_{kj} z_j \right), \end{aligned}$$

ami pozitív számok összege. □

27. példa: Legyen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{bmatrix}$$

egy pozitív önadjungált mátrix. Ekkor $a, c \in \mathbb{R}^+$ és $|b|^2 \leq ac$. Az α és β sajátértékek a

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ \bar{b} & c - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

egyenlet gyökei:

$$\alpha, \beta = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}}{2}$$

Elemi számolás mutatja, hogy

$$|b|^2 \leq \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 ac.$$

□

Ha $f(x) = \sum_{i=1}^k c_i x^i$ egy polinom, akkor abba be lehet helyettesíteni egy mátrixot:

$$f(A) = \sum_{i=1}^k c_i A^i$$

Könnyű ellenőrizni, hogy a (1.3.12) mátrixra

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(\mu) & f'(\mu) & \frac{f''(\mu)}{2!} & \frac{f^{(3)}(\mu)}{3!} \\ 0 & f(\mu) & f'(\mu) & \frac{f''(\mu)}{2!} \\ 0 & 0 & f(\mu) & f'(\mu) \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu) \end{bmatrix}.$$

1.4. Önadjungált mátrixok

A $\mathbb{C}^n$ lineáris tér leképezéseivel foglalkozunk. Egy $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ lineáris leképezés a standard bázisban egy $n \times n$ -es mátrixot ad. Az önadjungáltságot kifejezhetjük úgy, hogy $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ ($1 \leq i, j \leq n$), de más lehetőség is van. Létezik egy $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ ortonormált bázis $\mathbb{C}^n$ -ben, hogy

$$A = \sum_{i=1}^n c_i |x_i\rangle\langle x_i|,$$

ahol $c_i \in \mathbb{R}$ és $|x_i\rangle\langle x_i| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ olyan lineáris leképezés, hogy

$$|x_i\rangle\langle x_i|x = \langle x_i, x \rangle x_i \quad (x \in \mathbb{C}^n, 1 \leq i \leq n).$$

Ez a fajta formalizmus a Hilbert-tér esetén lesz tipikus. Ellenőrizni lehet, hogy $|y\rangle\langle y|$ olyan leképezés, ami az y vektor által definiált egydimenziós altérre vetítő projekció. Ezért $|y\rangle\langle y|^n = |y\rangle\langle y|$ ($n = 1, 2, \dots$). Az ortogonális x_i és x_j vektorokra $|x_i\rangle\langle x_i| \times |x_j\rangle\langle x_j| = 0$. Ebből adódik, hogy

$$A^n = \sum_{i=1}^n c_i^n |x_i\rangle\langle x_i|.$$

Ezt általánosíthatjuk polinomokra és persze folytonos függvényekre is, mert azok jól approximálhatók polinomokkal. Tehát

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(c_i) |x_i\rangle\langle x_i|. \quad (1.4.16)$$

28. példa: Legyen f egy folytonosan differenciálható függvény, A, B önadjungált mátrixok. Igazolni akarjuk, hogy

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \text{Tr} f(A + tB) \right|_{t=0} = \text{Tr}(f'(A)B). \quad (1.4.17)$$

Mivel az f függvény approximálható polinomokkal, elég azt az esetet ellenőrizni, amikor f polinom. (1.4.17) mindkét oldala lineáris f -ben, elég az $f(x) = x^n$ függvénnyel foglalkozni. Mivel $\text{Tr}(A + tB)^n$ a t -nek egy polinomja, a derivált a t -nek az együtthatója.

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(A + tB)^n \\ &= \text{Tr} A^n + t \text{Tr}(BA^{n-1} + ABA^{n-2} + \dots A^{n-2}BA + A^{n-1}B) \\ & \quad + t^2 \times \text{valami} \\ &= \text{Tr} A^n + t \text{Tr}(BA^{n-1} + BA^{n-1} + \dots BA^{n-1} + BA^{n-1}) \\ & \quad + t^2 \times \text{valami} \\ &= \text{Tr} A^n + t \text{Tr}(nA^{n-1})B + t^2 \times \text{valami} \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (A + tB)^n \right|_{t=0} = \text{Tr}(nA^{n-1}B)$$

és ez megfelel az állításnak. □

29. példa: Ha a kvantum rendszer az $M_n(\mathbb{C})$ mátrixokkal van leírva, akkor az állapotot egy $0 \leq \rho = \rho^* \in M_n(\mathbb{C})$ mátrix adja, amelyre $\text{Tr } \rho = 1$. (Ezt **sűrűségi mátrixnak** is szokás nevezni.) Legyen $H = H^* \in M_n(\mathbb{C})$.

Az egyensúlyi állapot minimalizálja a következő funkcionált:

$$F(\rho) = \text{Tr} \rho H - \frac{1}{\beta} S(\rho),$$

ahol $\beta > 0$, ez a hőmérséklet, és $S(\rho) := \text{Tr} \eta(\rho)$, ahol $\eta(x) = -x \log x$. Ellenőrizhető, hogy $\eta'(x) = -1 - \log x$.

Bizonyítani lehet, hogy $F(\rho)$ egy konvex függvény. Ezért a minimalizáláshoz a

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} F(\rho + tX) \right|_{t=0} = 0$$

egyenletrendszert kell megoldani, ahol $X = X^*$ és $\text{Tr} X = 0$. A deriváltat kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$\text{Tr} X \left(H + \frac{1}{\beta} \log \rho + \frac{1}{\beta} I \right) = 0.$$

Ez minden X -re teljesül, tehát

$$H + \frac{1}{\beta} \log \rho + \frac{1}{\beta} I = cI.$$

Ebből adódik, hogy a minimalizáló állapot

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr} e^{-\beta H}}, \quad (1.4.18)$$

amit **Gibbs-állapotnak** is szoktak hívni. □

Az (1.4.18) formulában szerepelt az exponenciális függvény. A definíció

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

ha $A \in M_n(\mathbb{C})$. (A konvergencia nyilvánvalóan megy.) Egyszerű számolás adja, hogy

$$e^{A+B} = e^A e^B,$$

ha $AB = BA$. Ezért

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} e^{A+tB} \right|_{t=0} = e^A B$$

az $AB = BA$ feltétel esetén.

Most kiszámoljuk a

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} f(A + t(AX - XA)) \right|_{t=0}$$

deriváltat, főleg az exponenciális függvény érdekel minket. Az egyszerűség kedvéért legyen $f(x) = x^N$.

$$(A + t(AX - XA))^N - A^N$$

t -nek egy polinomja, amelyben az együtthatók mátrixok. Az iránymenti derivált ennek az t szerinti deriváltja $t = 0$ -ban, ami nem más mint t együtthatója. Ez

$$A^{N-1}(AX - XA) + A^{N-2}(AX - XA)A + \\ A^{N-3}(AX - XA)A^2 + \dots + (AX - XA)A^{N-1}.$$

Az összeg egyszerűen

$$A^{N-1}AX - XAA^{N-1} = A^N X - XA^N.$$

Az f -beli linearitás miatt általános p polinomra az iránymenti derivált $p(A)X - Xp(A)$ és az általános formula

$$\frac{\partial}{\partial t} f(A + t(AX - XA)) \Big|_{t=0} = f(A)X - Xf(A), \quad (1.4.19)$$

ami a kiterjesztés differenciálható f függvényekre is.

$M_n(\mathbb{C})$ egy Hilber-térnek is tekinthető: $\langle X, Y \rangle = \text{Tr} X^* Y$. Ha $A \in M_n(\mathbb{C})$ fixálva van, akkor

$$\{B \in M_n(\mathbb{C}) : AB = BA\} \quad \text{és} \quad \{AX - XA : X \in M_n(\mathbb{C})\} \quad (1.4.20)$$

ortogonális alterek és összegük $M_n(\mathbb{C})$.

Tételezzük fel, hogy

$$\langle B^*, AX - XA \rangle = 0$$

minden X -re. Ekkor $\text{Tr}(BA - AB)X = 0$ és $AB = BA$.

Az eddigi okoskodásból kiadódik a következő képlet.

8. tétel: Ha $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, akkor

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{A+tB} \Big|_{t=0} = \int_0^1 e^{uA} B e^{(1-u)A} du.$$

Bizonyítás: A (1.4.20) alapján két feltételt kell ellenőrizni. Ha $AB = BA$, akkor a képlet nyilvánvaló. Ha $B = AX - XA$, akkor

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(A + t(AX - XA)) \Big|_{t=0} = e^A X - X e^A$$

a fenti (1.4.19) képlet szerint és

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{uA} (AX - XA) e^{(1-u)A} du &= \int_0^1 (e^{uA})' X e^{(1-u)A} du + \int_0^1 e^{uA} X (e^{(1-u)A})' du = \\ &= [\exp(uA) X \exp((1-u)A)]_0^1 = e^A X - X e^A. \end{aligned}$$

(Itt az utóbbi esetben az $\int_0^1 f'(u)g(u) du = [f(u)g(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u)g'(u) du$ formulát használtuk.) $\square$

1.5. Blokkmátrixok

A **blokkmátrix** (vagy **hipermátrix**) olyan mátrixot jelent, amelynek az elemei maguk is mátrixok.³ Legyen a V lineáris tér a V_1 és V_2 alterek direktösszege, $V = V_1 \dot{+} V_2$. Ekkor az $A \in L(V)$ lineáris transzformáció egy $A_1 \in L(V_1, V)$ és $A_2 \in L(V_2, V)$ transzformációval adható meg.

$$A(v_1 + v_2) = A_1 v_1 + A_2 v_2 \quad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2).$$

A_1 megadható az $A_{11} \in L(V_1, V_1)$ és az $A_{21} \in L(V_1, V_2)$ transzformációkkal:

$$A_1 v_1 = A_{11} v_1 + A_{21} v_1 \quad (v_1 \in V_1).$$

Hasonlóan

$$A_2 v_2 = A_{12} v_2 + A_{22} v_2 \quad (v_2 \in V_2).$$

Ha V_1 -ben választunk egy $e_1, e_2, \dots, e_k$, V_2 -ben egy $f_1, f_2, \dots, f_m$ bázist, akkor A $(m+k) \times (m+k)$ -as mátrixát négy részre particionálhatjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{1,1} & \dots & A_{1,k} & A_{1,k+1} & \dots & A_{1,k+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,k} & A_{k,k+1} & \dots & A_{k,k+m} \\ \hline A_{k+1,1} & \dots & A_{k+1,k} & A_{k+1,k+1} & \dots & A_{k+1,k+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k+m,1} & \dots & A_{k+m,k} & A_{k+m,k+1} & \dots & A_{k+m,k+m} \end{array} \right].$$

A bal felső sarokban az $A_{11} \in L(V_1, V_1)$ transzformáció mátrixa, a jobb felsőben $A_{12} \in L(V_2, V_1)$ mátrixa, a bal alsó sarokban $A_{21} \in L(V_1, V_2)$ mátrixa, a jobb alsó sarokban $A_{22} \in L(V_2, V_2)$ mátrixa áll. Blokkmátrix írásmóddal A mátrixát

$$\left[\begin{array}{cc} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{array} \right]$$

alakban írhatjuk. Itt a négy mátrix lehet különböző méretű, de $[A_{11}]$ és $[A_{22}]$ négyzetes mátrixok. Az egyszerűség kedvéért itt és a továbbiakban többnyire 2×2 -es blokkmátrixokra szorítkozunk, de nagyobb mátrixok ugyanezen az elvi alapon tárgyalhatók.

30. példa: A 16. példa $A \otimes B$ transzformációjának mátrixa a blokkmátrix írásmóddal

$$\left[\begin{array}{ccc} A_{11}[B] & A_{12}[B] & A_{13}[B] \\ A_{21}[B] & A_{22}[B] & A_{23}[B] \end{array} \right]$$

alakot ölt. □

Blokkmátrixokkal szinte úgy számolhatunk, mint a szokásos mátrixokkal. Legyen

$$\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right] \quad \text{és} \quad \left[\begin{array}{cc} A' & B' \\ C' & D' \end{array} \right]$$

olyan blokkmátrixok, hogy A és A' , valamint D és D' azonos méretű négyzetes mátrixok. Ekkor a két blokkmátrix szorzata a

$$\left[\begin{array}{cc} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{array} \right]$$

blokkmátrix. Ezt könnyű ellenőrizni a közönséges mátrixok szorzásszabálya alapján. A blokkmátrixokkal való számolásban arra kell ügyelni, hogy a fenti példa vesszős és vesszőtlen mátrixainak sorrendje a szorzáskor lényeges, ugyanis a mátrix szorzás nem kommutatív művelet.

A mátrix adjungálás értelmezéséből nyomban következik, hogy

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix}. \quad (1.5.21)$$

9. tétel: Ha az

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

blokkmátrixban a (négyzetes) A mátrix invertálható, akkor

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

A bizonyítás egyszerűen beszorzás segítségével végezhető el. A faktorizálásnak egy másik változata is van. Ha D -t tételezzük fel invertálhatónak, akkor

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix}.$$

A faktorizációból további következtetéseket is levonhatunk. Ha az adott blokkmátrix invertálható, akkor az $A, D - CA^{-1}B, D, A - BD^{-1}C$ mátrixok egyaránt invertálhatók. Sőt, a blokkmátrix determinánsa

$$\det A \times \det(D - CA^{-1}B) = \det D \times \det(A - BD^{-1}C). \quad (1.5.22)$$

10. tétel: Ha A invertálható négyzetes mátrix, akkor a

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix}$$

négyzetes blokkmátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha A, D és $A - BD^{-1}B^*$ mátrixok pozitív szemidefinitek.

31. példa: Megmutatjuk, hogy egy invertálható pozitív szemidefinit mátrix egyértelműen írható fel T^*T alakban, ha megköveteljük, hogy T olyan alsó háromszögmátrix, amelynek diagonálisában pozitív számok állnak.

A bizonyítás az adott mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval történik. 1×1 -es mátrixokra az állítás nyilvánvaló. Az indukciós lépés végrehajtásához particionáljuk az adott $(n+1) \times (n+1)$ -es X mátrixot

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix}$$

alakban, ahol A $n \times n$ -es mátrix. Ugyanakkor T -t hasonlóan particionált formában keressük

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},$$

ahol T_{11} $n \times n$ -es alsó háromszög mátrix pozitív diagonálissal és T_{22} egy pozitív szám. Az $X = T^*T$ egyenlőség az

$$\begin{aligned} A &= T_{11}^* T_{11} + T_{21}^* T_{21}, \\ B &= T_{21}^* T_{22}, \\ D &= T_{22}^* T_{22} \end{aligned}$$

egyenletekkel egyenértékű. A tétel szerint D pozitív szám, így $T_{22} \geq 0$ csak $\sqrt{D}$ lehet. Ekkor a második egyenletből $T_{21} = B^*/T_{22}$. Az első egyenlet behelyettesítve

$$A - BB^*/D = T_{11}^* T_{11}$$

alakot ölt. A tétel szerint $A - BD^{-1}B^*$ pozitív szemidefinit, de invertálható is. Így alkalmazhatjuk rá az indukciós feltevést, és egyértelműen írhatjuk $T_{12}^* T_{21}$ alakban egy pozitív diagonális alsó háromszög mátrix segítségével. $\square$

32. példa: Legyen

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Egyszerű számolás adja, hogy egy $f(t)$ polinomra

$$f(X) = \begin{bmatrix} f(A) & \left. \frac{\partial}{\partial t} f(A + tB) \right|_{t=0} \\ 0 & f(A) \end{bmatrix}. \quad (1.5.23)$$

(A képlet kiterjeszthető általánosabb függvényekre is.) $\square$

1.6. Gyakorlófeladatok

1. Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ térben egy egyenes pontjai?
2. Alteret alkotnak-e a mátrixok terében a pozitív definit mátrixok?
3. Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R}$ -en értelmezett $x \mapsto e^{tx}$ ($t \in \mathbb{R}$) függvények lineárisan függetlenek!
4. Bizonyítsa be, hogy $C(\Omega)$ végtelen dimenziós vektortér, ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz!
5. Adja meg a (1.3.11) mátrix utolsó oszlopában álló elemeket a karakterisztikus polinom együtthatóival!
6. Magyarázza meg, hogy miért teljesül $[A]^{-1} = [A^{-1}]$!
- 7.^M Igazolja, hogy egy alsó háromszög mátrix determinánsa a diagonálisban álló elemek szorzata!
8. Igazolja a definíció alapján, hogy egy pozitív szemidefinit mátrix sajátértékei és diagonális elemei nemnegatívak!

9. Mutasson példát olyan (komplex elemű) pozitív szemidefinit mátrixra, amelynek transzponáltja nem pozitív szemidefinit!
- 10.^M Igazolja, hogy ha A pozitív szemidefinit, akkor XAX^* is az tetszőleges (nem feltétlenül négyzetes) X mátrixra!
- 11.^M Milyen négyzetes A mátrixra lesz az

$$\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$$

blokkmátrix pozitív szemidefinit?

12. Mutassa meg, hogy a véges dimenziós komplex vektortér minden lineáris transzformációja felírható egy diagonalizálható és egy vele felcserélhető nilpotens transzformáció összegeként!
13. Írjuk fel a következő (ún. Dirac-féle) mátrixokat tenzorszorzat formájában!

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- 14.^M Írjuk fel $\mathbb{R}^3$ -ban az xy síkra való és az $(1, 1, 1)$ vektorral párhuzamos irányú vetítés mátrixát!
15. Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^3$ minden ortogonális transzformációja egy tükrözés és egy forgatás egymás utáni végrehajtásával áll elő?
16. Mutassuk meg, hogy ha az $[A]$ valós mátrixra $[A]^t[A] = 0$, akkor $[A] = 0$! ($[A]^t$ a transzponáltat jelöli.)
17. Jelölje $[A, B]$ az A és B transzformációk kommutátorát, azaz $[A, B] = AB - BA$! Mutassuk meg, hogy

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0!$$

18. Mutassuk meg, hogy az

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokra $[A][B] = [B][A] = [E]$! ($[E]$ az egységmátrix.)

19.^M Legyen

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-1} \binom{j-1}{i-1} & i < j, \\ (-1)^{j-1} & i = j, \\ 0 & i > j. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az $[A] = [a_{ij}]$ mátrixra $[A]^2 = [E]!$

20. Igazolja n szerinti teljes indukcióval, hogy $\mathbb{R}^n$ ortogonális transzformációinak mátrixa a szövegben leírt alakra hozható!

21.^M Legyen $[A]$, $[B]$ és $[C]$ pozitív szemidefinit mátrixok! Mutassuk meg, hogy ha $[C]$ invertálható, és

$$\det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0$$

valamilyen λ komplex számra, akkor λ valós része negatív vagy 0!

22.^M Legyen A és B invertálható lineáris transzformációk! Határozzuk meg a $\det(A+tB)$ polinomban t együtthatóját!

23.^M Legyen A és B $n \times n$ -es mátrixok. Mutassuk meg, hogy AB -nek és BA -nak a 0-tól különböző sajátértékei megegyeznek.

2. Normált terek

Ha egy lineáris tér vektorainak meg van adva a hossza, akkor az algebrai struktúra mellett lehetőség van egy **topológiai struktúra** bevezetésére. Topológia alatt egyszerűen **konvergenciát** érthetünk. Az x_n vektorsorozat tart az x vektorhoz, ha az $x - x_n$ vektorok hossza tart a nullához. Az algebrai műveletek és a konvergencia együtt alkotják a lineáris analízis legegyszerűbb, de talán éppen ezért igen gazdag struktúráját. A normált tér a XX. század elején kialakult absztrakció. ⁴

2.1. Nevezetes normált terek

A lineáris tér egyik lényeges fogalma a nulla vektor, ami $\mathbf{0}$ (vagy $\underline{0}$, de később 0 is lesz). Lényeges formulák $x + \mathbf{0} = x$ és $0 \times x = \mathbf{0}$.

Egy lineáris teret **normált térnek** nevezünk, ha a tér minden vektorának meg van adva a hossza. Legyen V egy lineáris tér, és tételezzük fel, hogy adott egy $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ leképezés a következő tulajdonságokkal

- (1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in V),$
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (x \in V, \lambda \text{ skálár}),$
- (3) $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = \mathbf{0}$.

Ekkor $\|\cdot\|$ -t **normának** nevezzük és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $\|x\|$ -t az x vektor hosszaként értelmezzük.⁵ Amennyiben $V = \mathbb{R}^n$ és

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

akkor az n dimenziós vektorok szokásos hossza egy norma. A $\|\cdot\|_2$ jelölést azért használjuk, mert más normák is lehetségesek. Például

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Ha egy funkcionál csak a norma (1) és (2) tulajdonságaival rendelkezik, akkor **félnormának** nevezzük.

1. példa: Legyen $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos (valós vagy komplex értékű) függvények vektortere, és legyen

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}.$$

Egyszerűen megmutatható, hogy ez valóban normát értelmez:

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|,$$

és ezért

$$\sup\{|(f+g)(x)|\} \leq \sup\{|f(x)|\} + \sup\{|g(x)|\}. \quad \square$$

Ha $C[a, b]$ -t a továbbiakban normált térként említjük, akkor mindig erre a szuprénum normára gondolunk. Ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy az $[a, b]$ -n valós értékű függvényeket tekintünk, akkor $C[a, b]$ helyett $C_{\mathbb{R}}[a, b]$ -t fogunk írni.

2. példa: Az $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett f függvényt **gyorsan csökkenőnek** nevezzük, ha

$$(1 + \|x\|_2^2)^m |f(x)| \rightarrow 0, \quad \text{amint} \quad \|x\|_2 \rightarrow \infty \quad (2.1.1)$$

bármilyen m egészre. (A feltétel azt jelenti, hogy f az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók bármilyen polinomjával megszorozva is 0-hoz tart a végtelenben.) A gyorsan csökkenő folytonos függvények terét $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ -nel jelöljük. Ha $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ és $m \in \mathbb{N}$, akkor legyen

$$p_{m,0}(f) := \max\{(1 + \|x\|_2^2)^m |f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.1.2)$$

$p_{m,0}$ rendelkezik a norma (1)–(3) tulajdonságaival.

Ha $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ nemnegatív egészek n -ese és $|\beta| := \sum_{i=1}^n \beta_i$, akkor használni fogjuk a

$$D^\beta f = \frac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial^{\beta_1} x_1 \dots \partial^{\beta_n} x_n}$$

jelölést. Az

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C_{00}(\mathbb{R}^n) : D^\beta f \in C_{00}(\mathbb{R}^n) \text{ minden } \beta\text{-ra}\} \quad (2.1.3)$$

lineáris teret **Schwartz-térnek** nevezzük.

Ha az $\exp(-\sum_{i=1}^n x_i^2)$ függvényt megszorozzuk $x_1, x_2, \dots, x_n$ bármilyen polinomjával, akkor a Schwartz-tér egy eleméhez jutunk.

Legyen

$$p_{m,r}(f) := \max\{p_{m,0}(D^\beta f) : |\beta| \leq r\}.$$

A gyorsan csökkenő sima függvények terén ez norma minden $m, r \in \mathbb{N}$ választásra. (A Schwartz-térrel a multinormált terek részben részletesebben lesz szó.)

Általában, ha $p_1, \dots, p_k$ normák egy lineáris téren, akkor az összegük és a maximumuk ugyan-csak norma. $\square$

Vannak esetek, amikor a norma tulajdonságainak ellenőrzése kevésbé egyszerű. Némi előkészítés után $\mathbb{R}^n$ -en bevezetjük a $\|\cdot\|_p$ p -normát, $1 \leq p < \infty$. ($\mathbb{R}^n$ 2-normája és ∞ -normája fent már szerepelt.)

1. lemma: Ha $1 < p, q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ és $a, b \geq 0$, akkor

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \square$$

Érdekes megjegyezni, hogy a fenti egyenlőtlenség a súlyozott számtani és mértani közép egyenlőtlenségnek felel meg:

$$x^t y^{1-t} \leq tx + (1-t)y \quad (0 < t < 1, \quad x, y > 0). \quad (2.1.4)$$

Ezt lehet bizonyítani a standard számtani és mértani közép egyenlőtlenségből.

$$x^{1/2} y^{1/2} \leq \frac{x+y}{2}, \quad y \leq x$$

alapján

$$x^{1/4} y^{3/4} = ((x^{1/2} y^{1/2})y)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{2} + y \right) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y.$$

Ha ezt folytatjuk és limeszt is veszünk, akkor meglesz (2.1.4).

A lemmában szereplő p és q számokat egymás **konjugáltjainak** nevezzük. Érdemes a $p = 1$ és $p = \infty$ eseteket is megengedni. Ekkor rendre $q = \infty$ és $q = 1$.

1. tétel: (Hölder-egyenlőtlenség) Ha $x, y \in \mathbb{C}^n$ és $1 \leq p, q \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, akkor

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| c_i \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p c_i \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^q c_i \right]^{1/q}$$

$c_1, c_2, \dots, c_n \geq 0$ számokra.

Bizonyítás: Legyen

$$N := \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p c_i \right]^{1/p} \quad \text{és} \quad M := \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^q c_i \right]^{1/q}.$$

Alkalmazzuk a megelőző lemmát az $a = |x_i|/N$ és $b = |y_i|/M$ választással és szorozzuk be c_i -vel. Ekkor

$$\frac{|x_i y_i| c_i}{NM} \leq \frac{|x_i|^p c_i}{p N^p} + \frac{|y_i|^q c_i}{q M^q}.$$

Ezután összegezzünk i -re:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i y_i| c_i}{NM} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p c_i}{p N^p} + \frac{|y_i|^q c_i}{q M^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ez maga a bizonyítandó egyenlőtlenség. □

2. tétel: (Minkowski-egyenlőtlenség) Ha $x, y \in \mathbb{C}^n$ és $1 \leq p$, akkor

$$\left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p c_i \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p c_i \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^p c_i \right]^{1/p}$$

$c_1, c_2, \dots, c_n \geq 0$ számokra.

Bizonyítás: A $p = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $p > 1$, és induljunk ki a

$$(a + b)^p c = \left((a + b)^{p-1} c^{1/q} \right) a c^{1/p} + \left((a + b)^{p-1} c^{1/q} \right) b c^{1/p}$$

azonosságból. Használjuk fel ezt:

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p c_i \leq \sum_{i=1}^n \left((|x_i| + |y_i|)^{p-1} c_i^{1/q} \right) |x_i| c_i^{1/p} + \sum_{i=1}^n \left((|x_i| + |y_i|)^{p-1} c_i^{1/q} \right) |y_i| c_i^{1/p}.$$

Most alkalmazzuk mindkét tagra a Hölder-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p c_i &\leq \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p c_i \right]^{1/q} \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p c_i \right]^{1/p} + \\ &+ \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p c_i \right]^{1/q} \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^p c_i \right]^{1/p}, \end{aligned}$$

ugyanis $(p-1)q = p$. Elosztva mindkét oldalt a $[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p c_i]^{1/q}$ kifejezéssel, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p c_i \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p c_i \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^p c_i \right]^{1/p}$$

$(1 - 1/q = 1/p)$. Ez majdnem a bizonyítandó. Mivel

$$\left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p c_i \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p c_i \right]^{1/p},$$

a Minkowski-egyenlőtlenség következik. $\square$

Legyen

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p := \left[|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p \right]^{1/p}. \quad (2.1.5)$$

A Minkowski-egyenlőtlenség biztosítja, hogy így akár $\mathbb{R}^n$, akár $\mathbb{C}^n$ normált térré válik, $1 \leq p$. A $p = 2$ paraméter normája a Hilbert-tér esete lesz. A $\|\cdot\|_\infty$ normát már értelmeztük más módon.

3. példa: A Minkowski-egyenlőtlenséget az $n \rightarrow \infty$ határátmenettel végtelen sorozatokra is kiterjeszthetjük. Legyen ℓ^p azoknak a végtelen (x_n) sorozatoknak a halmaza, amelyekre $\sum_n |x_n|^p$ véges. ℓ^p a

$$\|x\|_p := \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right]^{1/p} \quad (2.1.6)$$

normával normált tér lesz, $1 \leq p < \infty$.

ℓ^∞ a korlátos sorozatok tere az

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x_n|\}$$

normával. $\square$

Az $(X, \|\cdot\|)$ normált térben

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

egy távolságot értelmez, amellyel x metrikus térré válik. Ha adott a metrika, akkor beszélhetünk **konvergens** sorozatokról. $x_n \rightarrow x$ jelentése $d(x_n, x) \rightarrow 0$. A $G \subset X$ **nyílt halmaz**, ha minden $x \in G$ esetén létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$G(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\} \subset G.$$

A bal oldalon álló halmazt x középpontú ε sugarú (nyílt) gömbnek nevezzük. (Amennyiben $\mathbb{R}^3$ -at a $\|\cdot\|_2$ normával tekintjük, akkor ez a halmaz a szokásos geometriai értelemben vett gömb, azonban a $\|\cdot\|_\infty$ normát véve x középpontú kockához jutunk.) Az $F \subset X$ **zárt**, ha $x_n \in F$ és $x_n \rightarrow x$ esetén $x \in F$. Egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha komplementuma zárt.

4. példa: A korlátos sorozatok ℓ^∞ terében egy c_0 zárt alteret alkotnak a nullához tartó sorozatok. $\square$

5. példa: A $\mathbb{R}^n$ térben a konvergencia egyszerűen koordinátánkénti konvergenciát jelent bármelyik p -normát tekintjük. A konvergens sorozatok és a nyílt halmazok különböző p -normákra ugyanazok. $\square$

Ha az X lineáris téren olyan $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák vannak adva, amelyekre nézve a nyílt halmazok ugyanazok, akkor a két normát (topologikusan) **ekvivalensnek** nevezzük. Az előző példa az $\mathbb{R}^n$ téren mutatott ekvivalens normákat. Megmutatható, hogy véges dimenziós téren bármely két norma ekvivalens.

6. példa: Legyen $C^1[0, 1]$ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható valós függvények tere. Legyen továbbá

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\} + \sup\{|f'(x)| : 0 \leq x \leq 1\}, \\ \|f\|_2 &:= |f(0)| + \sup\{|f'(x)| : 0 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

Ekkor $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$. Ha egy halmaz nyílt $\|\cdot\|_2$ -re, akkor bármely pontja körül lehet írni egy valamilyen ε sugarú $\|\cdot\|_2$ -gömböt, ami tartalmazza az ugyanilyen sugarú $\|\cdot\|_1$ -gömböt. Következésképpen a választott $\|\cdot\|_2$ -re nyílt halmaz $\|\cdot\|_1$ -re nézve is nyílt.

Másrészt a középértéktétel szerint $f(x) = f(0) + f'(\xi)$, és ezért $\sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\} \leq |f(0)| + \sup\{|f'(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$. Tehát $\|\cdot\|_1 \leq 2\|\cdot\|_2$. Ez az egyenlőtlenség elég ahhoz, hogy a fenti gondolatmenetet kis változtatással megismételjük. Ha egy halmaz nyílt $\|\cdot\|_1$ -re, akkor bármely pontja körül lehet írni egy valamilyen ε sugarú $\|\cdot\|_1$ -gömböt, ami tartalmazza a fele ekkora sugarú $\|\cdot\|_2$ -gömböt. A halmaz $\|\cdot\|_2$ -re nézve is nyílt. $\square$

Az $F : X \rightarrow Y$ leképezést az $x \in X$ pontban **folytonosnak** nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, amelyre $F(G(x, \delta)) \subset G(F(x), \varepsilon)$. Ez azzal ekvivalens, hogy $x_n \rightarrow x$ maga után vonja $F(x_n) \rightarrow F(x)$ -et.

7. példa: Ha n négyzetszám, akkor az $n = m^2$ koordinátáját egy vektornak $m \times m$ -es mátrix formájában is elrendezhetjük. A mátrixok $M_n(\mathbb{R})$ lineáris terén is értelmezhetünk egy 2-normát:

$$\|A\|_2 := \left[\sum_{i,j=1}^m |A_{ij}|^2 \right]^{1/2}. \quad (2.1.7)$$

Az a lineáris $F : \mathbb{R}^{m^2} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ leképezés, amely a hosszú vektorból feltördeléssel mátrixot készít kölcsönösen egyértelmű, és megtartja a 2-normát. $\square$

A normatartó leképezéseket **izometriának** nevezzük. Minden izometria folytonos.

3. tétel: Legyen $(X_1, \|\cdot\|_1)$ és $(X_2, \|\cdot\|_2)$ két normált tér és $A : X_1 \rightarrow X_2$ egy lineáris leképezés. Ekkor a következő két tulajdonság ekvivalens:

(1) A folytonos

(2) Létezik olyan $C > 0$ szám, amelyre $\|Ax\|_2 \leq C\|x\|_1$ minden $x \in X_1$ esetén.

Bizonyítás: (1) $\Rightarrow$ (2) : $G_2 = \{x_2 \in X_2 : \|x_2\|_2 < 1\}$ nyílt halmaz X_2 -ben és $A0 = 0 \in G_2$. Van olyan nyílt G_1 halmaz a folytonosság miatt, amelyre $0 \in G_1$ és $AG_1 \subset G_2$. Mivel G_1 nyílt, létezik $\varepsilon > 0$, amelyre

$$G'_1 = \{x_1 \in X_1 : \|x_1\|_1 < \varepsilon\} \subset G_1.$$

Ekkor tetszőleges $x \in X_1$ esetén $\frac{\varepsilon}{2\|x\|_1}x \in G'_1$ és

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2\|x\|_1}x\right) \in G_2,$$

azaz

$$\left\|A\left(\frac{\varepsilon}{2\|x\|_1}x\right)\right\|_2 < 1.$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in X_1$ esetén

$$\|Ax\|_2 \leq \frac{2}{\varepsilon}\|x\|_1$$

teljesül.

(2) $\Rightarrow$ (1) igazolását az olvasóra bizzuk. $\square$

A folytonos $X_1 \rightarrow X_2$ lineáris leképezések terét $B(X_1, X_2)$ -vel jelöljük. $B(X_1, X_2)$ lineáris tér, de normált tér is. Ha $A \in B(X_1, X_2)$, akkor

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_2 : x \in X_1, \|x\|_1 \leq 1\} \quad (2.1.8)$$

az előző tétel jelöléseivel. $\|A\|$ nem más, mint a 3. tétel (2) részében megjelenő lehetséges C számok legkisebbike. Ha X normált tér, akkor $B(X, X)$ helyett röviden $B(X)$ -et írunk. $B(X)$ -nek nemcsak lineáris, hanem **gyűrű struktúrája** is van, azaz elemeit az összeadás mellett szorozni is lehet: Ha $A, B \in B(X)$, akkor AB az ebben a sorrendben vett kompozíció. Az (2.1.8) **operátornormának** megvan a

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (2.1.9)$$

szubmultiplikatív tulajdonsága.

8. példa: Legyen g folytonos függvény $[a, b]$ -n, és segítségével megadunk egy $F : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionált az

$$F(f) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

képlettel. F az integrál linearitása miatt lineáris. Meg akarjuk mutatni, hogy F folytonos, és ehhez egy olyan $C > 0$ számot kell találnunk, amelyre

$$|F(f)| \leq C \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}.$$

A következőképpen becsülünk:

$$\begin{aligned} |F(f)| &= \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} |g(x)| dx = \\ &= \int_a^b |g(x)| dx \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

Az F funkcionál tehát folytonos, azaz korlátos, és $\|F\| \leq \int_a^b |g(x)| dx$.

Az $\|F\|$ pontos értékét könnyen megkaphatjuk, ha például g egy polinom. Ekkor

$$f_0(x) = \text{sign } g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } g(x) > 0, \\ 0, & \text{ha } g(x) = 0, \\ -1, & \text{ha } g(x) < 0 \end{cases}$$

egyszerű szerkezetű. A g gyökei $[a, b]$ -t véges sok részre osztják, és azokon f_0 felváltva ± 1 értékeket vesz fel. Mivel $f_0(x)g(x) = |g(x)|$,

$$\int_a^b f_0(x)g(x) dx = \int_a^b |g(x)| dx.$$

f_0 nem folytonos, ezért folytonos függvénnyel közelítjük, például úgy, hogy g gyökeinek $1/n$ sugarú környezetében változtatjuk meg, ott g -t egy lineáris függvénnyel helyettesítjük, és f_n -et kapjuk. Ekkor $\|f_n\| = 1$ és

$$\left| \int_a^b f_n(x)g(x) dx - \int_a^b f_0(x)g(x) dx \right| \leq \frac{2N}{n}M,$$

ahol N g gyökeinek száma és M $|g(x)|$ felső korlátja. Ezért

$$\left| \int_a^b f_n(x)g(x) dx \right| \geq \int_a^b |g(x)| dx - \frac{2N}{n}M,$$

n tetszőleges nagy lehet, tehát

$$\sup \left\{ \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| : \|f\| = 1 \right\} \geq \int_a^b |g(x)| dx,$$

és $\|F\| = \int_a^b |g(x)| dx$. (Ha g tetszőleges folytonos függvény, akkor Weierstrass approximációs tételét használva polinomokkal közelítve ugyanerre az eredményre jutunk.) $\square$

Ha X egy valós normált tér, akkor a $B(X, \mathbb{R})$ normált teret, ha komplex normált tér, akkor a $B(X, \mathbb{C})$ normált teret X **duális** terének mondjuk, és az X^* jelölést használjuk. Az előző példa tehát azt mondta, hogy $F \in C[a, b]^*$.

Lineáris transzformációkat nemlineáris leképezések differenciálásával is kaphatunk. Legyen X és Y normált tér, $G \subset X$ nyílt halmaz és $f : G \rightarrow Y$ a normált terek közötti leképezés. Azt mondjuk, hogy f **Frechet-értelemben differenciálható** az $x \in G$ pontban, ha létezik olyan $A : X \rightarrow Y$ folytonos lineáris transzformáció, amelyre

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} \rightarrow 0,$$

ha $\|h\| \rightarrow 0$. Az A transzformációra a $\partial f(x)$ vagy $f'(x)$ jelölést használjuk, és **Frechet-deriváltnak**, esetleg **Frechet-differenciálnak** mondjuk.

Az ismerős

$$f(x+h) = f(x) + \partial f(x)(h) + o(\|h\|) \quad (2.1.10)$$

képlet a Frechet-derivált más formában írt definíciója, benne $o(\|h\|)$ olyan mennyiséget jelent, amely $\|h\|$ -val osztva 0-hoz tart ha $\|h\| \rightarrow 0$. Egyébként a (2.1.10) képlet megmutatja, hogy ha f differenciálható az x pontban, akkor ott folytonos is. Ugyanis $\|\partial f(x)(h)\| \leq \|\partial f(x)\| \cdot \|h\|$ minden h vektorra, és tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra $\|o(\|h\|)\| \leq \varepsilon\|h\|$, ha $\|h\|$ elég kicsi.

A $\partial f(x)$ Frechet-derivált az f leképezés lokálisan legjobb lineáris közelítéseként fogható fel. Ebből az értelmezésből éppen úgy, mint a (2.1.10) képletből világos, hogy korlátozott lineáris transzformáció Frechet-deriváltja önmaga.

9. példa: Legyen X egy normált tér, ami algebra is, és $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ minden $A, B \in X$ esetén. Legyen $f : X \rightarrow X$ a harmadik hatványra emelés, azaz $f(T) = T^3$. Megmutatjuk, hogy f Frechet-deriváltja a T helyen $A : H \mapsto T^2H + THT + HT^2$, azaz $\partial f(T)(H) = T^2H + THT + HT^2$. Ennek igazolására a

$$\frac{\|f(T+H) - f(T) - AH\|}{\|H\|} = \frac{\|H^3 + H^2T + HTH + TH^2\|}{\|H\|}$$

határértékét kell vizsgálni. Felülről becsülhetünk a norma szubmultiplikativitását használva.

$$\frac{\|H^3 + H^2T + HTH + TH^2\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|^3 + 3\|H\|^2\|T\|}{\|H\|} = 3\|H\|\|T\| + \|H\|^2,$$

ami 0-hoz tart, ha $\|H\| \rightarrow 0$. □

A Frechet-deriváltra teljesül a láncszabály:

4. tétel: Legyen X_1, X_2, X_3 normált tér. Ha $g : X_1 \rightarrow X_2$ Frechet-differenciálható az $x \in X_1$ pontban és $f : X_2 \rightarrow X_3$ Frechet-differenciálható az $y := g(x)$ pontban, akkor $\Phi := f \circ g$ Frechet-differenciálható az x pontban, és

$$\Phi'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x). \quad \square$$

Legyen ismét X és Y normált tér, $G \subset X$ nyílt halmaz és $f : G \rightarrow Y$ a normált terek közötti leképezés. Azt mondjuk, hogy f **Gateaux-értelemben differenciálható** az $x \in G$ pontban, ha létezik olyan $A : X \rightarrow Y$ folytonos lineáris transzformáció, amelyre

$$\frac{\|f(x+th) - f(x) - A(th)\|}{t} \rightarrow 0,$$

ha $t \rightarrow 0$. (t valós vagy komplex szám, annak megfelelően, hogy X és Y milyen normált terek.) Az A transzformációt **Gateaux-deriválnak** vagy **Gateaux-differenciálnak** mondjuk, és Ah -ra a $df(x, h)$ jelölést használjuk.

$$f(x + th) = f(x) + t\partial f(x, h) + o(t) \quad (2.1.11)$$

a Gateaux-differenciál ekvivalens definíciója. $\partial f(x, h)$ -t az x pontban h irányba vett deriválnak is mondhatjuk.

A Gateaux-értelemben differenciálható kétváltozós függvény nem feltétlenül folytonos. Ugyanakkor a definíciók összevetése mutatja, hogy Frechet-differenciálható leképezés Gateaux-differenciálható is, és a Gateaux-derivált megegyezik a Frechet-deriválttal. (Valóban, ha (2.1.10)-ben h helyébe th -t teszünk, akkor egy $\|h\|$ faktortól eltekintve (2.1.11)-ot kapjuk.)

A Gateaux- és Frechet-differenciálok kapcsolatát jól megvilágítja a következő példa.

10. példa: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény. Ha f az $x \in \mathbb{R}^2$ pontban bármilyen irányban differenciálható, és

$$\frac{\partial f(x + th)}{\partial t} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} h_2,$$

akkor f Gateaux-differenciálható, $\partial f(x, h) = h_1 \partial_{x_1} f + h_2 \partial_{x_2} f$. Például, ha

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_2 = x_1^2 > 0 \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

akkor $\partial f(0, h) = 0$, bár f nem folytonos a $(0, 0)$ pontban.

Ha általánosabban $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik az x_0 pontban, akkor ismeretes, hogy iránymenti deriváltjai léteznek, és

$$\frac{\partial f(x_0 + th)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i,$$

tehát

$$\partial f(x_0, h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right), h \right\rangle.$$

A középértéktétel szerint van egy $0 \leq \xi_h \leq 1$, amelyre

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \partial f(x_0 + \xi_h h, h).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i = \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + \xi_h h) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + \xi_h h) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0 + \xi_h h) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right), h \right\rangle, \end{aligned}$$

ami 0-hoz tart $\|h\|$ -val osztva a parciális deriváltak folytonossága mellett. Ilyenkor f Frechet-differenciálható, és

$$\partial f(x_0)(h) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right), h \right\rangle. \quad \square$$

2.2. Banach-terek

Legyen (x_n) egy sorozat valamilyen normált térben. **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra van egy N küszöbindex, amelyre $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, ha $n, m \geq N$. Egy normált teret **Banach-térnek** nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozatnak létezik határértéke.



Stefan Banach (1892–1945)

Stefan Banach a mai Lvovban dolgozott. Könyve a lineáris operátorokról 1932-ben jelent meg. Ez a könyv tartalmazta a zárt gráf tételt, az egyenletes korlátosság tételét, a gyenge topológiát és sok mást. A teljes normált terek elmélete olyan sikeresnek bizonyult, hogy hamarosan Banach-tereknek nevezték őket.

11. példa: $C[a, b]$ a szokásos szuprémum normával Banach-tér. Tételezzük fel ugyanis, hogy f_n Cauchy-sorozat. Ekkor bármilyen $a \leq x \leq b$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|,$$

és $f_n(x)$ szintén Cauchy-féle számsorozat. Létezik határértéke, amit $f(x)$ -szel jelölünk. Megmutatjuk, hogy $\sup |f(x) - f_n(x)|$ tart 0-hoz.

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{m(x)}(x)| + |f_{m(x)}(x) - f_n(x)|$$

nyilvánvalóan. Az x -től függő $m(x)$ -et olyan nagynak választjuk, hogy az első tag a jobb oldalon ε -nál kisebb legyen. A második tag viszont x -ben egyenletesen kicsi, ha n és $m(x)$ elég nagy. Tehát f_n tart f -hez egyenletesen, és ebből kapjuk azt, hogy f is folytonos függvény. $\square$

5. tétel: Legyen $(X_1, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér és $(X_2, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-tér. Ekkor $B(X_1, X_2)$ az operátor normával ellátva Banach-tér.

Bizonyítás: A bizonyítás követi az előző példa gondolatmenetét. Tételezzük fel, hogy $A_n \in B(X_1, X_2)$ egy Cauchy-sorozat. Ekkor

$$\|A_n x - A_m x\|_2 \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_1$$

minden $x \in X_1$ esetén, tehát $A_n x$ Cauchy-sorozat az X_2 térben. Mivel az teljes, létezik egy Ax határértéke. Az $x \mapsto Ax$ hozzárendelésről meg kell mutatni, hogy lineáris, majd $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ bizonyítása megint az előző példát követi. $\square$

2. lemma: Legyen X egy Banach-tér és $x_1, x_2, \dots \in X$. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, akkor az $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ sorozat konvergens.

Bizonyítás: A $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ feltételből következik, hogy $\sum_{n=1}^m \|x_n\|$ Cauchy-féle számsorozat. Ha $k > m$, akkor

$$\|s_k - s_m\| = \|x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_k\| \leq \sum_{i=m+1}^k \|x_i\|,$$

és a becslés mutatja, hogy s_m Cauchy-sorozat, ezért konvergens. $\square$

A $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sort **abszolút konvergensnek nevezzük**, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konvergens. Az előző lemma azt mondja, hogy Banach-térben abszolút konvergens sor konvergens. Ennél több is igaz, a sor összege nem változik, ha átpermutáljuk. (Bizonyítás a 23. példában.)

12. példa: Legyen X egy Banach-tér és $A \in B(X)$. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

sor abszolút konvergens a $B(X)$ Banach-térben, ugyanis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}.$$

A sor összegét $\exp(A)$ -val jelöljük. Ehhez hasonlóan értelmezhetjük hatványsorral $f(A)$ -t, ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a teljes számegyenesen konvergens hatványsorba fejthető (úgynevezett analitikus) függvény. Például a $\sin A$ és $\cos A$ operátorok hatványsorral értelmezhetők, és érvényben marad a komplex számok köréből jól ismert

$$\exp(iA) = \cos A + i \sin A$$

összefüggés, ha X komplex normált tér. $\square$

13. példa: Legyen E egy Banach-tér és $A: E \rightarrow E$ korlátos lineáris operátor. A

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) &= u_0 \in E \end{aligned}$$

kezdeti érték probléma explicit megoldását könnyű megadni:

$$u(t) = e^{tA} u_0.$$

Világos, hogy $u(0) = u_0$ teljesül. $u(t)$ differenciálását először $t = 0$ -ban hajthatjuk végre.

$$\frac{e^{tA} u_0 - u_0}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k u_0 = A u_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k u_0.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k u_0 \right\| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^{k-1}}{k!} \|A\|^k \|u_0\| \leq \\ &\leq |t| \|A\|^2 \|u_0\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k = \\ &= |t| \|A\|^2 \|u_0\| e^{|t| \|A\|}, \end{aligned}$$

ami 0-hoz tart, ha $t \rightarrow 0$. A tetszőleges t pontban a deriváltat az

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA} \quad (2.2.12)$$

azonosság segítségével számolhatjuk ki.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{tA} \frac{e^{hA} u_0 - u_0}{h} = \\ &= e^{tA} A u_0 = A e^{tA} u_0 = A u(t). \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet megoldásának egyértelmősége általános tételekből következik. $\square$

A fenti számolás azt is adja, hogy az operátorértékű $t \mapsto e^{tA}$ függvény Frechet-deriváltja $A e^{tA}$.

A (2.2.12) formula szerint e^{tA} **operátor félcsoport**, amelynek 0-ban vett deriváltját **generátornak** nevezzük. Az e^{tA} operátor félcsoport generátora A . Tehát minden korlátos operátor lehet generátor, de sok fontos félcsoport generátora nemkorlátos operátor.

A véges dimenziós terek analíziséből jól ismert középértéktétel a következő alakot ölti:

6. tétel: Legyen X és Y Banach-tér, $G \subset X$ nyílt halmaz és $f : G \rightarrow Y$ a normált terek közötti olyan leképezés, amely minden $x \in G$ pontban Gateaux-differenciálható. Ha $x, x+h \in G$, akkor van olyan $0 < t < 1$ szám, amelyre

$$f(x+h) = f(x) + df(x+th, h).$$

A tétel bizonyítása redukálható a középértéktételre, ha azt a $\Phi(s) := f(x+sh)$ $\mathbb{R}$ -en értelmezett függvényre alkalmazzuk. A tétel következménye, hogy a 0 Gateaux-differenciállal rendelkező függvény konstans.

3. lemma: Legyen X egy Banach-tér és $A, B \in B(X)$ felcserélhető lineáris operátorok. Ekkor

$$\exp(A+B) = \exp A \exp B.$$

Bizonyítás: Tekintsük a $\Phi : t \mapsto \exp(tA + tB) \exp(-tA) \exp(-tB)$ operátorértékű függvényt. Ennek Frechet-deriváltja

$$\begin{aligned} & \exp(tA + tB)(A + B) \exp(-tA) \exp(-tB) - \\ & - \exp(tA + tB)A \exp(-tA) \exp(-tB) - \\ & - \exp(tA + tB) \exp(-tA)B \exp(-tB) \end{aligned}$$

a Leibniz-szabály alkalmazásával, felhasználva, hogy $t \mapsto \exp(tC)$ Frechet-deriváltja $C \exp(tC)$. Mivel B és $\exp(-tA)$ felcserélhetők, látható, hogy a derivált azonosan 0. Következésképpen Φ konstans és $\Phi(t) = \Phi(0) = \text{identitás}$. Ebből az állítás következik. $\square$

4. lemma: Legyen X normált tér és Y egy Banach-tér. Ha $X_0 \subset X$ sűrű altér és $A \in B(X_0, Y)$, akkor egyértelműen létezik A -nak egy $\tilde{A} \in B(X, Y)$ kiterjesztése, és $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Bizonyítás: Tetszőleges $x \in X$ esetén van olyan X_0 -beli (x_n) sorozat, amelyre $x_n \rightarrow x$. Ekkor $\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\|$, tehát Ax_n Cauchy-sorozat, és határértékét definiáljuk úgy, mint $\tilde{A}x$. $\square$

7. tétel: Legyen X egy normált tér. Ekkor létezik egy $\tilde{X}$ Banach-tér és egy $\iota : X \rightarrow \tilde{X}$ lineáris izometria, amelyre $\iota(X)$ sűrű $\tilde{X}$ -ben.

Ha az $x \in X$ pontot azonosítjuk a $\iota(x) \in \tilde{X}$ ponttal, akkor $\tilde{X}$ -ot X bővítéseként foghatjuk fel. A tételt a szigorú értelemben nem bizonyítjuk be, de vázoljuk a bizonyítás fő gondolatát. (Egy másik bizonyítás a második duálisba való beágyazás segítségével adható.)

Ha X -ben vannak nem konvergens Cauchy-sorozatok, akkor azoknak határértéket kell biztosítani X -hez újabb pontok hozzávételével. Ha (x_n) és (y_n) X -beli Cauchy-sorozatok, akkor $\tilde{X}$ -ban konvergensek lesznek, de ugyanaz lesz a határértékük, ha $\lim \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$. $\tilde{X}$ -ot úgy definiáljuk, mint az X -beli Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztályainak halmazát, ha $(x_n) \sim (y_n)$ a $\lim \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ esetben. ι az $x \in X$ ponthoz az $(x, x, x, \dots)$ sorozat ekvivalenciaosztályát adja meg. $\tilde{X}$ -n lineáris tér struktúrát és normát kell értelmezni, amit az ekvivalenciaosztályok reprezentánsai segítségével teszünk. Például, ha (x_n) és (x'_n) X -beli Cauchy-sorozatok, akkor

$$(x_n) + (x'_n) := (x_n + x'_n) \quad \text{és} \quad \|(x_n)\| := \lim \|x_n\|.$$

Ezek a definíciók jók, mert ha $(x_n) \sim (y_n)$ és $(x'_n) \sim (y'_n)$, akkor $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$, továbbá $\lim \|x_n\| = \lim \|y_n\|$.

$\iota(X)$ sűrű $\tilde{X}$ -ban: Legyen (x_n) egy Cauchy-sorozat. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra van egy N küszöbindex, amelyre $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, ha $n, m \geq N$. Tekintsük a konstans $x_N, x_N, \dots$ sorozatot. Ez $\iota(X)$ -ben van és legfeljebb ε távolságra van (x_n) -től. Ezek után még meg-gondolást igényel $\tilde{X}$ teljességének belátása.

Azt mondjuk, hogy az $\tilde{X}$ Banach-tér az X tér **teljes burka**. (Az $\tilde{X}$ Banach-tér megkapható a második duálisba való beágyazással is.)

14. példa: Legyen X az $[a, b]$ kompakt intervallumon értelmezett polinomok tere az

$$\|p\| = \sup\{|p(x)| : a \leq x \leq b\}$$

normával. X teljes burka a $C[a, b]$ tér. Valóban, ez Banach-tér, és a Weierstrass-féle approximációs tétel szerint X sűrű $C[a, b]$ -ben. $\square$

15. példa: Az $[a, b]$ intervallumon Lebesgue-értelemben integrálható függvények terét is értelmezhetjük teljes burokként. Ha $C[a, b]$ -t nem a szokásos, hanem a Riemann-integrállal adott

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

normával tekintjük, akkor $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ teljes burka az integrálható függvények $L^1[a, b]$ tere.

Nem csak az integrálható függvényeket, de magát a Lebesgue-integrált is értelmezhetjük így. A folytonos függvényeken téglaoösszegek határértékeként értelmezett integrál folytonos lineáris funkcionál:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Az 4. lemma szerint a funkcionál kiterjeszthető a teljes burokra, $L^1[a, b]$ -re. Tehát ha $g \in L^1[a, b]$, de g nem folytonos, akkor g integrálja már nem téglaoösszegekkel van értelmezve, hanem elég közvetett módon. „Keresünk” egy folytonos függvényekből álló f_n sorozatot, amely $\|\cdot\|_1$ normában konvergál g -hez, és g integrálja az $\int_a^b f_n(x) dx$ sorozat határértéke. $\square$

8. tétel: (Nyílt leképezés tétele) Legyen X_1 és X_2 Banach-terek. Ha $A \in B(X_1, X_2)$ ráképezés, akkor nyílt halmazt nyílt halmazba visz.

A tétel következménye, hogy Banach-terek közötti kölcsönösen egyértelmű korlátos ráképezésnek az inverze is korlátos.

Legyen X és Y normált tér és A egy lineáris leképezés az X tér $\mathcal{D}(A)$ alteréről az Y térbe. Az $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ párok lineáris teret alkotnak a koordinátánkénti műveletekkel, és

$$\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$$

norma ezen a téren, amelyet $X \oplus Y$ -nal jelölhetünk. Ha X és Y teljes, akkor $X \oplus Y$ is az. Az A operátor **gráfja** ennek a térnek az

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}$$

altère. Ha $\Gamma(A)$ zárt, akkor A -t **zárt operátornak** mondjuk.

9. tétel: (Zárt gráf tétel) Ha X, Y Banach-terek, és $A : X \rightarrow Y$ a teljes X téren értelmezett zárt operátor, akkor A korlátos.

Bizonyítás: A feltevésekből következik, hogy $X \oplus Y$ Banach-tér. $\Gamma(A)$ tehát egy Banach-tér zárt része, és maga is Banach-tér. Az $(x, Ax) \mapsto x$ leképezés a nyílt leképezés tétele szerint nyílt, ezért inverze korlátos, azaz

$$C\|x\| \geq (\|x\| + \|Ax\|).$$

Ez az egyenlőtlenség A korlátosságát mutatja. $\square$

10. tétel: (Az egyenletes korlátosság tétele, Banach–Steinhaus-tétel) Legyen X egy Banach-tér és Y egy normált tér. Ha $A_t \in B(X, Y)$ ($t \in T$) korlátos lineáris leképezéseknek olyan családja, hogy

$$\sup\{\|A_t x\| : t \in T\} < +\infty$$

minden $x \in X$ esetén, akkor $\sup\{\|A_t\| : t \in T\} < \infty$.

16. példa: Legyen X azoknak a folytonos $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek a tere, amelyekre $f(-\pi) = f(\pi)$. Ez Banach-tér a maximum normára nézve. Az X -beli függvényeket **Fourier-sorba** lehet fejteni: $f \in X$ Fourier-sora

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin mx + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos mx,$$

ahol

$$a_m := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \quad \text{és} \quad b_m := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

A Fourier-sor n -edik részletösszege

$$A_n(f) := \sum_{m=1}^n a_m \sin mx + \sum_{m=0}^n b_m \cos mx.$$

A_n egy korlátos lineáris $X \rightarrow X$ operátor. (Könnyű becslést adni a normájára, de korlátossága abból a tényből is következik, hogy véges rangú.)

$A_n(f) \rightarrow f$ azt jelenti, hogy az f függvényhez a Fourier-sora egyenletesen konvergál. Ha ez minden függvényre fennáll, akkor az egyenletes korlátosság tétele szerint $\sup\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ véges. Megmutatjuk, hogy nem ez a helyzet, tehát kell lenni olyan folytonos X -beli függvénynek, amelynek a Fourier-sora nem konvergál egyenletesen.

Tekintsük az

$$f_n(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+2)x}{1} - \frac{\cos(n+3)x}{2} - \dots - \frac{\cos(2n+1)x}{n}$$

trigonometrikus polinomot. A

$$\cos t - \cos s = 2 \sin \frac{t+s}{2} \sin \frac{t-s}{2}$$

azonosság alapján

$$f_n(x) = 2 \sin(n+1)x \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}.$$

Megmutatható,⁶ hogy $|f_n(x)| \leq 4\sqrt{\pi}$. Mivel

$$A_n f_n(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1},$$

és $\|A_n f_n\| \geq |A_n f_n(0)|$, azt kapjuk, hogy

$$\|A_n\| \geq \frac{\|A_n(f_n)\|}{\|f_n\|} \geq \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Ez jól mutatja, hogy $\|A_n\| \rightarrow \infty$.

Az f függvény **folytonossági modulusa**

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta\}.$$

Ha $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) \log \omega(\delta) = 0$, akkor igaz az, hogy $A_n f \rightarrow f$, azaz f Fourier-sora egyenletesen konvergál. Természetesen folytonosan differenciálható függvények esetében ez így van. $\square$

2.3. Hilbert-tér

Legyen $\mathcal{H}$ egy lineáris tér a komplex test felett. A kétváltozós $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt **belső szorzatnak** nevezzük, ha

- (1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ($x, y, z \in \mathcal{H}$),
- (2) $\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$, ($\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{H}$),
- (3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ($x, y \in \mathcal{H}$),
- (4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ bármilyen $x \in \mathcal{H}$ esetén, és az egyenlőség csak $x = 0$ mellett áll fenn.

Az (1–2) tulajdonságok azt jelentik, hogy a belső szorzat konjugált lineáris az első változóban. A (3) tulajdonság maga után vonja, hogy a második változóban pedig lineáris.

A belső szorzat (3) és (4) tulajdonságaiból következik, hogy

$$0 \leq \langle x + ty, x + ty \rangle = t^2 \langle y, y \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$$

minden $t \in \mathbb{R}$ számra. E t -ben másodfokú kifejezés diszkriminánsa nem lehet pozitív, ezért

$$(\operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

A jobb oldal érzéketlen y -nak egy abszolút értékű komplex számmal való megszorzására, amivel a baloldalon $|\langle x, y \rangle|^2$ -t kaphatunk. Így

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \quad (2.3.13)$$

A belső szorzat az

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (2.3.14)$$

formulával normát határoz meg. Az

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

háromszögegyenlőtlenség teljesülése a (2.3.13) egyenlőtlenség következménye. Egyébként maga (2.3.13) a norma jelöléssel az

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

alakot ölti. (Ezt és a vele ekvivalens (2.3.13)-t Schwarz-egyenlőtlenségnek szokás nevezni.)

Ha $\mathcal{H}$ teljes a normából adódó

$$d(x, y) =: \|x - y\|$$

távolságra nézve, akkor a $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt **Hilbert-térnek** nevezzük. Ha úgy gondoljuk, hogy világos, mi a belső szorzat, akkor rendszerint $\mathcal{H}$ Hilbert-térről beszélünk.

17. példa: A legegyszerűbb példa a komplex szám n -esek tere: $\mathbb{C}^n$. Itt a belső szorzat $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ nem más, mint a vektorok szokásos skaláris szorzata. $\square$



David Hilbert (1862–1943)

David Hilbert Königsbergben született, ott doktorált, majd 1895-ben Göttingenben kapott katedrát. Az integrálegyenletek révén jutott a végtelen dimenziós terek tanulmányozásához. Neve 23 problémához is kapcsolódik, ezeket tartotta a XX. századi matematika fontos kérdéseinek. Haar Alfréd az ő irányítása mellett doktorált Göttingenben 1909-ben.

18. példa: Legyen (X, B, μ) egy (σ) -véges mértéktér (lásd a Függelék) és $L^2(\mu)$ a megfelelő L^2 -tér, a négyzetesen integrálható függvények tere. Az

$$\langle f, g \rangle = \int \overline{f(x)} g(x) d\mu(x)$$

belső szorzattal egy Hilbert-térhez jutunk. A belső szorzat tulajdonságai teljesülnek, a tér teljességét pedig az L^p -terek általános elméletéből tudjuk, lásd a 2. fejezetet.

Ha X az $\mathbb{R}^n$ tér és μ a Lebesgue-mérték, akkor az $L^2(\mathbb{R}^n)$ Hilbert-térhez jutunk, ami a négyzetesen integrálható függvényekből áll.

Ha X a $\mathbb{T}$ az egységkörvonal és a mérték az ívhossz, akkor $L^2(\mathbb{T})$ az egységkörvonalon négyzetesen integrálható függvények tere, azaz az olyan $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényeket tekintjük, amelyekre

$$\int |f(z)|^2 dz = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 d\varphi$$

véges.

□

19. példa: Az előző példa $L^2(\mathbb{R}^n)$ Hilbert-teréhez a Riemann-féle integrálon keresztül is eljuthatunk. Legyen $C_c(\mathbb{R}^n)$ a kompakt tartójú folytonos függvények tere. Ezen

$$\langle f, g \rangle = \int \overline{f(x)} g(x) d(x)$$

belső szorzat. (Az integrál egyszerű Riemann-integrál.) $C_c(\mathbb{R}^n)$ nem Hilbert-tér, mert nem teljes. Teljessé lehet tenni a 2. fejezet 7. tétele szerint. A teljessé tétel Banach-tér, de a belső szorzat is kiterjeszthető rá. Amit így kapunk, az éppen $L^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Bármely két Hilbert-térből egy újabbat konstruálhatunk. Legyen $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ két Hilbert-tér. Az $\{(x, y) : x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\}$ párok lineáris terén

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle_1 + \langle y_1, y_2 \rangle_2 \quad (2.3.15)$$

belső szorzatot ad. Ebben a térben (x_n, y_n) akkor és csak akkor Caychy-sorozat, ha mind x_n , mind y_n Cauchy-sorozat (a $\mathcal{H}_1$, ill. $\mathcal{H}_2$ terekben). Meggondolható, hogy ez a tér teljességéhez vezet. Az így konstruált Hilbert-teret $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ **direktösszegének** nevezzük, jelölésben $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Az $x \mapsto (x, 0)$ leképezés $\mathcal{H}_1$ -ből $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ -be lineáris, izometrikus és még belsőszorzattartó is. Ha $x \in \mathcal{H}_1$ -et és $(x, 0) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ -et azonosítjuk, akkor $\mathcal{H}_1$ -et $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ alterének tekinthetjük. Érdeemes megjegyezni, hogy (x, y) helyett sok esetben $x \oplus y$ -t írnak.

Ha $\langle x, y \rangle = 0$ egy Hilbert-tér vektoraira, akkor x -et és y -t **ortogonálisnak** nevezzük, és az $x \perp y$ jelölést használjuk. Ha $H \subset \mathcal{H}$, akkor $H^\perp := \{x \in \mathcal{H} : x \perp h \text{ minden } h \in H\}$. Bármilyen $H \subset \mathcal{H}$ halmazra $H^\perp$ zárt altér.

20. példa: $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ -ben $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ ortogonálisak, mi több $\mathcal{H}_1^\perp = \mathcal{H}_2$. (Természetesen $\mathcal{H}_1$ -et és $\mathcal{H}_2$ -t $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ altéréiként kell felfognunk.) $\square$

2.4. A duális tér

Az X normált tér X^* duálisa az X -en értelmezett korlátos lineáris funkcionálok tere.⁷ X^* a 5. tétel értelmében Banach-tér.

21. példa: Tekintsük $\mathbb{R}^n$ -et a p -normával, $1 < p < \infty$. Legyen $\varphi \in (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)^*$. Ha

$$\varphi(0^{(1)}, \dots, 0^{(k-1)}, 1^{(k)}, 0^{(k+1)}, \dots, 0^{(n)}) = c_k,$$

akkor a linearitás alapján

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n x_k c_k,$$

a φ funkcionált egyértelműen megadhatjuk a $c \in \mathbb{R}^n$ vektorral. Ha $p^{-1} + q^{-1} = 1$, akkor a Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$|\varphi(x)| = \left| \sum_{k=1}^n x_k c_k \right| \leq \|x\|_p \|c\|_q,$$

ezért $\|\varphi\| \leq \|c\|_q$. Másrészt legyen $x_k = \text{sign}(c_k)|c_k|^{q-1}$. Ekkor

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n |c_k|^q = \|c\|_q^q = \|c\|_q \|x\|_p,$$

ugyanis $\|x\|_p = \|c\|_q^{q-1}$. Tehát $\|\varphi\| = \|c\|_q$.

Egy izometrikus megfeleltetést létesítettünk a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)^*$ és a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$ terek között:

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)^* \simeq (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$$

Közvetlenül látható, hogy ez az összefüggés $p = 1$ és $p = \infty$ esetén is fennáll. $\square$

22. példa: Legyen $1 < p < \infty$, és az ℓ^p tér duálisát akarjuk meghatározni, az előző példa gondolatmenetét követve. Ha $\varphi \in (\ell^p)^*$, akkor

$$\varphi(0^{(1)}, \dots, 0^{(k-1)}, 1^{(k)}, 0^{(k+1)}, \dots) = c_k$$

egy c_k sorozatot határoz meg, amellyel $\varphi(x)$ kifejezhető. A linearitás és a folytonosság alapján

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k.$$

Legyen

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n x_k c_k.$$

Mivel ez φ megszorítása egy altérre, $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$. Másrészt az előző példából tudjuk, hogy

$$\|\varphi_n\| = \left[\sum_{k=1}^n |c_k|^q \right]^{1/q}.$$

Ebből adódik, hogy $c \in \ell^q$ és $\|\varphi\| \geq \|c\|_q$. A fordított egyenlőtlenség most is egyszerűen következik a Hölder-egyenlőtlenségből. Megállapíthatjuk, hogy $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$, ha $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Ebből az is következik, hogy ℓ^q terek teljesek. $\square$

Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ egy mértéktér. (Erre vonatkozóan lásd a Függelék.) Ha $1 \leq p < +\infty$ -re, akkor $L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : |f|^p \text{ integrálható } \mu\text{-re}\}$. Ezen a téren értelmezhetünk egy normát $\mathbb{R}^n$ p normájához hasonlóan:

$$\|f\|_p := \left[\int |f(x)|^p d\mu(x) \right]^{1/p}. \quad (2.4.16)$$

(Valójában csak akkor kapunk normát, ha a majdnem mindenütt megegyező függvényeket azonosnak tekintjük.) Az 1. szakaszban megfogalmazott Minkowski- és Hölder-egyenlőtlenségek érvényben maradnak. Az $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ tér az $X = \mathbb{N}$ és a számláló mérték választásával visszadja az ℓ^p sorozatteret is. Ezért a következő tétel az ℓ^p tér duálisát adó példa általánosítása.

11. tétel: Ha $\varphi \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)^*$ valamely $(X, \mathcal{B}, \mu)$ σ -véges mértéktérre, és $1 \leq p < \infty$, akkor létezik egy $g \in L^q(X, \mathcal{B}, \mu)$ függvény, amelyre

$$\varphi(f) = \int f(x)g(x) d\mu(x),$$

és $\|\varphi\| = \|g\|_q$, továbbá $1/p + 1/q = 1$.

A $p = 2$ eset azért érdekes, mert akkor $q = 2$, tehát az $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ tér duálisa önmaga. Ez egy olyan fontos eset, hogy külön fejezetet szánunk neki. (Az $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ tér talán a „legfontosabb Hilbert-tér”, és minden Hilbert-tér megkapható ebben a formában a mértéktér alkalmas megválasztásával.)

Az $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ terek $1 < p \leq \infty$ esetén mind egy normált tér duálisai, tehát az 5. tétel értelmében teljeseek.

A folytonos függvények terének duálisát Riesz Frigyes tétele adja meg. A tétel megértése némi mértékelméletet tételez fel, ami a Függelékben megtalálható.



Riesz Frigyes (1880–1956)

Riesz Frigyes Budapesten, Göttingenben és Zürichben tanult, Kolozsváron lett professzor, majd 1920-ban a Kolozsvári Egyetemmel együtt Szegedre költözött. Szegeden Haar Alfréddal együtt hozta létre a Bolyai János Matematikai Intézetet és az Acta Scientiarum Mathematicarum folyóiratot. Riesz a funkcionálanálízis egyik megteremtője volt. Dolgozatait nagyon jó matematikai ízléssel, elegáns stílusban írta, nem volt híve az önmagáért történő általánosításnak. (A kép rektori díszruhában ábrázolja őt.)

12. tétel: (Riesz-féle reprezentációs tétel) Ha $\varphi \in C_{\mathbb{C}}[a, b]^*$, akkor egyértelműen létezik olyan komplex értékű $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, amelyre

$$\|\varphi\| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

$$\text{és } \varphi(f) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

□

Figyelem: A $\int_a^b f(x) dg(x)$ Stieltjes-féle integrál, értelmezése a Függelékben van kifejtve. A tétel szerint a g teljes változása $\|\varphi\|$. Ha $\nu([t, s]) := g(s) - g(t)$, akkor ν kiterjeszthető az intervallumokról az $[a, b]$ intervallum Borel-halmazaira σ -additív komplex mértékké. Ezt a tényt belefoglalazzuk a tétel egy másik változatába, amely a pozitív lineáris funkcionálokat állítja elő integrálként.

13. tétel: (Riesz-féle reprezentációs tétel) Legyen $\varphi : C_{\mathbb{R}}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre $f \geq 0$ esetén $\varphi(f) \geq 0$. Ekkor létezik olyan σ -additív mérték $[a, b]$ Borel-halmazain, amelyre

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x) d\mu(x).$$

$$\text{Továbbá } \mu([a, b]) = \|\varphi\| = \varphi(1).$$

□

A Riesz-tétel második formája azért előnyösebb, mert kiterjeszthető általánosabb terekre, az $[a, b]$ intervallum helyére kompakt metrikus teret is tehetünk.

14. tétel: (Hahn–Banach-tétel) Legyen X egy normált tér és X_0 lineáris altere X -nek. Ha $\varphi \in X_0^*$ korlátos lineáris funkcionál X_0 -on, akkor létezik φ -nek olyan $\tilde{\varphi} \in X^*$ kiterjesztése, amelyre $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

□

A tételt nem bizonyítjuk, csak hangsúlyozzuk, hogy a kiterjesztés egyértelműségéről nincsen szó.

Mint már korábban is említettük X^* a 5. tétel értelmében Banach-tér. Ezt a tényt felhasználhatjuk arra, hogy a 7. tételre egy másik bizonyítást adjunk.

Az X^* Banach-tér duálisa X^{**} , X második duálisa. Ha $x \in X$, akkor értelmezhetünk egy $F_x \in X^{**}$ funkcionált az $F_x(\varphi) := \varphi(x)$ képlettel, $\varphi \in X^*$. Az $x \mapsto F_x$ hozzárendelés lineáris és izometrikus:

$$\|F_x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|\varphi\| = 1\} = \|x\|.$$

Valóban, $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|$, és a Hahn–Banach-tétel következményeként minden $x \in X$ vektorhoz van olyan $\varphi \in X^*$ funkcionál, amelyre $\|\varphi\| = 1$ és $\varphi(x) = \|x\|$. Ha a 7. tételben szereplő ι leképezésnek az $x \mapsto F_x$ hozzárendelést, $\tilde{X}$ -nek pedig X^{**} Banach-tér $\{F_x : x \in X\}$ lineáris alterének lezárását választjuk, akkor a tétel állítása teljesül.

23. példa: Valós számok abszolút konvergens sora permutáció invariáns. Ezt fel fogjuk használni egy Banach-tér változatra.

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens sor egy X Banach-térben és π az egész számok permutációja. Ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = b$$

összegek megvannak az abszolút konvergencia következtében. Megmutatjuk, hogy $a = b$.

Legyen $\varphi \in X^*$ duális funkcionál. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$ abszolút konvergens, hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| \leq \|\varphi\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

A valós eset adja, hogy

$$\varphi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\pi(n)}) = \varphi(b).$$

Mivel $\varphi(a) = \varphi(b)$ minden $\varphi \in X^*$ esetén, $a = b$. Valóban, ha $a \neq b$, akkor létezik olyan $\varphi \in X^*$, hogy $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ a Hahn-Banach tétel alapján. $\square$

24. példa: Legyen ℓ^∞ a korlátos számsorozatok tere a

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

normával, és legyen a c a konvergens sorozatokból álló altér. Értelmezzünk c -n egy φ funkcionált a

$$\varphi(x) := \lim x_n$$

képlettel. φ korlátos, $\|\varphi\| = 1$. Ezért a Hahn–Banach-tétel alkalmazásával kaphatunk egy olyan $\tilde{\varphi}$ lineáris funkcionált, amely konvergens sorozatokhoz éppen a határértékeket rendeli. $\tilde{\varphi}$ olyan, mint egy általánosított határérték, amely azonban messze nem egyértelmű. Végtelen sok lehetséges $\tilde{\varphi}$ funkcionál van, például $\tilde{\varphi}$ értékét az $1, -1, 1, -1, 1 - 1, \dots$ sorozaton tetszőlegesen -1 és 1 közé eső számnak előírhatjuk.

Legyen $\tilde{\varphi}$ egy általánosított határérték. Ekkor $\tilde{\varphi}(x)$ nem adható meg $\sum_n x_n c_n$ alakban valamilyen $c \in \ell^1$ sorozattal. Ez a tény azt mutatja, hogy ℓ^∞ duálisa bővebb, mint ℓ^1 . $\square$

Egy normált tér duálisán folytonos lineáris funkcionáljai terét értjük. A következő tétel azt fejezi ki, hogy a Hilbert-tér esetében a duális tér magával a térrel van kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban.

15. tétel: (Riesz reprezentációs tétele) Minden $T \in \mathcal{H}^*$ lineáris funkcionálhoz egyértelműen található egy $y_T \in \mathcal{H}$ vektor, amelyre $T(x) = \langle y_T, x \rangle$ ($x \in \mathcal{H}$). Továbbá $\|y_T\|_{\mathcal{H}} = \|T\|_{\mathcal{H}^*}$.

Bizonyítás: $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{H} : Tx = 0\}$ zárt altér. Az $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ eset triviális, ekkor $T = 0$ és $y_T = 0$ megteszi. A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$. Ekkor a projekciótétel szerint van $x_0 \perp \mathcal{M}$ vektor, $\|x_0\| \neq 0$. $\mathcal{H}$ bármely y eleme

$$y = \left(y - \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0 \right) + \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0$$

alakban írható. Mivel a nagy zárójelben lévő tag $\mathcal{M}$ -ben van, $\mathcal{M}$ és x_0 lineárisan kifeszítik $\mathcal{H}$ -t. Az

$$y_T = \frac{\overline{T(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0$$

definícióval $T(y) = \langle y_T, y \rangle$ könnyen ellenőrizhető. A normák megegyezése:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{|T(x)| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\langle y_T, x \rangle| : \|x\| \leq 1\} \leq \\ &\leq \sup\{\|y_T\| \cdot \|x\| : \|x\| \leq 1\} = \|y_T\|. \\ \|T\| &= \sup\{|T(x)| : \|x\| \leq 1\} \geq T\left(\frac{y_T}{\|y_T\|}\right) = \left\langle y_T, \frac{y_T}{\|y_T\|} \right\rangle = \|y_T\|. \end{aligned}$$

□

A tételben megkonstruált $T \mapsto y_T$ megfeleltetés nem lineáris, mert $y_{\lambda T} = \bar{\lambda}T$. (**Konjugált lineárisnak** mondjuk.)

2.5. Bázis és frame

Hilbert-térben a vektorok egy $\{x_i\}$ családját **ortonormálnak** nevezzük, ha $\langle x_i, x_i \rangle = 1$ és $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$. A maximális ortonormált rendszer neve **ortonormált bázis**. A bázis számossága a tér **dimenziója**. (Bármely két bázis ugyanolyan számosságú.)⁸

25. példa: $\mathbb{C}^n$ -ben a szokásos bázis

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ &\dots \quad \dots \\ e_{n-1} &= (0, 0, 0, \dots, 1, 0), \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

$\mathbb{C}^n$ végtelen dimenziós analogonja az $\ell^2(\mathbb{N})$ tér. Ez azokból az $x = (x_1, x_2, \dots)$ komplex számsorozatokból áll, amelyekre $\sum_n |x_n|^2$ véges.

$$\langle x, x' \rangle := \sum_n \bar{x}_n x'_n.$$

A tér **kanonikus bázisa** a

$$\delta_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \quad (\text{az egyes az } n\text{-edik helyen van})$$

vektorokból áll, $n \in \mathbb{N}$. Gondoljuk meg, hogy $\{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ valóban bázis. A belső szorzás értelmezése szerint $\langle \delta_n, \delta_m \rangle = 0$, ha $n \neq m$ és $\|\delta_n\| = 1$. Tehát a δ_n vektorok egy ortonormált rendszert képeznek, és azt kell még megmutatni, hogy ez maximális, azaz nincs olyan $x = (x_1, x_2, \dots)$ egységvektor, amely minden δ_n -re merőleges. Mivel $\langle \delta_n, x \rangle = x_n$, csak a 0 vektor lehet merőleges mindegyik δ_n vektorra.

Egy Hilbert-tér bármely vektora sorba fejthető egy adott bázis szerint, és így a vektor az együtthatók sorozatával adható meg. A bázis koordináta-rendszerként használható.

16. tétel: (Bessel-féle azonosság) Legyen $\{x_n\}_{n=1}^N$ ortonormált rendszer a Hilbert-térben és x egy tetszőleges vektor. Ekkor

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n \rangle x_n \right\|^2.$$

Bizonyítás: Induljunk ki a következő azonosságból:

$$x = \sum_{n=1}^N \langle x_n, x \rangle x_n + \left(x - \sum_{n=1}^N \langle x_n, x \rangle x_n \right).$$

Ellenőrizzük, hogy a két tag merőleges egymásra, és ennek figyelembevételével számítsuk ki az $\langle x, x \rangle$ belső szorzatot! $\square$

Az előző tétel feltételei mellett

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2, \quad (2.5.17)$$

ami a **Bessel-egyenlőtlenség**.

17. tétel: Legyen $\{x_i : i \in I\}$ egy ortonormált bázisa a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek. Ekkor bármilyen $x \in \mathcal{H}$ vektor előáll

$$x = \sum_i \langle x_i, x \rangle x_i$$

konvergens sor alakjában, és

$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle x_i, x \rangle|^2.$$

(A $\sum_i \langle x_i, x \rangle x_i$ sor x -nek az adott bázis szerinti kifejtése.)

Bizonyítás: Ha I véges halmaz, akkor az állítás következik az előző tételből. A lényeges eset $|I| = \infty$.

Tekintetbe kell vennünk azt a lehetőséget, hogy az I halmaz esetleg nem megszámlálható. A (2.5.17) egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \sum_{i \in I_0} |\langle x_i, x \rangle|^2 : I_0 \subset I \text{ véges} \right\} = \\ & = \sup \left\{ \sum_{i \in I_0} |\langle x_i, x \rangle|^2 : I_0 \subset I \text{ megszámlálható} \right\} < \infty, \end{aligned}$$

és $J := \{i \in I : |\langle x_i, x \rangle|^2 \neq 0\}$ egy megszámlálható halmaz. Ha szükséges, akkor $\mathcal{H}$ egy zárt alterére áttérve feltételezhetjük, hogy I megszámlálható, $I = \mathbb{N}$.

A fenti okoskodás azt is adta, hogy $\sum_i |\langle x_i, x \rangle|^2 < \infty$. Legyen $y_n = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x \rangle x_i$. Ekkor

$$\|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n \langle x_i, x \rangle x_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |\langle x_i, x \rangle|^2,$$

ha $n > m$. Ez mutatja, hogy (y_n) Cauchy-sorozat, létezik egy y határértéke. Mivel

$$\langle x - y, x_i \rangle = \lim_n \langle x - y_n, x_i \rangle = 0,$$

$x = y$. Ebből persze az is adódik, hogy $\|x\|^2 = \lim_n \|y_n\|^2 = \sum_i |\langle x_i, x \rangle|^2$. $\square$

A tétel mutatja, hogy az ortonormált bázis jelentősége többek között abban van, hogy a tér tetszőleges vektora **sorbafejthető egy adott bázis szerint**. Ha van megszámlálható

bázisa a térnek, akkor minden vektorhoz hozzárendelhetjük a bázis szerinti kifejtés együtthatóinak sorozatát. Ez a sorozat négyzetesen összegezzhető, tehát az $\ell^2(\mathbb{N})$ tér egy eleme. Így kapunk egy transzformációt az adott Hilbert-térből $\ell^2(\mathbb{N})$ -be, ami ráképezés is. Minden megszámlálható bázissal rendelkező, **szeparábilisnak** mondott Hilbert-tér lényegében azonos az $\ell^2(\mathbb{N})$ térrel. Ez a tény azonban nem teszi feleslegessé az egyéb terek használatát.

26. példa: Az $L^2(0, \pi)$ térben ortonormált bázist alkotnak az

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \quad (2.5.18)$$

függvények, és ennek megfelelően minden $g \in L^2(0, \pi)$ függvény $g = \sum_n a_n f_n$ ortogonális sorba fejthető. A sorfejtés L^2 -normában konvergál az előző tétel szerint. (A Fourier-sorok elméletéből tudjuk azonban, hogy például egy folytonos g esetében a sorfejtés pontonként is konvergál.) $\square$

Legyen X egy (szeparábilis) Banach-tér. Legyen $\mathcal{F} = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ egy sorozat az X^* duálisban. Az $\mathcal{F}$ rendszer **teljes**, ha minden $x, y \in X$ párra $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ azonosságok teljesülése esetén $x = y$. Választunk még egy $\mathcal{E} = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ vektorsorozatot. Azt mondjuk, hogy a $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ pár **frame** (vagy magyarul keret), ha minden $x \in X$ vektora a $\sum_i \varphi_i(x) e_i$ sorozat konvergens és az

$$F : x \mapsto \sum_i \varphi_i(x) e_i$$

lineáris leképezés korlátos és invertálható. F neve **frame operátor**.

Egy Hilbert-tér $\mathcal{E} = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ortonormált bázisa egy szép példát ad, ha $\varphi_i(\cdot) = \langle e_i, \cdot \rangle$. Ekkor a frame operátor az identitás. Ebben a példában $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Ez nem csak ortonormált bázissal lehetséges, legyen $\mathcal{E} = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ és $\varphi_i(x) = \langle e_i, x \rangle$ funkcionál.

18. tétel: Az $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ pár egy $\mathcal{H}$ Hilbert-térben frame akkor és csak akkor, ha

$$m\|x\|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq M\|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \quad (2.5.19)$$

bizonyos $0 < m \leq M$ számokra.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ frame. Ekkor a frame operátor

$$F(x) = \sum_i \langle e_i, x \rangle e_i$$

korlátos és invertálható. Az

$$\langle y, F(x) \rangle = \sum_i \langle e_i, x \rangle \langle y, e_i \rangle = \langle F(y), x \rangle$$

formula mutatja, hogy F önadjungált operátor és pozitív is. Ezért

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle e_i, x \rangle|^2 = \langle x, F(x) \rangle \leq \|x\|^2 \|F\|$$

és a (2.5.19) egyenlőtlenségben $M = \|F\|$ megfelel. Az alsó korlátot F inverzének normájával fogjuk megkeresni, $\langle x, F(x) \rangle$ -et kell alulról becsülni:

$$\|x\|^2 = \|F^{-1}F(x)\|^2 \leq \|F^{-1}\|^2 \langle F(x), F(x) \rangle \leq \|F^{-1}\|^2 \|F\| \langle x, F(x) \rangle$$

Tehát $1/m = \|F^{-1}\|^2 \|F\|$ lehetséges.

A megfordításban először a frame operátor létezését mutatjuk meg. Igazoljuk, hogy

$$S_r x = \sum_{i=1}^r \langle e_i, x \rangle e_i$$

Cauchy-sorozat. Legyen $y \in \mathcal{H}$ és $\|y\| \leq 1$. Ha $r > q$, akkor

$$\begin{aligned} |\langle S_r x - S_q x, y \rangle|^2 &\leq \left| \sum_{i=q+1}^r \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \right|^2 \leq \left(\sum_{i=q+1}^r |\langle x, e_i \rangle|^2 \right) \left(\sum_{i=q+1}^r |\langle e_i, y \rangle|^2 \right) \leq \\ &\leq M \sum_{i=q+1}^r |\langle x, e_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

Tehát az $Fx = \sum_i \langle e_i, x \rangle e_i$ lineáris operátor definiálva van és a fenti számolás azt is mutatja, hogy

$$\|Fx\|^2 \leq M^2 \|x\|^2,$$

így $\|F\| \leq M$. Másrészt

$$\langle x, Fx \rangle \geq m \|x\|^2$$

azt is adja, hogy F pozitív és $\|F^{1/2}x\| \geq \sqrt{m}\|x\|$. A 3. fejezet 6. lemmája adja, hogy $F^{1/2}$ invertálható és persze ekkor F is. $\square$

2.6. Spektrum

Ebben a részbem a Banach-terek bizonyos operátorainak invertálhatóságával foglalkozunk.

5. lemma: (Neumann-sor) *Legyen X egy Banach-tér, $\lambda \in \mathbb{C}$ és $A \in B(X)$. Ha $|\lambda| > \|A\|$, akkor*

$$\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A^n$$

abszolút konvergens sor a $B(X)$ Banach-térben, és határértéke a $\lambda I - A$ operátor inverze.

Bizonyítás: Az abszolút konvergencia a $\sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda^{-n} A^n\|$ numerikus sor konvergenciáját jelenti. Mivel

$$\|\lambda^{-n} A^n\| \leq \|\lambda^{-1} A\|^n$$

és $\|\lambda^{-1} A\| < 1$, az abszolút konvergencia világos.

Továbbá

$$\lambda^{-1} \sum_{n=0}^m \lambda^{-n} A^n (\lambda I - A) = (\lambda I - A) \lambda^{-1} \sum_{n=0}^m \lambda^{-n} A^n = I - \lambda^{-m-1} A^{m+1},$$

és $\|\lambda^{-m-1} A^{m+1}\| \leq \|\lambda^{-1} A\|^{m+1} \rightarrow 0$. Ez azt jelenti, hogy a sor S összege eleget tesz az $S(\lambda I - A) = (\lambda I - A)S = I$ feltételnek, tehát $\lambda I - A$ inverze. $\square$

6. lemma: $A \in B(X)$ normált térben a szorzás és az inverz folytonos. Az invertálható operátorok nyílt halmazt alkotnak.

Bizonyítás: Tételizzük fel, hogy $A_n \rightarrow A$ és $B_n \rightarrow B$. Ekkor

$$\|A_n B_n - AB\| = \|A_n(B_n - B) + (A_n - A)B\| \leq \|A_n\| \|B_n - B\| + \|A_n - A\| \|B\| \rightarrow 0$$

hiszen $\|A_n\| \rightarrow \|A\|$.

Ha $A_n \rightarrow A$ és A invertálható, akkor $A_n A^{-1} \rightarrow I$. Ha ebből következik, hogy $A A_n^{-1} \rightarrow I$, akkor $A_n^{-1} \rightarrow A^{-1}$ is igaz. Tehát az inverz folytonossághoz elég igazolni, hogy $B_n \rightarrow I$ alapján $B_n^{-1} \rightarrow I$. A geometriai sorfejtés

$$(I - (I - B_n))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - B_n)^k$$

igaz, ha $\|I - B_n\| < 1$. Tehát ilyen feltétel mellett B_n^{-1} is létezik, továbbá tart I -hez, ha $B_n \rightarrow I$.

Az is adódik, hogy az invertálható operátorok nyílt halmazt alkotnak. $\square$

Legyen X egy Banach-tér, $\lambda \in \mathbb{C}$ és $A \in B(X)$. Ha a $\lambda I - A$ lineáris operátornak nincsen korlátos inverze, akkor azt mondjuk, hogy λ az A **spektrumában** van. Az A operátor spektrumának jelölése $\sigma(A)$. A Neumann-féle sorfejtés szerint A spektruma korlátos halmaz, és a $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$ körlemez része.

19. tétel: Egy $A \in B(X)$ operátor spektruma nem üres zárt halmaz.

Bizonyítás: Mivel az invertálható operátorok nyílt halmazt alkotnak, a spektrum komplementuma is nyílt. A

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^n \quad (2.6.20)$$

sorfejtés $|\lambda| > \|A\|$ esetén helyes. Ezért a spektrum korlátos halmaz.

Megjegyezzük, hogy $(\lambda I - A)^{-1}$ differenciálható. Valóban, a

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda_0 I - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{(\lambda I - A)^{-1} \left((\lambda_0 I - A) - (\lambda I - A) \right) (\lambda_0 I - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} = \\ &= -(\lambda I - A)^{-1} (\lambda_0 I - A)^{-1} \end{aligned}$$

azonosság mutatja, hogy a derivált

$$-(\lambda_0 I - A)^{-2}.$$

Tételizzük fel, hogy a spektrum üres. Ekkor $\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$ az egész komplex síkon differenciálható operátorértékű függvény, aminek a határértéke a végtelenben (2.6.20)-ból adódóan 0. Ha $\varphi \in B(X)^*$ egy funkcionál, akkor a $\lambda \mapsto \varphi((\lambda I - A)^{-1})$ függvény korlátos és reguláris, a Liouville-tétel alapján azonosan 0. Mivel ez minden φ funkcionálra igaz, $(\lambda I - A)^{-1} \equiv 0$. Ez lehetetlen, mert egy inverz nem lehet 0. $\square$

2.7. Multinormált terek

Legyen X egy valós vagy komplex lineáris tér. Ha adott X -en pozitív funkcionáloknak egy olyan $p_i : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ családja, $i \in I$, amelyre

- (i) $p_i(\lambda x) = |\lambda| p_i(x)$,
- (ii) $p_i(x + y) \leq p_i(x) + p_i(y)$,
- (iii) $x \in X$ és $x \neq 0$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $p_i(x) \neq 0$,

akkor X -et **multinormált térnek** nevezzük. (Multinormált tér helyett **lokálisan konvex topologikus vektorteret** is szoktak, illetve lehetne mondani.) Az egyik alapvető példa a következő.

27. példa: Multinormált teret képez $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a 2. példában értelmezett $p_{m,r}$ funkcionálokkal. $\square$

Az $(X, p_i, i \in I)$ multinormált térben az $x_n \in X$ sorozatra $x_n \rightarrow x \in X$, ha $p_i(x - x_n) \rightarrow 0$ minden $i \in I$ esetén. Az $(X, p_i, i \in I)$, $(Y, q_j, j \in J)$ multinormált terek közötti f leképezést folytonosnak nevezzük, ha $x_n \rightarrow x$ esetén $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

28. példa: Ha $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ és $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ multiindexek, akkor legyen

$$r_{\alpha,\beta}(f) = \sup \{ |x^\alpha D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n \}$$

az $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ függvényekre. (x^α az $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ függvényt jelenti.) A Schwartz-tér az $r_{\alpha,\beta}$ funkcionálokkal egy multinormált teret képez, éppen úgy, mint a fenti $p_{m,r}$ funkcionálokkal. Megmutatjuk, hogy a két tér **topologikusan ekvivalens**, azaz ugyanazok bennük a konvergens sorozatok.

$$\begin{aligned} p_{m,r}(f) &\leq \sum_{|\beta| \leq r} \sup \{ (1 + \|x\|_2^2)^m |D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n \} \leq \\ &\leq \sum_{|\beta| \leq r} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \sup \{ \|x\|_2^{2i} |D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n \} = \\ &= \sum_{|\beta| \leq r} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} r_{\alpha(i),\beta}(f), \end{aligned}$$

ha $\alpha(i) = (2i, 2i, \dots, 2i)$. Az egyenlőtlenség világossá teszi, hogy ha $r_{\alpha,\beta}(f_n) \rightarrow 0$ minden α és β multiindexre, akkor $p_{m,r}(f_n) \rightarrow 0$ bármilyen m, r pozitív egészre.

Ha m -et elég nagyra választjuk, akkor $x^\alpha (1 + \|x\|_2^2)^{-m}$ a végtelenben eltűnő és ezért korlátos függvény. Alkalmas C konstanssal

$$|x^\alpha D^\beta f| \leq C(1 + \|x\|_2^2)^m |D^\beta f|,$$

tehát

$$r_{\alpha,\beta}(f) \leq C p_{m,0}(D^\beta f) \leq C p_{m,|\beta|}(f).$$

Ebből látszik, hogy ha $p_{m,r}(f_n) \rightarrow 0$ minden $m, r \in \mathbb{N}$ -re, akkor $r_{\alpha,\beta}(f_n) \rightarrow 0$ minden α, β multiindexre. $\square$

29. példa: Megmutatjuk, hogy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Ugyanis $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ -re

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) dx \right| &\leq \int (1 + \|x\|_2^k)^{-1} (1 + \|x\|_2^k) |f(x)| dx \leq \\ &\leq \int (1 + \|x\|_2^k)^{-1} dx \times \sup\{(1 + \|x\|_2^k) |f(x)|\}, \end{aligned}$$

ha k -t olyan nagynak választjuk, hogy $(1 + \|x\|_2^k)^{-1}$ integrálható. Becslésünk egyrészt azt mutatja, hogy $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, másrészt

$$\|f\|_1 \leq C p_{k,0}(f) \quad (2.7.21)$$

egy C konstanssal. Az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ multinormált teret az $L^1(\mathbb{R}^n)$ normált térbe képező **beágyazás folytonos**. $\square$

30. példa: Az $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény **Fourier-transzformáltját** a

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\langle t, x \rangle} f(x) dx \quad (2.7.22)$$

képlet értelmezi, $(x, t) = \sum_i x_i t_i$. Világos a definícióból, hogy $\hat{f}$ korlátos:

$$|\hat{f}(t)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |e^{-i\langle t, x \rangle} f(x)| dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |f(x)| dx.$$

A dominált konvergencia tételből adódóan $\hat{f}$ folytonos függvény.

Próbáljuk differenciálni $\hat{f}$ -ot az egyváltozós esetben.

$$\frac{\hat{f}(t) - \hat{f}(t')}{t - t'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{e^{-itx} - e^{-it'x}}{t - t'} f(x) dx.$$

Ha a $t' \rightarrow t$ határátmenetet akarjuk végrehajtani, akkor integrálható majoránst kell keresnünk. Az integrandusban lévő differenciahányados $-ixe^{-itx}$ -hez tart. Amennyiben $xf(x)$ integrálható

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = -i \widehat{xf(x)}. \quad (2.7.23)$$

Ezt iterálva jutunk oda, hogy ha $x^n f(x)$ integrálható, akkor f Fourier-transzformáltja n -szer differenciálható. (Minél gyorsabban tart f a 0-hoz a végtelenben, annál simább a Fourier-transzformáltja.)

A (2.7.23) képlet levezetéséhez hasonlóan látható, hogy az n változós esetben $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ és $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ multiindexekre

$$(i)^{|\beta|+|\alpha|} t^\alpha D^\beta \hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\langle t, x \rangle} D^\alpha (x^\beta f(x)) dx. \quad (2.7.24)$$

Ebből következik, hogy a Fourier-transzformáció az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ teret önmagába képezi. Valóban, a (3.9.26) képletből

$$\left| \left(\prod_{i=1}^n t_i \right) t^\alpha D^\beta \hat{f}(t) \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|D^{\alpha+1} x^\beta f(x)\|_1,$$

vagyis

$$|t^\alpha D^\beta \hat{f}(t)| \leq \frac{c}{\prod_{i=1}^n t_i}.$$

Ez mutatja, hogy $t^\alpha D^\beta \hat{f}$ eltűnik a végtelenben. Tehát $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esetén $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Meg akarjuk mutatni a Fourier-transzformáció folytonosságát is.

$$\begin{aligned} |t^\alpha D^\beta \hat{f}(t)| &\leq C \int (1 + \|x\|_2^2)^{-k} (1 + \|x\|_2^2)^k |D^\alpha(x^\beta f(x))| dx \leq \\ &\leq C' \sup\{(1 + \|x\|_2^2)^k |D^\alpha(x^\beta f)(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}, \end{aligned}$$

ha k olyan nagy, hogy $(1 + \|x\|_2^2)^{-k}$ integrálható. Ekkor

$$r_{\alpha,\beta}(f) \leq C' p_{k,r}(x^\beta f_n(x)),$$

ha $r \geq |\alpha|$. Amennyiben $f_n \rightarrow 0$, akkor $x^\beta f_n(x) \rightarrow 0$ és $p_{k,r}(x^\beta f_n(x)) \rightarrow 0$. Az előbbi egyenlőtlenség miatt $r_{\alpha,\beta}(f) \rightarrow 0$. $\square$

A Fourier-transzformáció az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-teret önmagába viszi. Megkérdezhető, hogy a Fourier-transzformációnak mint

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_q)$$

leképezésnek mennyi a normája a különböző $1 \leq p, q \leq \infty$ értékekre, azaz a

$$C(p, q) := \sup \left\{ \frac{\left[\int |\hat{f}(x)|^q dx \right]^{1/q}}{\left[\int |f(x)|^p dx \right]^{1/p}} : f \neq 0, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \right\}$$

számra vagyunk kíváncsiak. A következő fejezetben tárgyalt **Plancherel-tétel** azt mondja, hogy $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$. Ha p és q nem konjugáltak, vagy $p > 2$, akkor $C(p, q) = +\infty$. Amennyiben konjugáltak, és $1 \leq p \leq 2$, akkor

$$C(p, q) = \sqrt{\frac{(2\pi q)^{1/q}}{(2\pi p)^{1/p}}}.$$

Az eredményt **Beckner** bizonyította 1975-ben a klasszikus **Hausdorff–Young-egyenlőtlenség** élesítéseként. **Lieb** megmutatta 1990-ben, hogy az

$$\|\hat{f}\|_q = C(p, q) \|f\|_p$$

egyenlőség (az $1 \leq p \leq 2$ és $f \neq 0$ esetben) csak Gauss-függvényekre teljesül, tehát $f(x) = A \exp(-Bx^2 + Cx)$.⁹

Az $\mathcal{S}$ multinormált tér folytonos lineáris funkcionáljait **temperált disztribúcióknak** nevezzük, ezek alkotják az $\mathcal{S}'$ teret. Egyébként $\mathcal{S}'$ is multinormált tér. A Fourier-transzformáció a dualitás segítségével értelmezhető a temperált disztribúciókon.¹⁰

2.8. Polinomrendszerek

Bizonyos függvényterekben polinomokból álló bázist lehet konstruálni. Erről szólnak a további példák, amelyek egyben bevezetik a leggyakrabban használt **ortogonális polinomrendszereket**, a Legendre-, a Hermite- és a Laguerre-polinomokat.

31. példa: Az $L^2[-1, 1]$ térben a folytonos függvények sűrű halmazt alkotnak. Valóban, az egyik lehetséges út, amin eljuthatunk $L^2[-1, 1]$ -hez az folytonos függvények $C[-1, 1]$ terén keresztül vezet. $f, g \in C[-1, 1]$ -re értelmezzük az

$$\langle f, g \rangle = \int \overline{f(x)} g(x) dx$$

belső szorzást egyszerű Riemann-integrál segítségével, majd a

$$\rho(f, g) := \sqrt{\langle f - g, f - g \rangle}$$

távolsággal kapott metrikus tér teljes burkát vesszük. Ez lesz $L^2[-1, 1]$. A teljes burokkal való értelmezés miatt $C[-1, 1]$ sűrű $L^2[-1, 1]$ -ben. Ugyanakkor a polinomok sűrű halmazt alkotnak a Weierstrass-féle approximációs tétel szerint a $C[-1, 1]$ -ben az egyenletes konvergenciára nézve: Ha $f \in C[-1, 1]$, akkor van olyan p_n polinom sorozat, amelyre

$$\sup\{|f(x) - p_n(x)| : -1 \leq x \leq 1\} \rightarrow 0.$$

Azonban

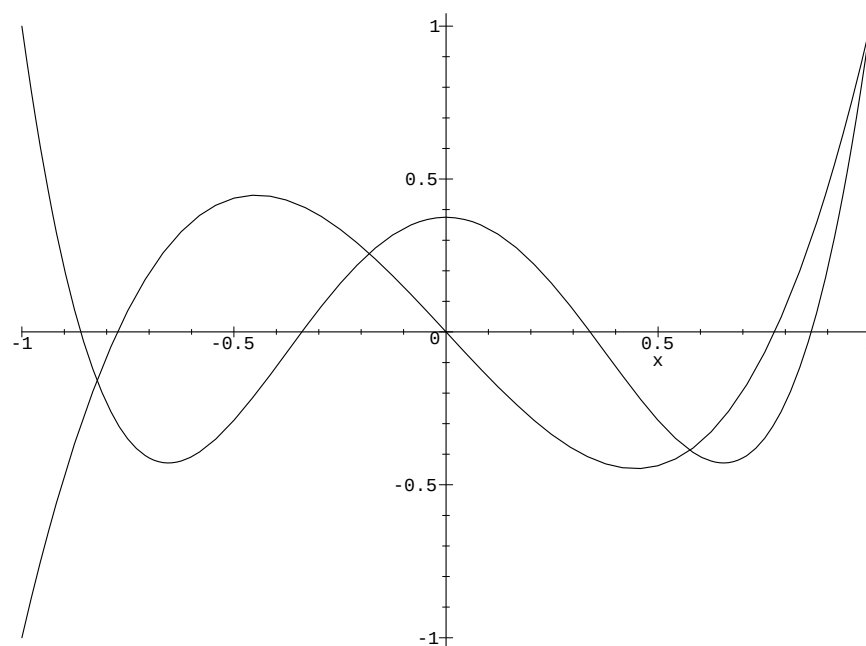
$$\rho(f, p_n) = \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x) - p_n(x)|^2 dx} \leq \sqrt{2 \sup\{|f(x) - p_n(x)| : -1 \leq x \leq 1\}},$$

ezért $p_n \rightarrow f$ a Hilbert-térben. Ez azt jelenti, hogy a polinomok sűrű halmazt alkotnak a $C[-1, 1]$ -ben a Hilbert-tér metrikájára nézve is. Végeredményben a polinomok sűrűn vannak $L^2[-1, 1]$ -ben. $\square$

Az $1, x, x^2, \dots$ sorozatra alkalmazhatjuk a **Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást**: Megkeressük az a lineáris $x + a_1$ polinomot, amely merőleges $p_0(x) := 1$ -re, ez maga $p_1(x) := x$ ($a_1 = 0$). Ezután meghatározzuk azt a $p_2(x) = x^2 + a_2x + b_2$ kvadrátikus polinomot, amely p_0 -ra és p_1 -re is ortogonális. A két ortogonalitási feltétel egy-egy egyenletet ad a_2 -re és b_2 -re. Az egyenletrendszert megoldva kapjuk a $p_2(x)$ kvadrátikus polinomot, és így tovább. Íme az első néhány polinom:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, & p_1(x) &= x, \\ p_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3}, & p_3(x) &= x^3 - \frac{3}{5}x, \\ p_4(x) &= x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, & p_5(x) &= x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x. \end{aligned}$$

Polinomoknak egy olyan p_n ortogonális sorozatához jutunk, amelynek n -edik tagja egy n -edfokú polinom. Mivel nincs olyan függvény, amely minden polinomra ortogonális, ez a rendszer alkalmas normálással egy bázis, amelynek elemei egy szorzófaktortól eltekintve a **Legendre-féle polinomok**.



A harmadfokú és a negyedfokú Legendre-polinomok grafikonja. Általában is igaz, hogy a gyökök mindig $[-1, 1]$ -ben vannak, a polinomok értéke 1-ben 1 és -1 -ben ± 1

Az n -edfokú Legendre-polinom a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.8.25)$$

képlettel adható meg. A főegyüttható

$$\frac{n!}{2^n} \binom{2n}{n},$$

és ez az a szorzótényező, amiben P_n és a főegyütthatóra normált p_n különböznek.

A. M. Legendre francia matematikus volt, aki a

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda x = 0$$

differenciálegyenletet vizsgálta. $\lambda = n(n+1)$ esetén ennek megoldása a $P_n(x)$ Legendre-polinom. Másodrendű differenciálegyenletről lévén szó, más megoldás is van, amit **másodfajú Legendre-függvénynek** neveznek. Egyébként ha az egyenletnek van a $[-1, 1]$ intervallumon folytonos megoldása, akkor szükségképpen $\lambda = n(n+1)$ valamely n természetes számra.

A Legendre-polinomok gyökeinek egy érdekes tulajdonsága van. Tételezzük fel, hogy a $[-1, 1]$ intervallumon elhelyezünk n darab „töltetet”¹¹ az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokban, és a rendszer energiája

$$E(x_1, \dots, x_n) := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log |x_i - x_j| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log |1 - x_i| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log |1 + x_i| + C.$$

Ez azt jelenti, hogy a töltetek taszítani látszanak egymást, mert az energia csökken, ha távolítjuk őket, gondoljuk őket pozitív tölteteknek. Ugyanakkor az intervallum két végén egy-egy negatív töltet van rögzítve, ezek a többieket vonzzák. A két negatív töltet kölcsönhatásából adódó energiát a C konstans tartalmazza. (Természetesen a két negatív töltet helyett „külső térről” is beszélhetnénk.) Amennyiben az intervallum tökéletes vezető, a töltetek a minimális energiájú elrendezést igyekezzenek megtalálni, és mi is ezt akarjuk meghatározni.

E helyett e^E -t fogjuk minimalizálni a szokásos parciális differenciálás módszerével.

Vezessük be az $f(x) := (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ polinomot. Ennek segítségével a $\partial e^E / \partial x_i = 0$ feltételt

$$\frac{\partial e^E}{\partial x_i} = \frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)} + \frac{1}{2(x_i - 1)} + \frac{1}{2(x_i + 1)} = 0$$

alakban írhatjuk. Azaz

$$(1 - x_i^2)f''(x_i) - 2(x_i - 1)f'(x_i) = 0$$

minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Tehát az $(1 - x^2)f''(x) - 2(x - 1)f'(x)$ n -ed fokú polinom eltűnik minden $x_1, x_2, \dots, x_n$ helyen. Ezért az $f(x)$ polinomnak egy konstansszorososa. A konstans értékét a főegyütthatók összehasonlításával kapjuk meg: $(1 - x^2)f''(x) + 2(x - 1)f'(x)$ főegyütthatója $-n(n - 1) - 2n = -n(n + 1)$. Ezért

$$(1 - x^2)f''(x) - 2(x - 1)f'(x) = -n(n + 1)f(x).$$

Pontosan a Legendre-féle differenciálegyenlethez jutottunk, amelynek polinom megoldása a $P_n(x)$ Legendre-polinom. Az egyensúlyi helyzetben tehát a töltetek a Legendre-polinom gyökelyein helyezkednek el.

$\|P_n(x)\| \neq 1$, ugyanis

$$\int_{-1}^1 |P_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n + 1}. \quad (2.8.26)$$

Ha tehát az $L^2[-1, 1]$ tér bázisához akarunk jutni, akkor a

$$\tilde{P}_n(x) := \sqrt{\frac{2n + 1}{2}} P_n(x) \quad (2.8.27)$$

normálást kell alkalmazni.

A fenti eljárás általánosítható. Induljunk ki a

$$(1 - x^2)^{m/2} x^j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

sorozatból, aminek lineáris burka sűrű $L^2(-1, 1)$ -ben. Ha ezt a sorozatot ortogonalizáljuk, akkor a

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n \quad (2.8.28)$$

függvényekhez jutunk. Rögzített m -re n értékei $m, m + 1, m + 2, \dots$. Világos módon $m = 0$ adja vissza a Legendre-polinomokat. $P_n^m(x)$ neve **asszociált Legendre-függvény**. Tetszőleges $m \in \mathbb{Z}^+$ -ra

$$\left\{ \tilde{P}_m^m(x) := \left(\frac{2n + 1}{2} \frac{(n - m)!}{(n + m)!} \right)^{1/2} P_n^m(x) \quad : \quad n = m, m + 1, m + 2, \dots \right\} \quad (2.8.29)$$

egy bázis.

Az asszociált Legendre-függvény $P_n^m(x)$ kielégíti az

$$(1-x^2)f'' - 2xf' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)f = 0 \quad (2.8.30)$$

differenciálegyenletet. $m = 0$ -t véve kapjuk a Legendre-féle polinomok (Legendre-féle) differenciálegyenletét:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \quad (2.8.31)$$

Ez egy másodrendű differenciálegyenlet, amelynek két lineárisan független megoldása van. Azonban az egyetlen polinom megoldás a Legendre-féle polinom, $P_n(x)$.

32. példa: Definiáljunk egy μ mértéket a számegyenesen a

$$\mu(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_B e^{-x^2} dx$$

képlettel. (μ -t **Gauss-mértéknek** hívják, és csak normáló tényezőben különbözik a valószínűség-számításban megszokott normális eloszlástól.) Mivel a mérték e^{-x^2} sűrűségfüggvénye gyorsan tart 0-hoz $\pm\infty$ -ben, megmutatható, hogy a polinomok sűrűn vannak az $L^2(\mu)$ térben. Most is alkalmazhatjuk az $1, x, x^2, x^3, \dots$ sorozatra a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációt, és egy ortogonális polinomrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned}$$

Kiindulhatunk a

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (2.8.32)$$

formulából is. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy $H_n(x)$ egy n -edfokú polinom, amelynek főegyütthatója 2^n . (2.8.32)-et differenciálva kapjuk a

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \quad (2.8.33)$$

egyenletet. $f(x) := e^{-x^2}$ ismételt differenciálásával

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x) + 2x \frac{d^n}{dx^n} f(x) + 2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) = 0.$$

Ezt megszorozva a $(-1)^n e^{x^2}$ faktorról azt kapjuk, hogy

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad (2.8.34)$$

ami lehetővé teszi a $H_n(x)$ polinomok rekurzív kiszámolását.

A Hermite-polinomokat úgynevezett **generátor függvény** segítségével is használhatjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2xt-t^2} \quad (2.8.35)$$

Deriváljunk t szerint:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} H_n(x) = e^{2xt-t^2} (2x-2t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (2x-2t) H_n(x)$$

Kicsit átírhatjuk ezt,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2x H_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} 2(n+1) H_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2x H_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2n H_{n-1}(x) \end{aligned}$$

és ez megfelel a (2.8.34) képletnek.

A rendelkezésre álló egyenletek kombinálásával kapjuk még a

$$H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x), \quad (2.8.36)$$

$$H''_n(x) - 2x H'_n(x) + 2n H_n(x) = 0 \quad (2.8.37)$$

további összefüggéseket. Ismételt parciális integrálással jutunk a

$$\int e^{-x^2} H_n(x) v(x) dx = \int e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} v(x) dx$$

formulához, amely bármilyen $v(x)$ polinomra érvényes. Nevezetesen, ha $v(x)$ fokszáma n -nél kisebb, akkor a jobb oldalon 0 áll, tehát $H_n(x)$ merőleges minden nála alacsonyabb fokszámú polinomra, azaz a $H_0(x), H_1(x), \dots, H_{n-1}(x)$ polinomokra is. Ha $v(x)$ helyébe $H_n(x)$ -et teszünk, akkor az adódik, hogy

$$\int e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \int e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Ezért a normalizált

$$\tilde{H}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \quad (2.8.38)$$

Hermite-féle polinomok az $L^2(\mu)$ tér bázisát alkotják.

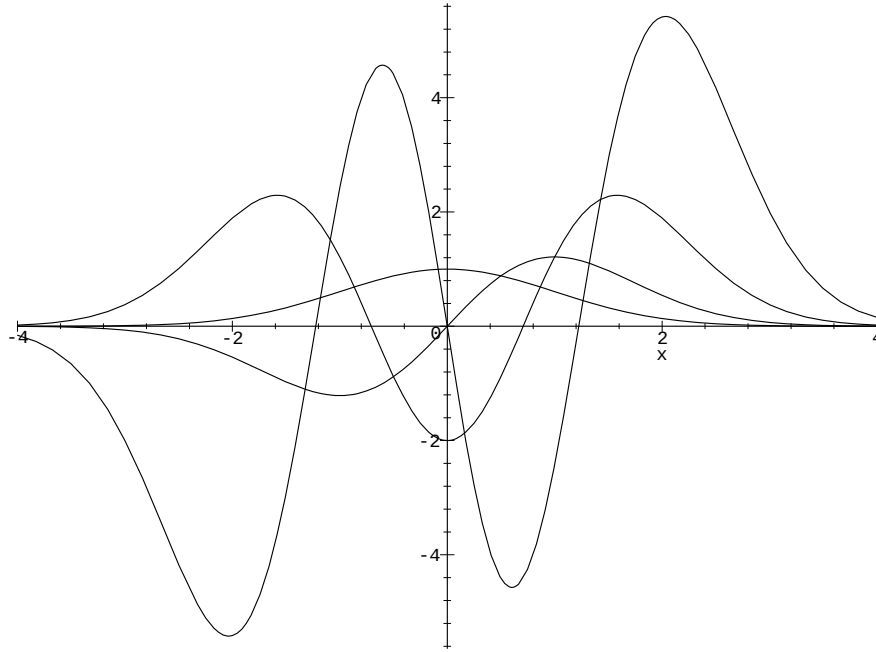
A normalizált Hermite-féle polinomokból könnyen kaphatunk az $L^2(\mathbb{R})$ térben is bázist:

$$\varphi_n(x) := \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tilde{H}_n(x) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2.8.39)$$

Az ortogonalitási relációk egyszerűen redukálódnak a Hermite-féle polinomok tulajdonságaira. A (2.8.39) formula a **Hermite-függvényeket** adja meg, néhány Hermite-függvény gráfja az ábrán látható. $\square$

33. példa: A polinomok sűrűn vannak az $L^2(\mathbb{R}^+, e^{-x} dx)$ térben, ezért a korábbiakhoz hasonlóan van a térnek polinomokból álló bázisa.

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$



A $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ és φ_3 Hermite-függvények grafikonja. φ_0 lapos haranggörbe alakú, általában φ_n páros függvény, ha n páros és páratlan, ha n is az

n -edfokú polinom, amelynek főegyütthatója $(-1)^n/n!$, neve **Laguerre-polinom**.

A továbbiakban az általánosabb $L^2(\mathbb{R}^+, e^{-x}x^\alpha dx)$ teret tekintjük, ahol $\alpha > -1$ egy paraméter. Az

$$x \frac{d^2v}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{dv}{dx} + nv = 0 \quad (2.8.40)$$

másodrendű differenciálegyenletnek $n \in \mathbb{N}$ esetén egyetlen polinom megoldása van, ez

$$L_n^{(\alpha)}(x) := \sum_{j=0}^n \binom{n+\alpha}{n-j} \frac{(-x)^j}{j!},$$

ami a közönséges Laguerre-polinomok általánosítása, **asszociált Laguerre-polinomoknak** is hívják ezeket.

Mivel

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x),$$

az α paraméter egész értékeire az asszociált polinomok a közönséges polinomok deriváltjai.

Az asszociált Laguerre-polinomok normáját az

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha (L_n^{(\alpha)}(x))^2 dx = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n+\alpha}{n} \quad (2.8.41)$$

integrál adja meg.

A Laguerre-polinomokból az $L^2(\mathbb{R}^+)$ térben is kaphatunk egy bázist:

$$\Lambda_n^{(\alpha)} := L_n^{(\alpha)}(x) e^{-x/2} x^{\alpha/2} \Gamma(\alpha + 1)^{-1/2} \binom{n+\alpha}{n}^{-1/2}. \quad (2.8.42)$$

Az ortogonalitási relációkat felírva láthatjuk, hogy azok $L_n^{(\alpha)}(x)$ ortogonalitására mennek vissza az $L^2(\mathbb{R}^+, e^{-x}x^\alpha dx)$ térben. $\square$

A három polinomcsaládra vonatkozó képletek meglehetősen különbözőek, de némi hasonlóság is felfedezhető. Nevezetesen, van egy-egy másodrendű differenciálegyenlet, egy-egy generátorfüggvény, amiből ismételt differenciálással a polinomok megkaphatók, és egy-egy rekurziós formula, amit csak a Hermite-polinomokra adtunk meg.

2.9. Gyakorlófeladatok

1. A normának melyik tulajdonságai teljesülnek a $C[a, b]$ -n értelmezett

$$p(f) = |f(b) - f(a)|$$

funkcionálra?

- 2.^M Legyen p_1 és p_2 két norma egy lineáris téren! Igazoljuk, hogy $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ és $q(x) = \max(p_1(x), p_2(x))$ ugyancsak normák!
- 3.^M Bizonyítsa be, hogy ha $x_n \rightarrow x$ és $y_n \rightarrow y$ egy normált térben, akkor $x_n + y_n \rightarrow x + y$!
4. Bizonyítsa be, hogy ha $x_n \rightarrow x$ egy normált térben, és $\lambda_n \rightarrow \lambda$ egy számsorozatra, akkor $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$!
- 5.^M Bizonyítsa be, hogy ha $x_n \rightarrow x$ egy normált térben, akkor $n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \rightarrow x$!
- 6.^M Igaz-e, hogy $f_n(x) = nx/(1 + nx^2)$ Cauchy-sorozat $C[0, 1]$ -ben?
7. Mutassa meg, hogy normált térben Cauchy-sorozatok összege Cauchy-sorozat!
8. Mutassa meg, hogy ha egy normált térben minden Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor a tér teljes!
9. Konvergensek-e a $C[0, 1]$ térben a következő sorozatok **a.** $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$, **b.** $y_n(t) = t^n - t^{2n}$?
- 10.^M Konvergensek-e az $x_n(t) = t^{n+1}/(n+1) - t^{2n+2}/(n+2)$ sorozat a $C[0, 1]$, illetve $C^1[0, 1]$ terekben? (A $C^1[0, 1]$ térben

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\} + \sup\{|f'(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$

a norma.)

11. Zárt alteret alkotnak-e $C[0, 1]$ -ben **a.** a legfeljebb n -edfokú polinomok, **b.** a pontosan n -edfokú polinomok?
12. Nyílt halmazt alkotnak-e $C[a, b]$ -ben az olyan f függvények, amelyekre $|f(t)| < 1$? ($a < t < b$ rögzített szám.)

13. A kétváltozós polinomokon tekintsük a

$$\|p(x, y)\| := \sup\{|p(x, y)| : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Folytonos-e az így kapott normált téren a

$$\frac{\partial^3}{\partial^2 x \partial y}$$

differenciáloperátor?

14. Igazolja, hogy normált térben konvex halmaz lezárása is konvex!

- 15.^M Legyen A és B két konvex halmaz egy normált térben! Az $A \cup B$, $A \cap B$ és $A + B$ halmazok közül melyik konvex?

16. Igazolja, hogy az ℓ^2 térben az alábbi halmazok konvexek: **a.** $\{x \in \ell^2 : |x_n| \leq 2^{-n}\}$,
b. $\{x \in \ell^2 : \sum n^2 |x_n|^2 < 1\}$!

17. Az $f \mapsto f(1)$ funkcionál folytonos-e a $C[0, 1]$ téren, ha azon **a.** a szokásos $\sup$ normát, **b.** az L^2 normát tekintjük?

- 18.^M Legyen X_1 és X_2 két normált tér és $A : X_1 \rightarrow X_2$ $B : X_1 \rightarrow X_2$ két folytonos lineáris leképezés! Igazolja, hogy $\{x \in X_1 : Ax = Bx\}$ zárt lineáris altér X_1 -ben!

19. A folytonosan differenciálható $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények terén legyen

$$\|f\| = \left[\int_a^b f^2(t) dt + \int_a^b [f'(t)]^2 dt \right]^{1/2}.$$

Igazolja, hogy ez norma! Banach-teret alkotnak-e a folytonosan differenciálható függvények ezzel a normával?

- 20.^M Lehet-e egy Banach-tér valódi részhalmaza egyidejűleg zárt és nyílt?

- 21.^M Mutassa meg, hogy

$$L(f) = \int_0^x f(t) dt$$

$C[0, 1]$ folytonos lineáris transzformációját értelmezi!

- 22.^M Létezik-e olyan folytonos lineáris funkcionál a korlátos sorozatok ℓ^∞ terén, amely konvergens sorozatokhoz a határértéküket és az $1, -1, 1, -1, \dots$ sorozathoz a $t \in \mathbb{R}$ számot rendeli?

23. Igazolja, hogy $f, g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ esetén $f \cdot g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$!

24. Igazolja, hogy $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esetén $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$!

25. Igazolja az 1. lemmát! (Útmutatás: Adjon geometriai interpretációt az

$$A_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \quad \text{és} \quad A_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

területeknek, gondolva arra, hogy az x^{p-1} és az y^{q-1} függvények egymás inverzei!)

26. Tekintsük a $\mathbb{C}^n$ téren a $\|\cdot\|_p$ normákat. Adjunk meg olyan C_1 és C_2 számokat, hogy $\|\cdot\|_p \leq C_1 \|\cdot\|_r \leq C_2 \|\cdot\|_p$, $1 \leq p, r \leq \infty$!
27. Mutassa meg, hogy integrálható függvény Fourier-transzformáltja folytonos!
28. Tekintsük a mátrixok $M_n(\mathbb{R})$ téren a $\|\cdot\|_p$ p -normát és a $\|\cdot\|$ operátornormát! Adjunk meg olyan C_1 és C_2 számokat, hogy $\|\cdot\|_p \leq C_1 \|\cdot\| \leq C_2 \|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$!
29. Legyen X a $C[0, 1]$ tér polinomokból álló altere! Folytonos-e X -en a differenciális lineáris operátor?
- 30.^M Legyen X és Y két normált tér! Az $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ párok lineáris teret alkotnak a koordinátánkénti műveletekkel. Mutassuk meg, hogy

$$\|(x, y)\|_1 := \|x\| + \|y\| \quad \text{és} \quad \|(x, y)\|_2 := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

ekvivalens normák ezen a téren!

31. Legyen P a valós együtthatós polinomok tere ellátva a

$$\|p\| := \sup\{|p(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$

normával! Igazoljuk, hogy az $f : p \mapsto p(2)$ funkcionál lineáris, de nem folytonos P -n!

32. Legyen $\varphi : C_{\mathbb{C}}[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ olyan komplex lineáris funkcionál, amelyre $\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$! Mutassa meg, hogy $f \geq 0$ esetén $\varphi(f) \geq 0$! (Útmutatás: **a.** $-1 \leq g \leq 1$ esetén $\|g \pm ni\| \leq \sqrt{n^2 + 1}$ ezért $|\varphi(g) \pm ni| \leq \sqrt{n^2 + 1}$. **b.** Az előző g függvényre $\varphi(g) \in [-1, 1]$. **c.** Legyen $0 \leq f \leq 1$ és alkalmazzuk **b**-t az $g = f$ és $g = 2f - 1$ függvényekre.)
- 33.^M Legyen f egy lineáris funkcionál egy E normált téren! Igazoljuk, hogy f pontosan akkor folytonos, ha $\ker f := \{x \in E : f(x) = 0\}$ zárt lineáris altér!
34. Igazoljuk, hogy minden véges dimenziós normált tér Banach-tér!
- 35.^M Legyen $C_0(\mathbb{R}^n)$ a végtelenben eltűnő folytonos függvények vektortere a sup normával! Banach-tér ez?
36. A kompakt tartójú $\mathbb{R}$ -en értelmezett folytonos függvények vektorterét a sup normával tekintjük. Mi a tér teljes burka?
37. Legyen $C_c(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$ -en értelmezett kompakt tartójú folytonos függvények tere a sup-normával, és legyen X a $C_c(\mathbb{R})$ teljes burka! Igazolja, hogy minden $f \in X$ esetén $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ teljesül!
- 38.^M Sűrűn vannak-e az $L^1[0, 1]$ térben azok a polinomok, amelyek integrálja 0?
39. Az $\mathbb{R}^n$ téren tekintsük a p -normákat! Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_{\infty}!$$

40. Mutassuk meg, hogy $\ell^1 \subset \ell^2$, de van olyan ℓ^2 -beli sorozat, amely nem ℓ^1 -beli!
41. Mutassuk meg, hogy az ℓ^1 tér teljes!
42. Jelölje c a konvergens komplex számsorozatok terét az $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|\}$ normával!
a. Mutassa meg, hogy a tér teljes! **b.** Írja le a c tér duálisát!
43. Legyen $g \in C[0, 1]$ és értelmezzünk egy $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ lineáris operátort az $Af(x) = g(x)f(x)$ képlettel. Mi A spektruma?
44. Függ-e egy lineáris $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ transzformáció spektruma attól, hogy melyik $\|\cdot\|_p$ normát tekintjük $\mathbb{R}^n$ -en, $1 \leq p \leq \infty$?
- 45.^M Igazolja közvetlenül sorfejtéssel, hogy egy korlátos A operátorra $(e^A)^2 = e^{2A}$!
46. Legyenek A és B egy Banach-tér felcserélhető operátorai! Mutassuk meg a hatványsorok átrendezésével, hogy $\exp(A + B) = \exp A \exp B$!
47. Számoljuk ki a $t \mapsto \sin(tA)$ függvény Frechet-deriváltját, ha $t \in \mathbb{R}$ és A egy Banach-tér korlátos operátora! Általánosítsuk az eredményt!
48. Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex zárt halmaz és

$$F(x) = \inf\{\|x - y\|_2 : y \in K\}.$$

Számolja ki az $F : \mathbb{R}^n \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionál $dF(x, h)$ Gateaux-differenciálját!

49. Mutassuk meg, hogy egy Banach-tér nyílt halmazán értelmezett operátor folytonos azokban a pontokban, ahol Frechet-értelemben differenciálható!
- 50.^M Legyen S konvex halmaz egy Hilbert-térben! Mutassa meg, hogy az

$$F(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in S\}$$

konvex funkcionál! ($F(x)$ az x pontnak az S halmaztól való távolsága.)

51. Tekintsük a $\mathbb{C}^n$ teret a p -normával, $1 \leq p \leq \infty$, és legyen $K \subset \mathbb{C}^n$ egy konvex zárt halmaz! Milyen p értékekre teljesül a Hilbert-térben megfogalmazott Riesz-lemma állítása?
52. Legyen

$$\varphi : L^{4/3}[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad f \mapsto \varphi(f) := \int_0^1 f(x)x^3 dx$$

funkcionál! Határozza meg $\|\varphi\|$ értékét!

53. Mutassuk meg az 29. példát követve, hogy az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ multinormált térnek az $L^p(\mathbb{R}^n)$ normált térbe való beágyazás folytonos!
- 54.* Legyen p egy valós együtthatós polinom, és tekintsük azt a $P : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionált az $n \times n$ -es mátrixok terén, amelyet a

$$P(A) = \text{Tr } p(A)$$

képlet értelmez! Mutassa meg, hogy $\partial P(A, H)$ a Gateaux-differenciál $\text{Tr } p'(A)H$!

- 55.* Legyen p egy valós együtthatós polinom, és tekintsük a $P : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto p(A)$ leképezést az $n \times n$ -es mátrixok terén! Mutassuk meg, hogy ha $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonális mátrix, akkor a $\partial P(A)$ Frechet-derivált az alábbiak szerint adható meg!

$$\partial P(A)(H)_{ij} = H_{ij} L_{ij},$$

ahol

$$L_{ij} = \begin{cases} \frac{p(\lambda_i) - p(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}, & \text{ha } \lambda_i \neq \lambda_j, \\ p'(\lambda_i), & \text{ha } \lambda_i = \lambda_j. \end{cases}$$

(Útmutatás: Először végezzük el a számolást az $p(x) = x^n$ esetben, majd alkalmazzuk a linearitást!)

56. Mutassa meg, hogy $C[a, b]$ szeparábilis! (Egy teret szeparábilisnek mondunk, ha van benne megszámlálható sűrű halmaz.)

3. Hilbert-terek korlátos operátorai

Az absztrakt Hilbert-tér fogalma a kvantummechanikával egy időben alakult ki, jelentős részben **Neumann János** munkáiban. A Hilbert-tér lényeges eleme a belső szorzat, ami a vektorok skaláris szorzatára emlékeztet. A Hilbert-tér maga az euklideszi tér végtelen dimenziós általánosítása. A belső szorzat meghatároz egy távolságot a téren, az euklideszi esethez hasonlóan.

Maga Hilbert egyébként az $\ell^2(\mathbb{N})$ teret tekintette „Hilbert-térként”, és sokáig a Hilbert-féle koordinátatér elnevezés is használatos volt a véges dimenziós euklideszi koordinátatérrel való hasonlóságot hangsúlyozandó. A fenti absztrakt értelmezés valójában Neumann János érdeme.

Legyen $H := \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : x_n = 0, \text{ ha } n \text{ páros}\}$ és legyen $H_0 := \{x \in H : x_n = 0 \text{ véges sok } n \text{ kivételével}\}$. Ekkor

$$H_0^\perp = H^\perp = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : x_n = 0, \text{ ha } n \text{ páratlan}\}.$$

A példában $H^{\perp\perp} = H$, de $H_0^{\perp\perp} \neq H_0$.

□

1. példa: Ha G tetszőleges megszámlálható halmaz, akkor $\ell^2(G)$ jelöli azoknak a G -n értelmezett f függvényeknek a terét, amelyekre

$$\sum_{g \in G} |f(g)|^2 < \infty.$$

$\ell^2(G)$ -n a belső szorzat $\ell^2(\mathbb{N})$ mintájára értelmezhető, és egy Hilbert-térhez jutunk. □

3.1. A Hilbert-tér geometriája

A következő lemma bizonyításában fel fogjuk használni a **paralelogramma azonosságot**

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad (3.1.1)$$

ami egyszerűen következik, ha a normanégyszeteket kifejezzük a belső szorzat segítségével. (Az azonosság ismerős lehet a síkgeometriából: a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.)

1. lemma: (Riesz-lemma) Legyen K egy konvex zárt halmaz a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, $x \in \mathcal{H}$ és

$$d = \inf\{\|x - y\| : y \in K\}.$$

Ekkor létezik egy és csakis egy $x_0 \in K$ pont, amelyre $\|x - x_0\| = d$. (Azt mondjuk, hogy x_0 K -nak x -hez legközelebb eső pontja.)

Bizonyítás: Feltehető, hogy $d > 0$. Válasszunk ki egy x_n sorozatot a K halmazból, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = d$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \|(x_n - x) - (x_m - x)\|^2 = \\ &= 2\|x_n - x\|^2 + 2\|x_m - x\|^2 - \|(x_n - x) + (x_m - x)\|^2 = \\ &= 2\|x_n - x\|^2 + 2\|x_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\|x_n - x\|^2 + 2\|x_m - x\|^2 - 4d^2. \end{aligned}$$

(Itt a második egyenlőség a paralelogramma azonosság alkalmazása, az utolsó egyenlőtlenségben pedig azt használjuk, hogy $(x_n + x_m)/2 \in K$ a konvexitás miatt, és így $\|(x_n + x_m)/2 - x\| \geq d$.)

Becslésünk azt mutatja, hogy (x_n) egy Cauchy-sorozat, aminek van egy x_0 határértéke. Mivel K zárt halmaz, $x_0 \in K$ és nyilván $\|x - x_0\| = d$. Ezzel x_0 létezését beláttuk. Két különböző „legközelebbi” pont nem lehet, mert akkor az azokat összekötő szakasz felezőpontja x -től d -nél kisebb távolságra lenne. (Ismét paralelogramma azonosság!) $\square$

1. tétel: (Projekciótétel) Legyen $\mathcal{M}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér zárt altere. Ekkor egy tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ vektor felírható $x = x_0 + y$ alakban úgy, hogy $x_0 \in \mathcal{M}$ és $y \perp \mathcal{M}$.

Bizonyítás: Legyen x_0 az x -hez legközelebb eső pontja $\mathcal{M}$ -nek, és $d = \|x - x_0\|$. ($\mathcal{M}$ -re alkalmazzuk a megelőző lemmát.) Legyen $y = x - x_0$. Ekkor $y \perp \mathcal{M}$ igazolása van hátra. Ha $w \in \mathcal{M}$ és $t \in \mathbb{R}$, akkor

$$d^2 \leq \|x - (x_0 + tw)\|^2 = d^2 + t^2\|w\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle y, w \rangle.$$

Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén ez csak akkor teljesül, ha

$$\operatorname{Re} \langle y, w \rangle = 0.$$

Mivel ez tetszőleges $w \in \mathcal{M}$ esetén fennáll, $y \perp \mathcal{M}$. $\square$

Azt a hozzárendelést, amely a tetszőleges x vektorhoz, a tételben adott x_0 -at rendeli, $\mathcal{M}$ -re való **vetítés operátorának** nevezzük. Mivel az $x = x_0 + y$ felbontás egyértelmű, a vetítés egy lineáris operátor, amelynek képtere $\mathcal{M}$ és magtere $\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0 \text{ minden } y \in \mathcal{M}\text{-re}\}$.

2. példa: Egy alterre való vetítés megadása alkalmas bázisban nagyon kényelmes lehet. Ha $\mathcal{M}$ az adott Hilbert-tér altere, és van egy olyan $e_1, e_2, \dots$ bázis, hogy $e_1, e_2, \dots, e_n$ éppen $\mathcal{M}$ bázisa, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ vektor vetülete $\sum_{k=1}^n c_k e_k$.

Tekintsük például a $\mathcal{H} = L^2[-1, 1]$ Hilbert-teret, és legyen $\mathcal{M}$ a legfeljebb n -edfokú polinomok által kifeszített (zárt) alter. Ha $f \in L^2[-1, 1]$, akkor legyen f_0 az f -hez legközelebb eső $\mathcal{M}$ -beli vektor.

$L^2[-1, 1]$ -ben bázist alkotnak a normalizált Legendre-polinomok:

$$\tilde{P}_k := \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k(x) \quad (k = 0, 2, \dots)$$

f -nek van kifejtése ebben a bázisban, $f = \sum_k c_k \tilde{P}_k$. f_0 nem más, mint $\sum_{k=0}^n c_k \tilde{P}_k$.

Ez a minimum tulajdonsága nemcsak a Legendre-sorfejtésnek, hanem általában a hasonló, néha **általánosított Fourier-sornak** nevezett, ortogonális kifejtéseknek is megvan. $\square$

2. tétel: Legyen $\mathcal{H}$ egy véges dimenziós Hilbert-tér és A egy lineáris transzformációja. Ekkor van $\mathcal{H}$ -nak olyan bázisa, amelyben A mátrixa felső háromszög alakú, azaz $A_{ij} = 0$, ha $i > j$.

Bizonyítás: Az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázist rekurzióval konstruáljuk. Legyen e_1 A normált sajátvektora, ami az 1. fejezet 5. tétele szerint mindig létezik és P_1 az $\{e_1\}^\perp$ altérre való ortogonális projekció. A $P_1 A P_1$ transzformáció ezt az alteret önmagába viszi és létezik egy e_2 normált sajátvektora. Ezt az eljárást folytatjuk, vagyis P_k az $\{e_1, \dots, e_k\}^\perp$ altérre való ortogonális projekció, és a $P_k A P_k$ transzformáció normált sajátvektora e_{k+1} (λ_{k+1} sajátértékkel), ha $P_k \neq 0$. Mivel $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $A_{i1} = 0$, ha $i > 1$, és persze $A_{11} = \lambda_1$.

$$Ae_2 = (I - P_1)Ae_2 + P_1Ae_2 = (I - P_1)Ae_2 + P_1AP_1e_2 = A_{12}e_1 + \lambda_2e_2,$$

ezért $A_{22} = \lambda_2$ és $A_{i2} = 0$, ha $i > 2$. Az okoskodást folytatva kapjuk, hogy a választott bázisban $A_{ij} = 0$, ha $i > j$. $\square$

3. példa: Tekintsük a $\mathcal{H} = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ Hilbert-teret egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér felett. Ha $\mathcal{A}_0$ σ -részalgebrája $\mathcal{A}$ -nak és $\mu_0 := \mu|_{\mathcal{A}_0}$, akkor $\mathcal{M} := L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu_0) \subset \mathcal{H}$ zárt altér. A projekciótétel biztosítja az $E : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$ projekciót, amit a valószínűség-elméletben $\mathcal{A}_0$ -ra vonatkozó **feltételes várható érték** operációnak neveznek. Ha $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, akkor $E(f)$ f -nek a legjobb közelítése az $\mathcal{A}_0$ -mérhető függvények között, azaz $E(f)$ minimalizálja a $g \mapsto \|f - g\|$ távolság függvényt az $L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ halmazon. $\square$

A $\mathcal{H}$ Hilbert-tér $H \subset \mathcal{H}$ részhalmazát **teljes rendszernek** mondjuk, ha $H^\perp = \{0\}$. Egy sűrű halmaz mindig teljes. (Ennek megfordítása nem igaz, viszont teljes halmaz lineáris burka sűrű.)

3.2. Operátorok, funkcionálok és formák

A $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy A lineáris operátorát **korlátosnak** mondjuk, ha van olyan C szám, hogy $\|Ax\| \leq C\|x\|$ minden x vektorra. Az ilyen C számok infimuma

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\},$$

az A operátor **normája**. Egy altérre való vetítés operátora korlátos, és normája 1. Azokat a lineáris operátorokat, amelyek normája legfeljebb 1, **kontrakcióknak** is szokták nevezni.

Emlékeztetünk arra a tényre, hogy egy lineáris operátor pontosan akkor korlátos, ha folytonos, lásd az 2. fejezet 3. tételét. A $\mathcal{H}$ Hilbert-tér összes korlátos operátorainak halmazára a $B(\mathcal{H})$ jelölést használjuk.

4. példa: Tekintsük a $\mathcal{H} = L^2(0, a)$ Hilbert-teret és az

$$(Af)(x) = xf(x) \quad (f \in L^2(0, a), \quad 0 \leq x \leq a)$$

lineáris operátort.

$$\|Af\|^2 = \int_0^a x^2 |f(x)|^2 dx \leq a^2 \int_0^a |f(x)|^2 dx = a^2 \|f\|^2.$$

Ez a becslés mutatja, hogy $\|A\| \leq a$. Legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & a - n^{-1} \leq x \leq a, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $\|f_n\| = 1$, és

$$\|Af_n\|^2 = \int_{a-1/n}^a x^2 n dx = \frac{(a^3 - (a - 1/n)^3)n}{3} \rightarrow a^2.$$

Ebből arra következtetünk, hogy $\|A\| \geq a$, tehát $\|A\| = a$. □

A $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ alakú kétváltozós függvényt **korlátos formának** fogjuk nevezni, ha

- (1) az első változóban konjugált lineáris,
- (2) a második változóban lineáris,
- (3) létezik egy olyan $C > 0$ szám, amelyre $|B(x, y)| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$.

Legyen $A \in B(\mathcal{H})$ és $B(x, y) := \langle x, Ay \rangle$ $x, y \in \mathcal{H}$ esetén. Ekkor $B(x, y)$ egy korlátos forma, ugyanis $|B(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$. Tehát minden korlátos operátorhoz tartozik egy korlátos forma. A Riesz-féle reprezentációs tétel következménye az alábbi tény:

3. tétel: *Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a korlátos formák és a korlátos lineáris operátorok között.*

Legyen $B(x, y)$ egy tetszőleges korlátos forma. Ekkor rögzített $x \in \mathcal{H}$ -ra $y \mapsto B(x, y)$ egy korlátos lineáris funkcionál, és létezik egy x_A vektor amelyre $B(x, y) = \langle x_A, y \rangle$. Az $x \mapsto x_A$ megfeleltetés egy lineáris A operátort határoz meg. Hátra van még A korlátosságának meggondolása:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|Ay\| : \|y\| \leq 1\} = \\ &= \sup\{|\langle x, Ay \rangle| : \|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1\} = \\ &= \sup\{|B(x, y)| : \|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy egy $B(x, y)$ formát egyértelműen meghatároznak a $B(x, x)$ értékek, ugyanis érvényes a következő, úgynevezett **polarizációs azonosság**:

$$B(x, y) = \frac{1}{4}(B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) - iB(x+iy, x+iy) + iB(x-iy, x-iy)) \quad (3.2.2)$$

A polarizációs azonosságból következik, hogy ha egy Hilbert-tér V operátora normatartó (azaz $\|Vx\| = \|x\|$), akkor a belső szorzatot is megtartja, vagyis $\langle x, y \rangle = \langle Vx, Vy \rangle$ bármilyen x és y vektorra.

3.3. Kompakt tartójú sima függvények

Jelöljük $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -nel az $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett (komplex, esetleg valós értékű) végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvények halmazát. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ egy lineáris tér, a benne lévő függvények integrálhatóak és differenciálhatóak, s mi több, minden parciális deriváltjuk is a térben van.

5. példa: Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ teljes $L^2(\mathbb{R}^n)$ -ben. Mivel egy lineáris altérrel van szó, a teljesség ekvivalens a sűrűséggel.

Ha f és g komplex értékű függvények $\mathbb{R}^n$ -en, akkor az $f * g$ **konvolúciójukat** az

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) dy \quad (x, y \in \mathbb{R}^n) \quad (3.3.3)$$

formula értelmezi. $f * g = g * f$ nyomban adódik a definícióból a változók helyettesítésével. Ha $f, g \in L^2$, akkor a Schwarz-egyenlőtlenség biztosítja az integrál létezését minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re. (Megjegyezzük, hogy ha $f \in L^p$, $g \in L^q$ és $p^{-1} + q^{-1} \geq 1$, akkor a az integrál majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re létezik, továbbá $f * g \in L^r$, $1 + r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$.)

Válasszunk egy olyan $j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $j \geq 0$ és $\int j(x) dx = 1$. j nem más, mint egy valószínűségi sűrűség, és gondolhatunk például a **standard normális eloszlásra**:

$$j(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right) \quad \left(\|x\|^2 = \sum_i |x_i|^2\right)$$

Legyen

$$j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon),$$

ami egy új sűrűségfüggvény. A fenti példában

$$j_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\varepsilon)^n} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon^2}\right) \quad (3.3.4)$$

(szintén normális eloszlás, de más a szórás mátrixa). Az alábbi (3.3.5) lényeges.

Megmutatjuk, hogy az $f_\varepsilon := j_\varepsilon * f$ értelmezéssel $J_\varepsilon : f \mapsto f_\varepsilon$ egy korlátos operátor az L^2 téren.

Az alábbiakban $F(x) := |f(x)|$.

$$\begin{aligned} \int |f_\varepsilon(x)|^p dx &= \int \left[\int j_\varepsilon(y) F(x - y) dy \right]^p dx \leq \\ &\leq \int \left[\left(\int j_\varepsilon(y) dy \right)^{p/q} \int j_\varepsilon(y) F(x - y)^p dy \right] dx = \\ &= \iint j_\varepsilon(y) F(x - y)^p dy dx = \int \left(\int j_\varepsilon(y) F(x - y)^p dx \right) dy = \\ &= \int F(x)^p dx = \int |f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Itt először a Hölder-egyenlőtlenséget használtuk fel a $j_\varepsilon = (j_\varepsilon)^{1/p} (j_\varepsilon)^{1/q}$ faktorizálással, utána pedig a Fubini-tételre való hivatkozással megcseréltük az integrálokat. Becslésünk azt mutatja, hogy $\|J_\varepsilon(f)\|_p \leq \|f\|_p$, ha $1 \leq p < \infty$.

Bizonyítható, hogy

$$\|j_\varepsilon * f - f\|_p \rightarrow 0, \quad \text{amint } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (3.3.5)$$

Ennek jelentősége akkor látszik számunkra, ha j -t $\mathcal{D}$ -beli függvénynek választjuk, például

$$j(x) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right), & \text{ha } \|x\| < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Ekkor ugyanis J_ε értékei $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -ben vannak, és az értékkészletek egyesítése (3.3.5) szerint sűrű $L^p(\mathbb{R}^n)$ -ben. Ha egy $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ függvényt végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvénnyel akarunk közelíteni, akkor először egy kompakt tartójú f_0 függvénnyel közelítjük, majd a $j_\varepsilon * f_0$ függvényt vesszük, ami sima és kompakt tartójú, ha j (3.3.6)-ból van. $\square$

Bár az előző példa témája nem szorosan kapcsolódik a Hilbert-terekhez, érdemes néhány megjegyzést tenni. Az $L^1(\mathbb{R}^n)$ Banach-tér a konvolúcióval mint kommutatív szorzással algebrává válik, és a normája szubmultiplikatív: $\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$. Ebben az algebrában nincsen multiplikatív egység, de j_ε -t nyugodtan nevezhetjük **approximatív egységnek**, mert $f * j_\varepsilon \rightarrow f$.

A $\mathcal{D}$ tér multinormált térré tehető, és konvergencia értelmezhető rajta a következőképpen: $f_n \rightarrow f$, ha

- (a) létezik egy olyan kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, hogy az f_n sorozat elemei és f eltűnnek K -n kívül,
- (b) f_n összes parciális deriváltjai egyenletesen tartanak f megfelelő parciális deriváltjához.

$\mathcal{D}$ duális tere azokból az $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionálokból áll, amelyek folytonosak erre a konvergenciastruktúrára. Az $\mathcal{D}'$ duális elemeit **disztribúcióknak** nevezik. Ha g olyan $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely kompakt halmazokon integrálható, akkor

$$f \mapsto \int f(x)g(x) dx \quad (3.3.7)$$

egy lineáris funkcionált értelmez $\mathcal{D}$ -n, amely folytonos a fenti konvergenciára. Ezért a g függvényt egy disztribúciónak tekinthetjük, és a disztribúciókat **általánosított függvényeknek** is nevezik. Egy tipikus valódi disztribúció $f \mapsto f(0)$. Ez a **Dirac-féle disztribúció** nem áll elő (3.3.7) alakban semmilyen g függvénnyel.

Fennállnak a

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}' \quad (3.3.8)$$

tartalmazási relációk. $\mathcal{S}'$ elemei a **temperált disztribúciók**.

3.4. Az adjungált operátor

Ha A egy korlátos operátor, akkor a megfelelő forma

$$B_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

Ekkor $B'(x, y) = \overline{B_A(y, x)}$ ugyancsak egy korlátos forma, amihez tartozó operátort A^* -gal jelöljük és A **adjungáltjának** mondjuk. Más szóval A^* -ot az

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad (x, y \in \mathcal{H})$$

tulajdonság jellemzi. Ebből látszik, hogy $\|A\| = \|A^*\|$. A -t **önadjungáltnak** nevezzük, ha $A = A^*$.

6. példa: Fent megkonstruáltuk egy $\mathcal{M}$ zárt altérhez a rá való vetítés operátorát, jelöljük ezt $P_{\mathcal{M}}$ -mel. $P_{\mathcal{M}}$ önadjungált, mert

$$\begin{aligned} \langle Px, x' \rangle &= \langle Px, (Px' + y') \rangle = \langle Px, Px' \rangle, \\ \langle x, Px' \rangle &= \langle (Px + y), Px' \rangle = \langle Px, Px' \rangle. \end{aligned}$$

Azt használtuk fel, hogy $x = Px + y$ és $x' = Px' + y'$, ahol $y, y' \perp \mathcal{M}$. Így $P = P^*$ és nyilván $P = P^2$. Az ilyen operátorokat **projekcióknak** nevezzük, és minden projekció egy zárt altérre való vetítés. $\square$

Kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van a projekcióoperátorok és a zárt alterek között. Fent megkonstruáltuk az egy adott zárt altérre vetítő projekciót. Megfordítva, ha adott egy projekcióoperátor, akkor képtere az a zárt altér, amire vetít.

7. példa: Egy $\mathcal{H}$ Hilbert-tér $\mathcal{H}^{\otimes k}$ tenzorhatványát és $\mathcal{H}^{\wedge k}$ antiszimmetrikus tenzorhatványát nézzük, $\mathcal{H}^{\wedge k} \subset \mathcal{H}^{\otimes k}$. Megmutatjuk, hogy a

$$P : x_1 \otimes \dots \otimes x_k \mapsto \frac{1}{\sqrt{k!}} x_1 \wedge \dots \wedge x_k$$

formulával definiált lineáris leképezés projekció $\mathcal{H}^{\wedge k}$ -ra.

Először megmutatjuk, hogy $P^2 = P$:

$$\begin{aligned} P^2(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) &= \frac{1}{(k!)^{3/2}} \sum_{\pi} (\text{sgn } \pi) x_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge x_{\pi(k)} \\ &= \frac{1}{(k!)^{3/2}} \sum_{\pi} (\text{sgn } \pi)^2 x_1 \wedge \dots \wedge x_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{k!}} x_1 \wedge \dots \wedge x_k = P(x_1 \otimes \dots \otimes x_k). \end{aligned}$$

A következő szükséges formula $P = P^*$:

$$\begin{aligned} \langle P(x_1 \otimes \dots \otimes x_k), y_1 \otimes \dots \otimes y_k \rangle &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi} (\text{sgn } \pi) \prod_{i=1}^k \langle x_{\pi(i)}, y_i \rangle \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi} (\text{sgn } \pi^{-1}) \prod_{i=1}^k \langle x_i, y_{\pi^{-1}(i)} \rangle \\ &= \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_k, P(y_1 \otimes \dots \otimes y_k) \rangle. \end{aligned}$$

Tehát P ortogonális projekció. $\square$

8. példa: Legyen $S : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ a **jobbra tolás operátora**, azaz $S\delta_n = \delta_{n+1}$ a kanonikus bázisvektorokon. Ekkor

$$S^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

azaz

$$S^*\delta_1 = 0, \quad S^*\delta_{n+1} = \delta_n.$$

A jobbra tolás adjungáltja a **balra tolás operátor**.

Az $\langle Sx, y \rangle = \langle x, S^*y \rangle$ összefüggés teljesülését elegendő abban az esetben ellenőrizni, amikor x és y bázisvektorok:

$$\langle S\delta_n, \delta_m \rangle = \langle \delta_{n+1}, \delta_m \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } n+1 = m, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Másrészt

$$\langle \delta_n, S^*\delta_m \rangle = \begin{cases} \langle \delta_n, \delta_{m-1} \rangle, & \text{ha } m > 0, \\ \langle \delta_n, \delta_0 \rangle, & \text{ha } m = 0, \end{cases}$$

ami ugyanazt az eredményt adja. □

4. tétel: Az adjungálás tulajdonságai:

$$(1) (A + B)^* = A^* + B^*,$$

$$(2) (\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^* \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

$$(3) (A^*)^* = A,$$

$$(4) (AB)^* = B^*A^*,$$

$$(5) (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, \text{ ha } A \text{ invertálható és inverze korlátos.}$$

Bizonyítás: Példaként megmutatjuk a (4) tulajdonságot. Kétszer felhasználva az adjungált definícióját azt kapjuk, hogy

$$\langle ABx, y \rangle = \langle Bx, A^*y \rangle = \langle x, B^*A^*y \rangle,$$

ami ugyancsak a definíció szerint éppen az $(AB)^* = B^*A^*$ összefüggéssel egyenértékű. □

9. példa: Bármilyen $A \in B(\mathcal{H})$ operátorra A^*A önadjungált. □

10. példa: Bármilyen $X \in B(\mathcal{H})$ lineáris operátor egyértelműen írható fel $A + iB$ alakban, ahol A és B korlátos önadjungált operátorok. Valóban,

$$A = \frac{X + X^*}{2} \quad \text{és} \quad B = \frac{X - X^*}{2i}.$$

$XX^* = X^*X$ pontosan akkor teljesül, ha $AB = BA$. □

Ha $XX^* = X^*X$, akkor az X operátort **normálisnak** mondjuk. Minden önadjungált operátor normális, de a balra (vagy jobbra) tolás nem normális operátor.

11. példa: Ha a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek van egy véges $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisa, akkor lineáris operátorai $n \times n$ -es mátrixokkal adhatók meg. Az $A \in B(\mathcal{H})$ operátor mátrixában az i -edik sor j -edik eleme $\langle e_i, Ae_j \rangle$. Mivel $\langle e_i, A^*e_j \rangle = \overline{\langle e_j, Ae_i \rangle}$, A^* mátrixa A mátrixa transzponáltjának konjugáltjával azonos. Lényegében hasonló a helyzet nem véges dimenziós tér esetében is, akkor az operátorok „végtelen mátrixszal” adhatók meg. (A múlt század elején voltak, akik még nem lineáris operátorról, hanem végtelen mátrixról beszéltek.) Egy korlátos lineáris operátor megadható valóban a mátrixával, azonban a végtelen dimenziós esetben nehezen eldönthető egy „mátrixról”, hogy egy korlátos operátort ad-e meg. $\square$

Az adjungált fogalma kiterjeszthető két különböző Hilbert-tér között ható operátorra is. Ha $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, akkor $T^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$, és

$$\langle x, Ty \rangle_{\mathcal{K}} = \langle T^*x, y \rangle_{\mathcal{H}} \quad (x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}). \quad (3.4.9)$$

Legyen $\mathcal{M}$ zárt altere a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek, és legyen $A \in B(\mathcal{H})$. Tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ vektor felírható $x = x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in \mathcal{M}$ and $x_2 \in \mathcal{M}^\perp$. Ugyanez mondható az Ax_1 és Ax_2 vektorokról is: $Ax_1 = y_1 + y_2$, $Ax_2 = y'_1 + y'_2$, ahol $y_1, y'_1 \in \mathcal{M}$ és $y_2, y'_2 \in \mathcal{M}^\perp$. Értelmezzük az A_{11}, A_{12}, A_{21} és A_{22} lineáris operátorokat a

$$\begin{aligned} A_{11} &: x_1 \mapsto y_1, & A_{12} &: x_2 \mapsto y'_1, \\ A_{21} &: x_1 \mapsto y_2, & A_{22} &: x_2 \mapsto y'_2 \end{aligned}$$

képletekkel. Ekkor $A_{11} \in B(\mathcal{M})$, $A_{12} \in B(\mathcal{M}^\perp, \mathcal{M})$, $A_{21} \in B(\mathcal{M}, \mathcal{M}^\perp)$ és $A_{22} \in B(\mathcal{M}^\perp)$. A jelölés előnye a mátrix-vektor formájában felírt alábbi összefüggésben látszik:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y'_1 \\ y_2 + y'_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Az A operátor hatása megegyezik a 2×2 -es

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (3.4.10)$$

operátor elemű mátrix hatásával. Más szóval azt is mondhatjuk, hogy ha az adott $\mathcal{H}$ Hilbert-tér $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ formában direktösszegre bomlik, akkor egy $A \in B(\mathcal{H})$ operátor (3.4.10) formában **operátormátrixként** írható, ahol $A_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$ lineáris operátor ($1 \leq i, j \leq 2$).

12. példa: A (3.4.10) operátormátrix adjungáltja

$$\begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}.$$

Amit igazolni kell az a

$$\left\langle \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

összefüggés. Ennek a bal oldala kifejtve

$$\begin{aligned} &\langle A_{11}x_1 + A_{12}x_2, x'_1 \rangle + \langle A_{21}x_1 + A_{22}x_2, x'_2 \rangle = \\ &= \langle x_1, A_{11}^*x'_1 \rangle + \langle x_1, A_{12}^*x'_1 \rangle + \langle x_1, A_{21}^*x'_2 \rangle + \langle x_1, A_{22}^*x'_2 \rangle, \end{aligned}$$

és ez maga a jobb oldal.

Megállapíthatjuk, hogy a (3.4.10) operátormátrix akkor lesz önadjungált, ha $A_{11} = A_{11}^*$, $A_{22} = A_{22}^*$ és $A_{21} = A_{12}^*$. $\square$

3.5. Tenzorszorzat

$\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ algebrai tenzorszorzatán van olyan belső szorzat, amelyre

$$\langle \xi \otimes \eta, \xi' \otimes \eta' \rangle = \langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle.$$

A belső szorzatból az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ képlettel normát származtatunk. Erre nézve az algebrai tenzorszorzat teljes burka $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Ez tehát egy Hilbert-tér, amely sűrű altérként tartalmazza az algebrai tenzorszorzatot. Mivel az algebrai tenzorszorzatot csak ebben a részben a Hilbert-terek tenzorszorzata előkészítése közben használjuk, nem is vezetünk be rá jelölést.

13. példa: Hilbert-terek tenzorszorzata jól illeszkedik a szorzatmérték konstrukciójához. (A konstrukcióra nézve lásd a Függelék.)

Ha $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ és $\mathcal{K} = L^2(Y, \nu)$, akkor $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$, mivel $f \in L^2(X, \mu)$ és $g \in L^2(Y, \nu)$ esetén az $f \otimes g$ elemi tenzor nem más, mint $f(x)g(y) \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$. A (1.2.4) számolási szabály a függvényterben magától értetődő:

$$(f_1(x) + f_2(x))g(y) = f_1(x)g(y) + f_2(x)g(y), \quad (\lambda f(x))g(y) = \lambda(f(x)g(y)).$$

(Az elemi tenzorok lineáris kombinációi kiadják a hengerhalmazok által generált halmazalgebrára mérhető négyzetesen integrálható függvényeket, és ez az osztály sűrű $L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ -ben.)

A Hilbert-terek tenzorszorzatát talán ebből a példából lehet a legegyszerűbben megérteni. Az is jól kivehető, hogy a Hilbert-terek tenzorszorzata sokkal bővebb, mint az algebrai tenzorszorzat, hiszen utóbbi a

$$\sum_i f_i(x)g_i(y)$$

alakú véges összegekből áll. $\square$

A tenzorszorzatra emlékeztet az a **Dirac-féle írásmód**, amelyben a vektorokat $|\xi\rangle, |\eta\rangle$ stb. formában írják, és $|\xi\rangle\langle\eta|$ olyan lineáris operátor, amelyre

$$|\xi\rangle\langle\eta| : |\eta'\rangle \mapsto |\xi\rangle \cdot \langle\eta|\eta'\rangle.$$

Itt $\langle\eta|\eta'\rangle$ a két vektor belső szorzata. A $|\xi\rangle\langle\eta|$ kifejezés a ξ változóban lineáris és az η változóban konjugált lineáris (azaz $|\xi\rangle\langle\lambda\eta| = \bar{\lambda}|\xi\rangle\langle\eta|$). A jelölés előnye a

$$|\xi\rangle\langle\eta| |\eta'\rangle = \langle\eta, \eta'\rangle |\xi\rangle$$

formula. Ha $\|\xi\| = 1$, akkor $|\xi\rangle\langle\xi|$ a ξ által generált lineáris altérre való (merőleges) vetítés operátora.

A tenzorszorzat Hilbert-térben egyszerűen kaphatunk bázist az egyes terek bázisaiból. Ha $\{e_i : i \in I\}$ az $\mathcal{H}$ tér bázisa és $\{f_j : j \in J\}$ az $\mathcal{K}$ tér egy bázisa, akkor

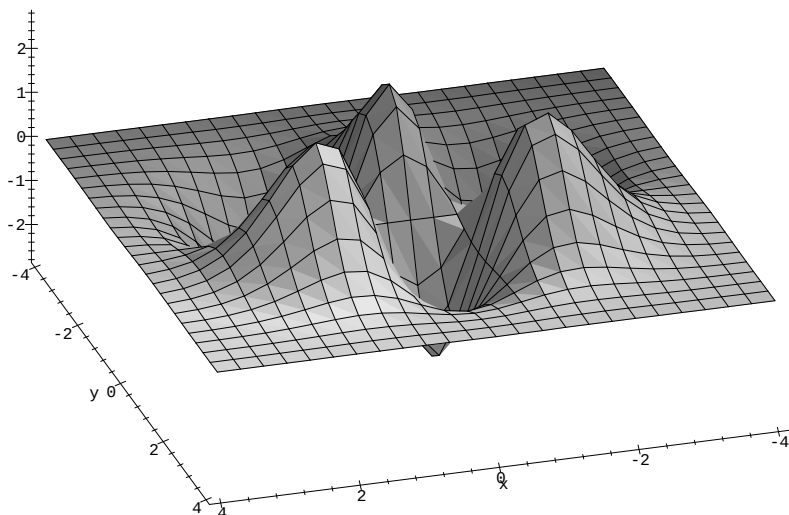
$$\{e_i \otimes f_j : (i, j) \in I \times J\}$$

az $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ szorzattér bázisa. Látható, hogy tenzorszorzáskor a terek dimenziója össze-szorzódik. A szorzattér tetszőleges eleme $\sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i \otimes f_j$ formában fejthető ki, $\sum_{i,j} |\lambda_{ij}|^2 < +\infty$, és nem más, mint az illető vektor normanégyszete.

14. példa: Az $L^2(\mathbb{R}^2)$ térben bázist kaphatunk, ha $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ szorzatként fogjuk fel. $L^2(\mathbb{R})$ -ben bázist alkotnak a normalizált Hermite-féle függvények: $\exp(-x^2/2)\tilde{H}_n(x)$ (lásd (2.8.38)). Ezért $L^2(\mathbb{R}^2)$ -ben a **kétváltozós Hermite-függvények** adnak bázist:

$$\varphi_{nm}(x, y) := e^{-(x^2+y^2)/2} \tilde{H}_n(x) \tilde{H}_m(y) \quad (n, m = 0, 1, \dots). \quad (3.5.11)$$

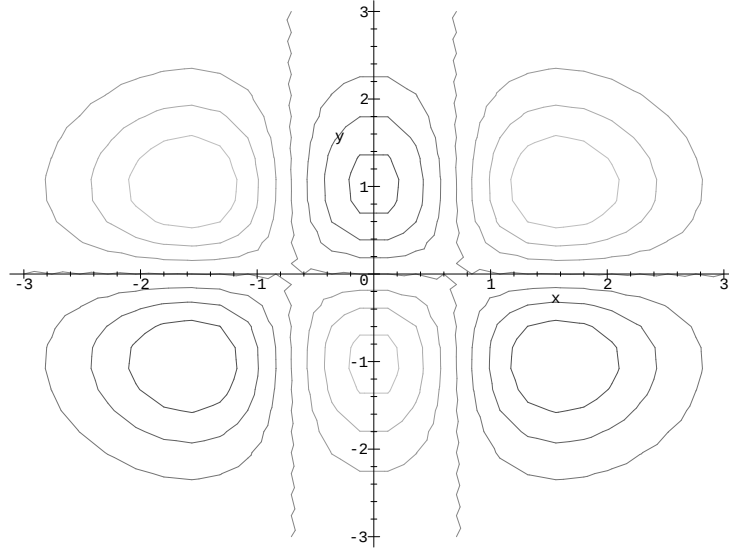
A φ_{nm} Hermite-függvénynek $n + m$ lokális maximuma van, ami grafikonján is látható, lásd az ábrákat. $\square$



A $\varphi_{2,1}(x, y)$ Hermite-függvény grafikonja. Az $x = 0$ egyenes mentén felül, $y = -2$ körül, egy púpot és lent, $y = 2$ körül, egy mélyedést látunk, ezért $m = 1$. Mindez talán jobban megfigyelhető a szintvonalakat mutató következő ábrán.

Legyen $A \in B(\mathcal{H})$ és $B \in B(\mathcal{K})$. Ekkor a $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ tenzorszorzat Hilbert-téren van egy olyan $A \otimes B$ lineáris operátor, amelyre

$$(A \otimes B)(\xi \otimes \eta) = A\xi \otimes B\eta.$$



A $\varphi_{2,1}(x, y)$ Hermite-függvény szintvonalai. A sötétebb szín a mélyedést, a világosabb a kiemelkedést jelzi. Figyelem! Az előző ábrához képest az y tengely irányítása megváltozott.

Legyen (e_i) bázis $\mathcal{H}$ -ban és (f_j) bázis $\mathcal{K}$ -ban. Ekkor $e_i \otimes f_j$ a $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ tér bázisa.

$$\begin{aligned}
 \left\| (A \otimes I) \left(\sum_{ij} \lambda_{ij} e_i \otimes f_j \right) \right\|^2 &= \left\| \sum_{ij} \lambda_{ij} (Ae_i \otimes f_j) \right\|^2 = \\
 &= \sum_{ijk} \overline{\lambda_{ij}} \lambda_{kj} \langle Ae_i, Ae_k \rangle = \\
 &= \sum_j \left\langle A \left(\sum_i \lambda_{ij} e_i \right), A \left(\sum_k \lambda_{kj} e_k \right) \right\rangle \leq \\
 &\leq \sum_j \|A^* A\| \left\| \sum_i \lambda_{ij} e_i \right\|^2 = \\
 &= \sum_j \|A\|^2 \sum_i |\lambda_{ij}|^2 = \|A\|^2 \sum_{ij} |\lambda_{ij}|^2.
 \end{aligned}$$

Ez a számolás azt mutatja, hogy $\|A \otimes I\| \leq \|A\|$. Hasonlóan $\|I \otimes B\| \leq \|B\|$ és

$$\|A \otimes B\| = \|(A \otimes I)(I \otimes B)\| \leq \|A \otimes I\| \cdot \|I \otimes B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

A fordított irányú egyenlőtlenség, $\|A \otimes B\| \geq \|A\| \cdot \|B\|$ jóval egyszerűbben látható:

$$\|A \otimes B\| \geq \sup\{\|(A \otimes B)(x \otimes y)\| : \|x\| = \|y\| = 1\} = \|A\| \|B\|.$$

Így levonhatjuk az

$$\|A \otimes B\| = \|A\| \cdot \|B\| \tag{3.5.12}$$

következtetést.

Legyen A és B lineáris operátorok az $\mathcal{H}$ illetve $\mathcal{K}$ Hilbert-tereken. Legyen $\dim \mathcal{H} = n$ és $\dim \mathcal{K} = m$. Ha $\mathcal{H}$ -ban olyan bázist választunk, amelyben A mátrixa felső háromszög alakú, lásd a 2. tételt, és $\mathcal{K}$ -ben veszünk egy tetszőleges bázist, akkor a tenzorszorzat bázisban $A \times I$ mátrixa felső háromszög alakú, és diagonálisában A mátrixának diagonális elemei m -szer vannak ismételve. Mivel egy felső háromszög mátrix determinánsa a diagonális elemek szorzata, megállapíthatjuk, hogy

$$\det(A \otimes I) = (\det A)^m.$$

Kombinálva ezt a determinánsra vonatkozó szorzástétellel, adódik, hogy

$$\det(A \otimes B) = \det(A \otimes I) \times \det(I \otimes B) = (\det A)^m \times (\det B)^n. \quad (3.5.13)$$

3.6. Nevezetes topológiák

Legyen $\mathcal{H}$ egy Hilbert-tér. A normából származó topológia mellett egy másik topológiát is érdemes bevezetni $\mathcal{H}$ -n. Azt mondjuk, hogy (x_n) tart az x -hez **gyengén**, írásban $x_n \xrightarrow{w} x$, ha $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ minden $y \in \mathcal{H}$ vektorra. Természetesen $x_n \rightarrow x$ maga után vonja, hogy $x_n \xrightarrow{w} x$.

2. lemma: $x_n \rightarrow x$ pontosan akkor, ha $x_n \xrightarrow{w} x$ és $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $x_n \xrightarrow{w} x$ és $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Ekkor

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x_n, x \rangle \rightarrow \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re} \|x\|^2 = 0.$$

A megfordítás nyilvánvaló. □

15. példa: Ha (e_n) egy ortonormált rendszer valamely $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, akkor $e_n \xrightarrow{w} 0$, de e_n nem konvergál normában.

$e_n \xrightarrow{w} 0$ azt jelenti, hogy $\langle e_n, y \rangle \rightarrow 0$ minden $y \in \mathcal{H}$ vektorra. Ha y merőleges minden e_n vektorra, akkor ez nyilvánvaló. Az érdekes eset az, ha $y = \sum_n c_n e_n$. Amit meg kell mutatni, az $c_n \rightarrow 0$. Ez azonban következik abból, hogy $\sum_n |c_n|^2 < \infty$. Tehát $e_n \xrightarrow{w} 0$. Ha e_n normában konvergálna, akkor határértéke csak 0 lehetne, ami viszont $\|e_n\| = 1$ miatt nem lehet. □

5. tétel: Bármely $\mathcal{H}$ Hilbert-tér $\{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$ egységgömbje kompakt a gyenge topológiára nézve.

Bizonyítás: Legyen a Hilbert-terünk a ℓ^2 tér, és legyen (x_n) legfeljebb 1 hosszúságú vektorok egy sorozata. Ekkor a vektorok első koordinátáinak sorozata egy korlátos sorozat, amiből kiválasztható egy konvergens részsorozat. Így van (x_n) -nek egy olyan $(x_n^{(1)})$ részsorozata, hogy az első koordináták sorozata már konvergens. Most $(x_n^{(1)})$ -ből választunk ki egy olyan $(x_n^{(2)})$ részsorozatot, hogy a második koordináták sorozata konvergens legyen. Természetesen $(x_n^{(2)})$ első koordinátáinak a sorozata is konvergens, hiszen $(x_n^{(1)})$ esetében ez így volt, és a tulajdonság részsorozatra öröklődik. Az eljárást folytatjuk: $(x_n^{(k)})$ olyan részsorozata lesz $(x_n^{(k-1)})$ -nek, hogy $(x_n^{(k)})$ -nak az első k koordinátái már konvergens sorozatokat képeznek. Az összes ilyen módon konstruált sorozat az eredetileg adott (x_n) sorozat részsorozata. Most vegyük azt az (y_n) sorozatot, amelynek k -adik eleme $(x_n^{(k)})$ -nek a k -adik eleme. Az (y_n) „diagonális” sorozat minden

$(x_n^{(k)})$ -nek részsorozata, és koordinátánként konvergál. A koordinátánkénti konvergencia éppen a gyenge konvergencia, tehát (y_n) gyengén konvergens. Az adott (x_n) sorozatból kiválasztottunk egy gyengén konvergens részsorozatot. $\square$

16. példa: A végtelen dimenziós Hilbert-tér szokásos és gyenge topológiájának a különbözőségét a zárt egységgömb kompaktságában is láthatjuk. A gyenge topológiában az egységgömb kompakt a 5. tétel értelmében. Ugyanakkor megadhatunk az egységgömbnek olyan nyílt gömbökkel való lefedését, amelyből nem választható ki véges részfedés. Minden y egységvektorra tekintsük a

$$G_y = \left\{ x : \|x - y\| < \frac{1}{2} \right\}$$

nyílt gömböt. Ezek a

$$G = \{x : \|x\| < 1\}$$

gömbbel együtt a zárt egységgömb egy nyílt fedését adják. Ha $G, G_{y_1}, G_{y_2}, \dots, G_{y_n}$ véges részfedés lenne, akkor található olyan z egységvektor, amelyre $z \perp y_1, y_2, \dots, y_n$. Erre az y vektorra nyilván $z \notin G$, de $\|z - y_k\| = \sqrt{2}$ miatt $z \notin G_{y_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Ez az ellentmondás mutatja, hogy a G és G_y gömbökkel való lefedésből nem választható ki véges. Tehát a végtelen dimenziós Hilbert-tér zárt egységgömbje nem kompakt. $\square$

A Hilbert-tér vektorok gyenge konvergenciája indukál egy topológiát az operátorok terén, amit **gyenge operátor topológiának** nevezünk. Ha $A_n, A \in B(\mathcal{H})$, akkor $A_n \xrightarrow{wo} A$ jelentése $\langle x, A_n y \rangle \rightarrow \langle x, A y \rangle$ minden x, y vektorra. (Tehát $A_n \xrightarrow{wo} A$ nem más, mint $A_n y \xrightarrow{w} A y$ minden y vektorra. A gyenge operátor topológia a pontonkénti gyenge konvergencia topológiája.)

17. példa: Ha $A_n \xrightarrow{wo} A$, akkor $A_n^* \xrightarrow{wo} A^*$, azaz az adjungálás folytonos a gyenge operátor topológiában. $\square$

A gyenge operátor topológia egy fontos tulajdonságát tartalmazza a következő tétel.

6. tétel: $A \{T \in B(\mathcal{H}) : \|T\| \leq 1\}$ halmaz kompakt a gyenge operátor topológiára nézve.

A Hilbert-tér operátorok pontonkénti konvergenciáját **erős operátor topológiának** is nevezzük: $A_n \xrightarrow{so} A$, ha $A_n x \rightarrow A x$ minden x vektorra. Természetesen $A_n \xrightarrow{so} A$ indukálja az $A_n \xrightarrow{wo} A$ konvergenciát.

3.7. Pozitív operátorok

Az $A \in B(\mathcal{H})$ operátort **pozitívnak** mondjuk, ha önadjungált és $\langle x, A x \rangle \geq 0$ a Hilbert-tér bármely x vektorára. A definícióból világos, hogy pozitív operátorok összege is az.

18. példa: Minden $P \in B(\mathcal{H})$ projekció pozitív. Ha $x \in \mathcal{H}$, akkor $x = Px + x'$, ahol $Px \perp x'$. Ezért

$$\langle x, Px \rangle = \langle Px + x', Px \rangle = \langle Px, Px \rangle \geq 0. \quad \square$$

19. példa: Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ egy folytonos függvény. Az $L^2(a, b)$ téren értelmezett $Ax = f x$ szorzásoperátor pozitív. Valóban

$$\langle x, Ax \rangle = \int_a^b f(t) |x(t)|^2 dt \geq 0. \quad \square$$

20. példa: Két pozitív operátor szorzata általában nem pozitív, hiszen még csak nem is önadjungált. Például az

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixok pozitívak, de a szorzatuk nem az. Mivel

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

nem önadjungált, pozitív sem lehet. □

21. példa: Bármilyen $A \in B(\mathcal{H})$ operátorra A^*A és AA^* pozitívak. □

Ha $A, B \in B(\mathcal{H})$ önadjungált operátorok, akkor $A \leq B$ jelentése az, hogy $\langle x, Ax \rangle \leq \langle x, Bx \rangle$ minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra, vagyis $B - A \geq 0$.

22. példa: Ha $A \in B(\mathcal{H})$ olyan önadjungált operátor, amelyre $\|A\| \leq 1$, akkor $A \leq I$:

$$\langle x, Ax \rangle \leq \|A\| \|x\|^2 \leq \langle x, x \rangle = \langle x, Ix \rangle. \quad \square$$

7. tétel: *Felcserélhető pozitív operátorok szorzata is pozitív.*

Bizonyítás: Legyen $A, B \in B(\mathcal{H})$, $AB = BA$ és $A, B \geq 0$. Az $A = 0$ eset triviális, egyébként pedig alkalmas konstanssal való beszorzással elérhetjük, hogy $\|A\| = 1$ legyen. Nem jelenti tehát az általánosság megszorítását, ha az $\|A\| = 1$ esettel foglalkozunk.

Rekurzióval értelmezzünk egy $A_n \in B(\mathcal{H})$ sorozatot:

$$A_1 = A \quad \text{és} \quad A_{n+1} = A_n - A_n^2.$$

Az A_n operátorok valamennyien önadjungáltak és egymással felcserélhetők, az A_n operátor egy valós együtthatós polinomja A -nak. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $0 \leq A_n \leq I$. $n = 1$ esetére ezt a 22. példából már tudjuk.

$$A_{n+1} = A_n^2(I - A_n) + A_n(I - A_n)^2 \quad (3.7.14)$$

$$I - A_{n+1} = (I - A_n) + A_n^2. \quad (3.7.15)$$

Mivel

$$\begin{aligned} \langle x, A_{n+1}x \rangle &= \langle x, A_n^2(I - A_n)x \rangle + \langle x, A_n(I - A_n)^2 \rangle = \\ &= \langle A_n x, (I - A_n)A_n x \rangle + \langle (I - A_n)x, A_n(I - A_n)x \rangle \end{aligned}$$

az indukciós feltevés miatt $A_{n+1} \geq 0$. Ugyanekkor a (3.7.15) előállítás mutatja, hogy $A_{n+1} \leq I$.

Az A_n operátorok értelmezéséből

$$A = A_1^2 + A_2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3 = \dots = \sum_{k=1}^n A_k^2 + A_{n+1}.$$

Ezért

$$\sum_{k=1}^n A_k^2 \leq A$$

és

$$\sum_{k=1}^n \|A_k x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle A_k x, A_k x \rangle \leq \langle x, Ax \rangle.$$

Ebből arra következtethetünk, hogy $\sum_{k=1}^n \|A_k x\|^2$ konvergens és $\|A_n x\| \rightarrow 0$. Tehát

$$\sum_{k=1}^n A_k^2 x = Ax - A_{n+1}x \rightarrow Ax,$$

más szóval

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 x = Ax.$$

B felcserélhető A_k -val minden $k \in \mathbb{N}$ -re, és

$$\langle ABx, x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_k^2 Bx, x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle BA_k x, A_k x \rangle.$$

B feltételezett pozitivitása miatt a sor minden tagja nemnegatív, és elérkeztünk a bizonyítandó $AB \geq 0$ egyenlőtlenséghez. $\square$

Később standard tulajdonsággá válik az a tény, hogy felcserélhető pozitív operátorok szorzata is pozitív. Ez következik a négyzetgyök használatával, de eddig nem igazoltuk, hogy pozitív operátornak van négyzetgyöke. A következő lemma elemi, majd nemkommutatív változata is lesz.

3. lemma: *Legyen $A_1 \leq A_2 \leq \dots$ páronként felcserélhető önadjungált operátorok sorozata a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ha létezik egy olyan $B \in B(\mathcal{H})$ önadjungált operátor, amelyre $A_n B = B A_n$, és $A_n \leq B$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, akkor létezik egy olyan $A \in B(\mathcal{H})$ önadjungált operátor, amelyre*

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax \text{ minden } x \in \mathcal{H}\text{-ra,}$$

$$(2) A_n \leq A \leq B.$$

Bizonyítás: Legyen $C_n = B - A_n$. Ekkor a C_n sorozat felcserélhető operátorokból áll, és

$$C_1 \geq C_2 \geq C_3 \geq \dots \geq 0.$$

Az előző tétel szerint a $(C_m - C_n)C_m$ és $C_n(C_m - C_n)$ operátorok pozitívak, ha $n > m$. Ezért

$$\langle C_m^2 x, x \rangle \geq \langle C_m C_n x, x \rangle \geq \langle C_n^2 x, x \rangle,$$

és $\langle C_k^2 x, x \rangle$ nemnegatív számok fogyó sorozata, ami konvergál.

$$\begin{aligned} \|C_m x - C_n x\|^2 &= \langle (C_m - C_n)^2 x, x \rangle = \langle C_m^2 x, x \rangle - \\ &\quad - 2\langle C_m C_n x, x \rangle + \langle C_n^2 x, x \rangle \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ha $n, m \rightarrow \infty$. Tehát $C_n x$ Cauchy-sorozat határértékét Ax -nek értelmezzük. Látható, hogy így egy olyan A lineáris operátort kapunk, ami önadjungált és $A_n \leq A \leq B$. $\square$

Az előző lemmát használjuk a négyzetgyökre.

8. tétel: Legyen $0 \leq A \leq B(\mathcal{H})$. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan pozitív B operátor, amelyre $B^2 = A$. Ezen túlmenően, B felcserélhető minden olyan operátorral, amely felcserélhető A -val.

Bizonyítás: Egy konstanssal való megszorzással elérhetjük, hogy $\|A\| \leq 1$, és ezért $A \leq I$ teljesüljön. Legyen $T_1 = 0$ és

$$T_{n+1} = T_n + \frac{1}{2}(A - T_n^2) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor T_n A -nak valós együtthatós polinomja, ezért önadjungált és felcserélhető azokkal az operátorokkal, amelyekkel A felcserélhető. Ezen kívül a T_n sorozat felcserélhető operátorokból áll. Mivel

$$I - T_{n+1} = \frac{1}{2}(I - T_n)^2 + \frac{1}{2}(I - A),$$

teljes indukcióval látszik, hogy $T_n \leq I$. Megmutatjuk azt is, hogy $T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \dots$ A rekurzióból

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{2}[(I - T_{n-1}) + (I - T_n)](T_n - T_{n-1}).$$

A szögletes zárójelben pozitív operátor áll, és $T_n - T_{n-1} \geq 0$ az indukciós feltevés szerint. A két felcserélhető pozitív operátor szorzata a 7. tétel szerint pozitív.

A 3. lemma szerint T_n konvergál egy B operátorhoz. A T_n -re vonatkozó rekurziós formulában határértéket véve

$$B = B + \frac{1}{2}(A - B^2),$$

azaz $A = B^2$. □

A korábbi lemma kiterjesztése következik majd tételben.

4. lemma: Ha $A, B_n, B \in B(\mathcal{H})$ önadjungált operátorok, $A \leq B_n \leq B$ és $\langle x, B_n x \rangle \rightarrow \langle x, B x \rangle$ ($x \in \mathcal{H}$), akkor $B_n \xrightarrow{so} B$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \|(B - B_n)x\|^2 &= \langle (B - B_n)x, (B - B_n)x \rangle = \\ &= \langle (B - B_n)(B - B_n)^{1/2}x, (B - B_n)^{1/2}x \rangle \leq \\ &\leq \|B - B_n\| \langle (B - B_n)^{1/2}x, (B - B_n)^{1/2}x \rangle \leq \\ &\leq (\|A\| + \|B\|) \langle (B - B_n)x, x \rangle \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy a pozitív $B - B_n$ operátornak létezik négyzetgyöke. □

9. tétel: Ha $B_1 \leq B_2 \leq \dots$ önadjungált operátorok olyan növekvő sorozata, hogy $B_n \leq C$ valamely korlátos $C = C^*$ operátorra, akkor egyértelműen létezik egy olyan B operátor, amelyre $B_n \xrightarrow{so} B$.

Bizonyítás: A polarizációs azonosság és feltevés szerint

$$B(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, B_n y \rangle$$

egy korlátos forma, $\|C\|$ korláttal, amit egy $B = B^* \in B(\mathcal{H})$ operátor reprezentál, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, B_n y \rangle = \langle x, Bx \rangle.$$

Ezután csak az előző lemmára kell hivatkoznunk, és megállapíthatjuk, hogy $B_n \xrightarrow{so} B$. $\square$

23. példa: Pozitív számokra a

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

közepék jól ismertek. Harmonikus, mértani és számtani középnek is hívják ezeket. Áttérhetünk operátorokra, de azok jóval komplikáltabbá válnak.

Pozitív operátorok számtani közepe világos. Ha $0 \leq A, B$, akkor $(A+B)/2$ a **számtani közép**. A **mértani közép** egy nagyon speciális dolog. Legyen $\varepsilon > 0$, $\varepsilon I \leq A$ és $0 \leq B$. Ekkor a mértani közép

$$A \# B := A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^{1/2} A^{1/2}, \quad (3.7.16)$$

hiszen A invertálható.

Könnyen igazolhatjuk, hogy $A \# B = B \# A$, ha $\varepsilon I \leq A, B$. Célszerű A helyett A^2 és B helyet B^2 . Ekkor az előző formula

$$A(A^{-1} B^2 A^{-1})^{1/2} A = B(B^{-1} A^2 B^{-1})^{1/2} B,$$

vagy

$$X := (A^{-1} B^2 A^{-1})^{1/2} A = A^{-1} B (B^{-1} A^2 B^{-1})^{1/2} B.$$

Most $X^* X$ -et írjuk ki:

$$A(A^{-1} B^2 A^{-1})^{1/2} (A^{-1} B^2 A^{-1})^{1/2} A = B(B^{-1} A^2 B^{-1})^{1/2} B A^{-1} A^{-1} B (B^{-1} A^2 B^{-1})^{1/2} B,$$

ami elég egyszerű:

$$A A^{-1} B^2 A^{-1} A = B (B^{-1} A^2 B^{-1})^{1/2} (B^{-1} A^2 B^{-1})^{-1} (B^{-1} A^2 B^{-1})^{1/2} B$$

és ez triviális.

A mértani-számtani egyenlőtlenség

$$A \# B \leq \frac{A+B}{2}$$

hasonlóan igazolható. Egy ekvivalens formula

$$0 \leq I - 2(A^{-1} B A^{-1})^{1/2} + A^{-1} B A^{-1}.$$

Ha $(A^{-1} B A^{-1})^{1/2} = X$, akkor ez $0 \leq (X - I)^2$, ami igaz. Még az egyenlőséget is megmondhatjuk, $X = I$, és ez $A = B$ feltétel.

Az is igazolható, hogy

$$0 < A_1 \leq A_2, \quad 0 < B_1 \leq B_2 \quad \text{adja} \quad A_1 \# B_1 \leq A_2 \# B_2. \quad (3.7.17)$$

Az egyenlőtlenség ekvivalens ennek a mátrixnak a pozitivitásával:

$$\begin{bmatrix} A_2 & A_1 \# B_1 \\ A_1 \# B_1 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi összeg adja a pozitivitást:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_1 \# B_1 \\ A_1 \# B_1 & B_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 - A_1 & 0 \\ 0 & B_2 - B_1 \end{bmatrix}$$

Ha $A, B \geq 0$, akkor

$$A \# B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A + \varepsilon I)^{1/2} ((A + \varepsilon I)^{-1/2} B (A + \varepsilon I)^{-1/2})^{1/2} (A + \varepsilon I)^{1/2},$$

hiszen a limesz egy monoton fogyó operátor rendszerben van.

A **harmonikus közép** operátorokra

$$2(A^{-1} + B^{-1})^{-1} \tag{3.7.18}$$

formában lenne. □

3.8. Unitér operátorok

Az invertálható $U \in B(\mathcal{H})$ operátort **unitérnek** mondjuk, ha

$$\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

Az unitér operátorok az $U^{-1} = U^*$ tulajdonsággal is jellemezhetők, és ezért egy unitér operátor normális. Az unitér operátor fogalma, az adjungálthoz hasonlóan, kiterjeszthető két különböző Hilbert-tér között ható operátorokra is. Azt is mondhatjuk, hogy az unitér operátorok egyszerűen az invertálható izometriák.

24. példa: Az unitér operátorok körében a gyenge és erős operátor topológiák egybeesnek.

Ha $U_n \xrightarrow{so} U$, akkor $\langle x, U_n y \rangle \rightarrow \langle x, U y \rangle$, vagyis $U_n \xrightarrow{wo} U$. (Ez teljesen általánosan így van, az unitér feltevést itt nem kellett használnunk.)

Megfordítva, tegyük fel, hogy $U_n \xrightarrow{wo} U$. Ekkor $U_n x \xrightarrow{w} Ux$, de mivel $\|U_n x\| = \|x\| = \|Ux\|$, a 2. Lemma alapján $U_n x \rightarrow Ux$. Mivel ez bármilyen x vektorra igaz, $U_n \xrightarrow{so} U$.

A két topológia ekvivalenciájából fontos következtetést tehetünk: Az unitér operátorok egy **topologikus csoportot** képeznek az erős operátor topológiára nézve.

Világos, hogy unitér operátorok szorzata és inverze is unitér. Amit meg kell gondolni, az a szorzás és az inverz folytonossága. Ha $A_n \xrightarrow{so} A$ és $B_n \xrightarrow{so} B$, akkor $A_n B_n \xrightarrow{so} AB$, feltéve, hogy $\|A_n\|$ és $\|B_n\|$ korlátosak. Ez adja a szorzás folytonosságát. Másrészt ha $U_n \xrightarrow{so} U$, akkor $U_n \xrightarrow{wo} U$ és $U_n^{-1} = U_n^* \xrightarrow{wo} U^* = U^{-1}$ az adjungálás folytonossága miatt. □

Példát mutatunk unitér operátorokra.

25. példa: Legyen G egy megszámlálható csoport és $g \in G$. $\ell^2(G)$ -n értelmezhetünk egy U_g operátort az

$$(U_g f)(h) = f(g^{-1}h) \quad (f \in \ell^2(G), h \in G)$$

formulával. U_g izometria, mert

$$\begin{aligned} \|U_g f\|^2 &= \sum_{h \in G} |(U_g f)(h)|^2 = \sum_{h \in G} |f(g^{-1}h)|^2 = \\ &= \sum_{h' \in G} |f(h')|^2 = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Másrészt U_g invertálható, hiszen $(U_g)^{-1} = U_{g^{-1}}$. Ezért U_g egy unitér operátor. Mivel az $U_{g_1}U_{g_2} = U_{g_1g_2}$ kompozíciós szabály is fennáll, a $g \mapsto U_g$ hozzárendelés a G csoport unitér reprezentációja. (Neve **balreguláris reprezentáció**.) $\square$

26. példa: Legyen m_1, m_2 pozitív valós számok. Értelmezzünk egy $U : L^2(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2n})$ lineáris operátort az

$$(Uf)(x, y) = f(u, v),$$

ahol

$$u = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}, \quad v = y - x \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Belátjuk, hogy U unitér transzformáció.

$$\|Uf\|^2 = \int |f(u, v)|^2 dx dy = \int |f(u, v)|^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

ahol

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1}$$

a Jacobi-mátrix determinánsának abszolút értéke. A Jacobi-mátrixot blokkmátrix írásmóddal a

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} I & -I \\ \frac{m_2}{m_1+m_2} I & I \end{bmatrix}$$

formában adhatjuk meg,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{m_1}{m_1+m_2} I, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{m_2}{m_1+m_2} I, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -I, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = I,$$

I jelöli az $n \times n$ -es egységmátrixot. Ez a mátrix tenzorszorzat alakú, nem más, mint

$$\begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & -1 \\ \frac{m_2}{m_1+m_2} & 1 \end{bmatrix} \otimes I.$$

Determinánsa (3.5.13) alapján 1, mivel mindkét tényező 1 determinánsú. Megmutattuk, hogy

$$\|Uf\|^2 = \int |f(u, v)|^2 du dv = \int |f(x, y)|^2 dx dy = \|f\|^2.$$

Mivel U invertálható, egy unitér operátor.

Érdeemes megjegyezni, hogy ha a példában x -et egy m_1 tömegű részecske helyének és y -t egy m_2 tömegű részecske helyének gondoljuk, akkor u a közös tömegközéppont helye, v pedig a második részecskének az elsőhöz viszonyított helyzete. A tárgyalt unitér operátor egy koordináta-rendszer transzformációhoz kapcsolódik. $\square$

27. példa: Legyen σ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja, és $\mathcal{H}$ egy tetszőleges Hilbert-tér. $\mathcal{H}^{n\otimes} = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ -téren értelmezzünk egy U_σ operátort az

$$U_\sigma \left(\sum_i C(i) x_1^{(i)} \otimes x_2^{(i)} \otimes \dots \otimes x_n^{(i)} \right) = \sum_i C(i) x_{\sigma(1)}^{(i)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}^{(i)} \quad (3.8.19)$$

képlettel. Ekkor

$$\begin{aligned} \left\langle U_\sigma \left(\sum_i C(i) x_1^{(i)} \otimes \dots \otimes x_n^{(i)} \right), U_\sigma \left(\sum_j C(j) x_1^{(j)} \otimes \dots \otimes x_n^{(j)} \right) \right\rangle = \\ = \sum_{i,j} \overline{C(i)} C(j) \left(\langle x_{\sigma(1)}^{(i)}, x_{\sigma(1)}^{(j)} \rangle \cdots \langle x_{\sigma(n)}^{(i)}, x_{\sigma(n)}^{(j)} \rangle \right). \end{aligned}$$

Mivel a zárójelben szereplő tényezők sorrendjét változtatja a σ permutáció, így a zárójelben a tényezők sorrendjétől eltekintve az

$$\langle x_1^{(i)}, x_1^{(j)} \rangle \cdots \langle x_n^{(i)}, x_n^{(j)} \rangle$$

szorzat áll. Ezért

$$\langle U_\sigma x, U_\sigma y \rangle = \langle x, y \rangle,$$

tehát U_σ megtartja a belső szorzatot. Inverze, $U_{\sigma^{-1}}$, létezik, ezért U_σ egy unitér operátor. $\square$

A következő példában a gömbfelületen négyzetesen integrálható függvények terét bontjuk tenzorszorzatra egy unitér operátor segítségével, és a tenzorszorzatot arra használjuk, hogy egy mesterkéltnek tűnő, de mégis sokszor hasznos bázist konstruáljunk.

28. példa: Legyen $L^2(S, d\Omega)$ az egységgömb felszínén négyzetesen integrálható függvények tere. Ha $\psi \in L^2(S, d\Omega)$, akkor az

$$(U\psi)(\theta, \varphi) = \psi(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

képlet egy $L^2(S, d\Omega) \rightarrow L^2(0, 2\pi) \otimes L^2((0, \pi), \sin \theta d\theta)$ unitér operátort értelmez, hiszen

$$\int |\psi(x, y, z)|^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |U\psi|^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

érvényes, ha a gömbön vett felületi integrált gömbi koordinátákra való áttéréssel számoljuk ki.

Célunk az, hogy az $L^2(S, d\Omega)$ térben konstruáljunk egy bázist. $L^2(0, 2\pi)$ -ben $\{e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi} : m \in \mathbb{Z}\}$ egy alkalmas bázis. Ha minden $m \in \mathbb{Z}$ -re veszünk egy $e_1^m(\theta), e_2^m(\theta), \dots$ bázist az $L^2((0, \pi), \sin \theta d\theta)$ térben, akkor

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} e_j^m(\theta) : m \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N} \right\}$$

az $L^2(S, d\Omega)$ tér egy bázisa lesz, a gömbön értelmezett függvényeket gömbi koordinátákban írva.

Ha $m \in \mathbb{Z}$, akkor $P_\ell^{|m|}(\cos \theta)$ teljes ortogonális rendszer a $L^2((0, \pi), \sin \theta d\theta)$ térben, ha $\ell \geq |m|$ és $P_\ell^{|m|}$ jelöli az asszociált Legendre-függvényeket, lásd (2.8.28). Valóban, helyettesítéssel

$$\int_0^\pi P_\ell^{|m|}(\cos \theta) P_k^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 P_\ell^{|m|}(t) P_k^{|m|}(t) dt,$$

ami 0, ha $\ell \neq k$.

Tehát

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left(\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!} \right)^{1/2} P_\ell^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (3.8.20)$$

egy bázis $L^2(S, d\Omega)$ -ban, ha $m \in \mathbb{Z}$ és $\ell \geq |m|$. Így jutottunk el a **gömbfüggvényekhez**. $\square$

29. példa: Legyen U egy olyan unitér operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, amelyre $U^2 = I$, azaz U önadjungált. Legyen továbbá $\mathcal{K} := \{x \in \mathcal{H} : Ux = x\}$ az U fixponjai halmaza. A feltétel miatt $y + Uy \in \mathcal{K}$ bármilyen y vektorra. Nevezetesen, ha $y \perp \mathcal{K}$, akkor $\langle y, y + Uy \rangle = 0$. Ebből

$$\begin{aligned} \|Uy + y\|^2 &= \langle Uy + y, Uy + y \rangle = \langle Uy, Uy + y \rangle + \langle y, Uy + y \rangle \\ &= \langle y, U(Uy + y) \rangle + 0 = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $y \perp \mathcal{K}$ esetén $Uy = -y$.

Az U operátor úgy működik, mint egy síkra való tükrözés: $\mathcal{K}$ vektorait helyben hagyja, és a rá merőleges vektorokat pedig (-1) -szeresébe viszi. $\square$

30. példa: Legyen $A \in B(\mathcal{H})$ önadjungált kontrakció, azaz $A = A^*$ és $\|A\| \leq 1$. Ekkor létezik egy $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ Hilbert-tér és annak egy $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ unitér operátora, hogy $Ax = PAx$ bármilyen $x \in \mathcal{H}$ vektorra. Itt P a $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ ortogonális projekciót jelöli.

$\mathcal{K}$ -nak a $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ teret választhatjuk, és akkor U egy 2×2 -es operátor elemű mátrixszal adható meg:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}.$$

Az $Ax = PAx$ feltétel akkor teljesül, ha $U_{11} = A$. Ahhoz, hogy U még unitér is legyen, az $U^*U = I$ tulajdonságot kell biztosítani, ami az alábbi egyenletekkel ekvivalens:

$$\begin{aligned} A^2 + U_{21}^* U_{21} &= I, & U_{12}^* U_{12} + U_{22}^* U_{22} &= I, \\ AU_{12} + U_{21}^* U_{22} &= 0, & U_{12}^* A + U_{22}^* U_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Az $U_{12} = \sqrt{I - A^2}$, $U_{21} = \sqrt{I - A^2}$ és $U_{22} = A$ választással egy unitér U operátorhoz jutunk, amit A **unitér folytatásának** vagy **dilatációjának** szoktak nevezni. $\square$

Az előbbi példa messzemenően erősíthető. Ha $\|A\| \leq 1$, akkor létezik olyan unitér U folytatás, hogy $A^n x = PU^n x$ minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra és $n \in \mathbb{N}$ természetes számra. Az unitér dilatációk és a kontrakciókra belőlük leszármaztatott tulajdonságok **Szőkefalvi-Nagy Béla** munkásságának fontos részét jelentették.



Szőkefalvi-Nagy Béla (1913–1998)

Szőkefalvi-Nagy Béla Riesz Frigyes tanítványa és munkatársa is volt. A vele írt funkcionálanalízis könyve világszerte a legismertebb matematikakönyvek közé tartozik. Szőkefalvi-Nagy Béla a dilatációelméletből kiindulva modelt dolgozott ki Hilbert-terek kontrakcióira. Évtizedeken át főszerkesztője volt a szegedi Bolyai Intézet *Acta Scientiarum Mathematicarum* című folyóiratának, amely abban az időben az operátorelmélet egyik vezető folyóirata volt.

31. példa: Legyen $A = A^* \in B(\mathcal{H})$. Az A operátor függvényei közül $U_t := \exp(itA)$ egy fontos példa. Mivel

$$\overline{\exp(itx)} = 1/\exp(itx)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ valós számra, U_t egy unitér operátor, $(U_t)^* = U_t^{-1} = U_{-t}$. Továbbá az

$$\exp(itx) \exp(isx) = \exp(i(t+s)x)$$

azonosság azt is implikálja, hogy $U_t U_s = U_{t+s}$. Unitér operátoroknak ily módon paraméterezett családját **egyparaméteres unitér csoportnak** fogjuk nevezni. Belátjuk, hogy $t \mapsto U_t$ normában folytonos. Ehhez az exponenciális függvény Taylor-sorát használhatjuk fel:

$$U_t - U_s = U_s(U_{t-s} - I) = U_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[i(t-s)]^n}{n!} A^n,$$

és

$$\|U_t - U_s\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|i(t-s)|^n}{n!} \|A\|^n = e^{|t-s|\|A\|} - 1.$$

Ez a becslés mutatja a folytonosságot. $\square$

32. példa: Legyen $T_t : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $(T_t f)(x) = f(t+x)$. $T_t f$ az f függvény eltoltja, lásd az ábrát alább.

T_t egy unitér operátor, sőt egyparaméteres csoportja unitéreknek, ugyanis $T_t T_s = T_{t+s}$ nyilvánvalóan teljesül. Igaz-e, hogy T_t előáll $\exp(itA)$ alakban, valamely korlátos önadjungált $A \in B(L^2(\mathbb{R}))$ operátor segítségével? Megmutatjuk, hogy nem, ugyanis $t \mapsto T_t$ nem folytonos normában. Legyen

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1/2}, & \text{ha } |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Ekkor

$$\|T_t f_\varepsilon - f_\varepsilon\| = \begin{cases} \sqrt{t/\varepsilon}, & \text{ha } |t| < 2\varepsilon, \\ \sqrt{2}, & \text{ha } |t| \geq 2\varepsilon, \end{cases}$$

és

$$\|T_t - I\| \geq \sqrt{2},$$

bármilyen kicsi is t .

Legyen $\mathcal{M}_0 := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \lim_{t \rightarrow 0} T_t f = f\}$. Ekkor $\mathcal{M}_0$ egy lineáris altér. Legyen $f_n \in \mathcal{M}_0$ és $f_n \rightarrow f$. A

$$\begin{aligned} \|T_t f - f\| &\leq \|T_t f - T_t f_n\| + \|T_t f_n - f_n\| + \|f_n - f\| = \\ &= \|T_t f_n - f_n\| + 2\|f_n - f\| \end{aligned}$$

becslés mutatja, hogy $\mathcal{M}_0$ zárt altér. Így annak igazolásához, hogy $\mathcal{M}_0 = L^2$, elég látni, hogy $\mathcal{M}_0$ tartalmazza a kompakt tartójú folytonos függvényeket. Legyen f egy ilyen függvény. Ekkor

$$\|T_t f - f\|^2 = \int |f(t+x) - f(x)|^2 dx,$$

ami tart 0-hoz, ha $t \rightarrow 0$ a Lebesgue-tétel alapján. (Létezik integrálható majoraló függvény, például egy kompakt intervallum karakterisztikus függvénye szorozva f korlátjával.)

Később látni fogjuk, hogy T_t előáll $\exp(itH)$ alakban, de a H önadjungált operátor nem korlátos. $\square$

A következő részben is lesz unitér operátor.

3.9. A Fourier-transzformáció

Függvényeknek egy lineáris leképezéséről lesz szó és majd kiderül, hogy ez a leképezés unitér operátorra változik.

Az $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény **Fourier-transzformáltját** a

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i(t,x)} f(x) dx \quad (t, x \in \mathbb{R}^n) \quad (3.9.21)$$

képlet értelmezi, $(x, t) = \sum_i x_i t_i$. Világos a definícióból, hogy $\hat{f}$ korlátos, és a dominált konvergenciátételből adódóan folytonos függvény.

33. példa: Kiszámoljuk az $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$ függvény Fourier-transzformáltját az egy változóban:

$$\begin{aligned}\hat{f}_\lambda(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i t x - \lambda x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\lambda \left(x + \frac{i t}{2\lambda} \right)^2 - \frac{t^2}{4\lambda} \right] dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/4\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-t^2/4\lambda}.\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk a valószínűség-számításból is jól ismert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (3.9.22)$$

Gauss-féle integrált. (A bal oldal analitikus függvénye a komplex z változónak. Ezért abból a tényből, hogy valós z -re az integrál 1, következik, hogy bármilyen komplex z -re ugyanezt az értéket kell felvennie.)

A példa mutatja, hogy $\exp(-x^2/2)$ Fourier-transzformáltja önmaga.

Az egyváltozós esetből könnyen következik az alábbi többváltozós: ha

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda \|x\|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad (3.9.23)$$

akkor

$$\hat{g}_\lambda(t) = \frac{1}{(2\lambda)^{n/2}} e^{-\|t\|^2/4\lambda} \quad (t \in \mathbb{R}^n) \quad (3.9.24)$$

megadja a Fourier-transzformáltat. $\square$

34. példa: Próbáljuk differenciálni $\hat{f}$ -ot az egyváltozós esetben.

$$\frac{\hat{f}(t) - \hat{f}(t')}{t - t'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{e^{-i t x} - e^{-i t' x}}{t - t'} f(x) dx.$$

Ha a $t' \rightarrow t$ határátmenetet akarjuk végrehajtani, akkor integrálható majoránst kell keresnünk. Az integrandusban lévő differenciahányados $-i x e^{-i t x}$ -hez tart. Amennyiben $x f(x)$ integrálható

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = -i \widehat{x f(x)}. \quad (3.9.25)$$

Ezt iterálva jutunk oda, hogy ha $x^n f(x)$ integrálható, akkor $\hat{f}$ Fourier-transzformáltja n -szer differenciálható. (Minél gyorsabban tart f a 0-hoz a végtelenben, annál simább a Fourier-transzformáltja.)

A (3.9.25) képlet levezetéséhez hasonlóan látható, hogy az n változós esetben $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ és $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ multiindexekre

$$(-i)^{|\beta|+|\alpha|} t^\alpha \partial_\beta \hat{f}(t) = \int e^{-i(t,x)} \partial_\alpha (x^\beta f(x)) dx. \quad (3.9.26)$$

A jelölés:

$$x^\beta := x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}, \quad \partial_\beta := (\partial_1)^{\beta_1} (\partial_2)^{\beta_2} \dots (\partial_n)^{\beta_n}, \quad |\beta| := \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$$

elfogadható. $\square$

10. tétel: (Plancherel-tétel) Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, akkor $\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$.

Bizonyítás: Legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. A $\|\hat{f}\|^2$ norma négyzetet egy kicsit módosítjuk egy $\lambda > 0$ számmal:

$$\begin{aligned} \int |\hat{f}(t)|^2 \exp(-\lambda \|t\|^2/2) dt &= \int \hat{f}(t) \overline{\hat{f}(t)} \exp(-\lambda \|t\|^2/2) dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i(t,x)} f(x) dx \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{i(t,y)} \overline{f(y)} dy \right) \exp(-\lambda \|t\|^2/2) dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} f(x) \overline{f(y)} e^{-i(t,x-y)} \exp(-\lambda \|t\|^2/2) dx dy dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x) \overline{f(y)} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t,x-y)} \exp(-\lambda \|t\|^2/2) dt \right) dx dy \end{aligned}$$

Most az integrált felhasználva (3.9.24) alapján a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \iint f(x) \overline{f(y)} (\lambda^{-n/2} \exp(-\|x-y\|^2/2\lambda)) dx dy = \\ &= \left\langle f(y), \int \frac{1}{(2\pi\lambda)^{n/2}} \exp(-\|x-y\|^2/2\lambda) f(x) dx \right\rangle. \end{aligned}$$

A belső szorzat második tagja egy $j_\varepsilon * f$ alakú konvolúció

$$j_\varepsilon(z) = \frac{1}{(2\pi\lambda)^{n/2}} \exp(-\|z\|^2/2\lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\varepsilon})^n} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2\varepsilon}\right),$$

ahol $\varepsilon^2 = \lambda$. Lényeges, hogy $j_\varepsilon * f$ tart f -hez, ha $\lambda \rightarrow 0$, lásd (3.3.5). Ezért az utolsó tag $\langle f, f \rangle = \|f\|^2$ -hez tart, ha $\lambda \rightarrow 0$. Ugyanekkor a monoton konvergencia tétel szerint a kiindulási kifejezés tart $\|\hat{f}\|^2$ -hez. $\square$

A fenti bizonyítás **Riesz Frigyesztől** származik. Most az $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert-térre koncentrálunk. $\mathcal{F}_0 : f \mapsto \hat{f}$ izometria $L^1 \cap L^2$ -ből L^2 -be. Ennek létezik egy $\mathcal{F}$ izometrikus kiterjesztése az egész L^2 -re. (Figyelmeztetés: Az (3.9.21) képlet integrálja nem konvergens teszőleges $f \in L^2$ függvényre!) Az okoskodást megismételhetjük a Fourier-transzformáció inverzére, ami teljesen hasonló alakú az $L^1 \cap L^2$ téren: $g \mapsto \hat{g}(-t)$. Ezért $\mathcal{F}$ invertálható izometria, ami a polarizációs azonosság alapján **unitért** jelent.

35. példa: A Fourier-transzformáció unitér, az egyváltozós esetben sajátfüggvényei a Hermite-féle függvények.

Használjuk a **Hermite-polinomok generátorfüggvényét**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2xt-t^2}, \quad (3.9.27)$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-x^2/2} H_n(x) = e^{2xt-x^2/2} e^{-t^2}.$$

Vesszük az $\mathcal{F}$ függvényt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{F}(e^{-x^2/2} H_n(x)) = \mathcal{F}(e^{2xt-x^2/2} e^{-t^2})$$

és először a jobboldalt kiszámoljuk (az x változóban):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixs} (e^{2xt-x^2/2} e^{-t^2}) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixs} e^{-(x-2t)^2/2} e^{t^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i(y+2t)s} e^{-y^2/2} e^{t^2} dy \\ &= e^{t^2} e^{-2tsi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iys} e^{-y^2/2} dy \right) \\ &= e^{t^2} e^{-2tsi} e^{-s^2/2}. \end{aligned}$$

(Teljes négyzetté való kiegészítés, $y = x - 2t$ integráltranszformáció és a standard normális eloszlás Fourier-transzformálása voltak az egyes lépések.) Ezt átírjuk a (3.9.27) alapján:

$$e^{t^2} e^{-2tsi} e^{-s^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} e^{-s^2/2} H_n(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-i)^n e^{-s^2/2} H_n(s)$$

és megkapjuk, hogy

$$\mathcal{F}(e^{-x^2/2} H_n(x)) = (-i)^n e^{-s^2/2} H_n(s),$$

vagy egy másik jelöléssel

$$\mathcal{F}(\varphi_n) = (-i)^n \varphi_n. \quad (3.9.28)$$

Tehát az $\mathcal{F}$ unitér operátor spektruma $\{1, i, -1, -i\}$.

Ha egy adott $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvény Hermite-féle sorfejtését ismerjük,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{ahol} \quad c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x) dx,$$

akkor Fourier transzformáltja

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n c_n \varphi_n.$$

□

3.10. Rezolvens és spektrum

Korlátos operátor spektrumát már a Banach-terek kapcsán bevezettük, a részletesebb tárgyalásra azonban csak most kerítünk sort.

5. lemma: Ha $A \in B(\mathcal{H})$, akkor $\|A^* A\| = \|A\|^2$.

Bizonyítás: Egyrészt $\|A^* A\| \leq \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$, másrészt

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^* Ax, x \rangle \leq \|A^* A\| \cdot \|x\|^2,$$

amiből $\|A\|^2 \leq \|A^* A\|$. □

Jelöljük I -vel a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér identitás operátorát. A tetszőleges $T \in B(\mathcal{H})$ operátor **rezolvens halmaza** azokból a λ komplex számokból áll, amelyekre a $\lambda \cdot I - T$ operátornak létezik korlátos inverze. A rezolvens halmaz jelölése $\rho(T)$. Így $\lambda \in \rho(T)$ esetén $R_\lambda(T) := (\lambda \cdot I - T)^{-1} \in B(\mathcal{H})$, $R_\lambda(T)$ -t a T operátor λ pontban vett **rezolvensének** nevezzük.

36. példa: Legyen U egy **unitér operátor**. Ekkor $\|U\|^2 = \|U^*U\| = 1$ alapján $\|U\| = 1$. Ha $\lambda \in \mathbb{C}$ és $|\lambda| > 1$, akkor

$$(\lambda \cdot I - U)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda}U + \frac{1}{\lambda^2}U^2 + \dots \right)$$

a Neumann-féle sorfejtés szerint, és ezért $\lambda \in \rho(T)$. Hasonlóan következik, hogy $\lambda \in \rho(U^*)$, ha $|\lambda| > 1$. Az

$$U - \lambda \cdot I = \lambda U(\lambda^{-1} \cdot I - U^*)$$

azonosság mutatja, hogy $U - \lambda \cdot I$ invertálható, ha $0 < |\lambda| < 1$. Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy ha $|\lambda| \neq 1$, akkor $\lambda \in \rho(U)$. $\square$

37. példa: Legyen

$$T = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

Ekkor a rezolvens

$$R_\lambda(T) = (\lambda - x)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda - x)^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda - y)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

amiről meggyőződhetünk, ha beszorzunk a $\lambda \cdot I - T$ mátrixszal.

A $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ operátor értékű analitikus függvény a $\mathbb{C} \setminus \{x, y\}$ halmazon. x és y a T mátrix sajátértékei, a megfelelő sajátalterekre vetítő projekciók nem mások, mint a reziduumok.

Egy tetszőleges $n \times n$ -es T mátrix rezolvens felírható, ha tudjuk, hogy milyen hasonlósági transzformációval hozható Jordan-féle normál alakra. Példaként tekintsünk egy Jordan-blokkot. Ha

$$T' = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix},$$

akkor

$$R_\lambda(T') = (\lambda - x)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (\lambda - x)^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda - x)^{-3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

és $R_\lambda(ST'S^{-1}) = SR_\lambda(T')S^{-1}$ bármilyen invertálható S mátrixra. $\square$

11. tétel: $\rho(T) \subset \mathbb{C}$ *nyílt halmaz*.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\lambda_0 \in \rho(T)$. Belátjuk, hogy ha $|\lambda - \lambda_0| \leq \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$, akkor $\lambda \cdot I - T$ korlátos inverzzel rendelkezik. A Neumann-féle sorfejtés szerint

$$R_{\lambda_0}(T) \sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T)]^n$$

egy korlátos operátort ad meg, ami nem más, mint

$$R_{\lambda_0}(T) (I - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T))^{-1} = R_\lambda(T).$$

(Utóbbi egyenlőség legegyszerűbben úgy látható, hogy mindkét oldal inverzét vesszük.) $\square$

A $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ halmazt a T operátor **spektrumának** nevezzük.

Az előző tétel bizonyítása azt is mutatta, hogy az $R_\lambda(T)$ rezolvens $\rho(T) \rightarrow B(\mathcal{H})$ analitikus függvény, amit úgy is érthetünk, hogy $\lambda \mapsto \langle \xi, R_\lambda(T)\eta \rangle$ analitikus bármilyen $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ vektorokra. A

$$(\lambda \cdot I - T)^{-1} - (\mu \cdot I - T)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda \cdot I - T)^{-1}(\mu \cdot I - T)^{-1}$$

azonosságot felhasználhatjuk a rezolvens differenciálására:

$$\frac{R_\lambda(T) - R_\mu(T)}{\lambda - \mu} = -R_\lambda(T)R_\mu(T). \quad (3.10.29)$$

A $\lambda \rightarrow \mu$ határátmenet normában létezik, így az $R_\lambda(T)$ rezolvens (Frechet-) deriváltja $-R_\lambda(T)^2$.

38. példa: Legyen $f \in C[0, 1]$. Célunk az f -fel való M_f szorzásoperátor spektrumának meghatározása az $L^2[0, 1]$ téren. Ha λ nincs benne f értékkészletében, akkor van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy $|\lambda - f(x)| \geq \varepsilon$ minden $0 \leq x \leq 1$ esetén. Ezért a $g(x) = (\lambda - f(x))^{-1}$ függvény folytonos és az M_g szorzásoperátor korlátos. Mivel M_g éppen $\lambda - M_f$ inverze, λ nincs benne M_f spektrumában. Ezért $\sigma(M_f)$ f értékkészletének része, és megmutatjuk, hogy valójában pontosan az. Ha $\lambda_0 = f(x_0)$, akkor van olyan δ_n hosszúságú I_n intervallum, hogy $|f(x) - \lambda_0| < 1/n$ az I_n intervallumon. Az I_n intervallum karakterisztikus függvényéből normálással egységvektort készítünk:

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \mathbf{1}_{I_n}(x).$$

Ekkor

$$\|(\lambda - M_f)g_n\|^2 = \frac{1}{\delta_n} \int_{I_n} |\lambda - f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\delta_n} \delta_n \frac{1}{n} = \frac{1}{n},$$

tehát $(\lambda - M_f)g_n \rightarrow 0$. Ez azt mutatja, hogy a $\lambda - M_f$ operátornak nem lehet folytonos inverze, hiszen azt alkalmazva a $(\lambda - M_f)g_n$ vektorokra $g_n \rightarrow 0$ -hoz jutnánk, ami nyilván nem lehet $\|g_n\| = 1$ miatt. Következésképpen $\lambda \in \sigma(M_f)$.

Azt is láttuk, hogy $\lambda \in \sigma(M_f)$ esetén létezik egységvektoroknak olyan g_n sorozata, hogy $\lambda g_n - M_f g_n \rightarrow 0$. Ha egy λ számhoz van ilyen g_n vektorsorozat, akkor λ -t **approximatív sajátértéknek** nevezzük. (Ha g_n állandó lenne, akkor kapnánk valódi sajátértéket.) Megállapíthatjuk, hogy a szorzásoperátor spektruma approximatív sajátértékekből áll. $\square$

39. példa: A rezolvens jelentősége azon a tényen is alapszik, hogy a segítségével az operátor függvényei kifejezhetők. Legyen D egy olyan nyílt tartomány, amely tartalmazza T spektrumát. Ekkor az $R_z(T)$ rezolvens a D tartomány ∂D határa egy környezetében analitikus függvény, és bármilyen D környezetében analitikus f függvényre képezhetjük az

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) R_z(T) dz$$

vonaltintegrált. Legyen az egyszerűség kedvéért $f(z) = z^n$ és T egyetlen Jordan-blokkból álló mátrix:

$$T := \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Ekkor $T = x \cdot I + N$, ahol N az operátor nilpotens része, $N^3 = 0$. Evidens módon

$$T^n = x^n \cdot I + (n-1)x^{n-1}N + \frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-2}N^2.$$

Másrészt T rezolvensa a 37. példa szerint

$$R_z(T) = (z-x)^{-1} \cdot I + (z-x)^{-2}N + (z-x)^{-3}N^2.$$

Ezt felhasználva kiszámolhatjuk a fenti vonaltintegrált:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) R_z(T) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) (z-x)^{-1} I dz + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) (z-x)^{-2} N dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) (z-x)^{-3} N^2 dz = \\ &= f(x)I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f'(z) (z-x)^{-1} N dz + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2} \int_{\partial D} f''(z) (z-x)^{-1} N^2 dz = \\ &= f(x)I + f'(x)N + \frac{1}{2}f''(x)N^2. \end{aligned}$$

(Itt felhasználtuk a Cauchy-formulát az f függvényre, ezután parciálisan integráltunk, majd megint a Cauchy-formulát használtuk f' -re és f'' -re.) Arra az eredményre jutottunk, hogy a vizsgált esetben

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) R_z(T) dz.$$

Ez a formula akár $f(T)$ definíció is lehet, ha f a T operátor spektruma egy környezetében analitikus függvény. Nézzük meg az $f(z) = z^n$ esetet most tetszőleges $T \in B(\mathcal{H})$ operátorra.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z^n R_z(T) dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\partial D} z^{n-k-1} T^k dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z^{-1} T^n dz = T^n, \end{aligned}$$

ugyanis $k \neq n$ esetén a körintegrál eltűnik a Neumann-sorfejtés tagjaira. □

$\sigma(T)$ zárt halmaz és

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} \quad (3.10.30)$$

neve **spektrálsugár**.

12. tétel:

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

□

Ebből nyomban következik, hogy $r(T) \leq \|T\|$ és önadjungált $A = A^* \in B(\mathcal{H})$ operátor esetében $r(A) = \|A\|$. (Valóban, $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$ minden n -re az $\|A^*A\| = \|A\|^2$ egyenlőség iterálásával.)

A T operátor $\sigma(T)$ spektrumát három részre osztjuk, annak megfelelően, hogy miért nem létezik $\lambda \cdot I - T$ inverze.

- $\text{Ker}(\lambda \cdot I - T) \neq \{0\}$, akkor van olyan $0 \neq x \in \mathcal{H}$ vektor, amire $Tx = \lambda x$. Ekkor λ -t T **sajátértékének**, x -et a λ -hoz tartozó **sajátvektornak** mondjuk. A sajátértékek alkotják a $\sigma_p(T)$ **pontspektrumot**.
- Ha $\text{Ker}(\lambda \cdot I - T) = \{0\}$ és $\text{Rng}(\lambda \cdot I - T)$ nem sűrű $\mathcal{H}$ -ban, akkor λ a **reziduális spektrumhoz** tartozik, ennek jele $\sigma_r(T)$.
- Végül, ha $\text{Ker}(\lambda \cdot I - T) = \{0\}$, és $\text{Rng}(\lambda I - T) \subset \mathcal{H}$ egy sűrű valódi altér, akkor λ a $\sigma_f(T)$ **folytonos spektrum** eleme.

Megjegyezzük, hogy a $\text{Ker}(\lambda I - T) = \{0\}$ és $\text{Rng}(\lambda I - T) = \mathcal{H}$ esetben $(\lambda \cdot I - T)^{-1}$ operátor létezik, a folytonosságot a nyílt leképezés tétele garantálja.

40. példa: Legyen $S^* : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ a **balra tolás operátora**. S^* sajátértékeinek meghatározásához az

$$(x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

egyenletet kell megoldani. Ennek $x = (x_1, x_2, \dots)$ megoldása $(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$, ami $|\lambda| < 1$ esetén ad $\ell^2(\mathbb{N})$ -beli sorozatot. Ezért $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Mivel $\sigma(S^*)$ zárt és $r(S^*) \leq \|S^*\| = 1$, $\sigma(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. El akarjuk dönteni, hogy a $|\lambda| = 1$ pontok a reziduális vagy a folytonos spektrumhoz tartoznak. Ha $\{\lambda x - S^*x : x \in \ell^2\}$ nem sűrű, akkor van olyan $y \neq 0$ vektor, amelyre $\langle \lambda x - S^*x, y \rangle = 0$ minden $x \in \ell^2$ -re. Ekkor $\langle x, (\bar{\lambda} - S)y \rangle = 0$ és $\bar{\lambda}y = Sy$, vagyis $\bar{\lambda}$ sajátértéke a jobbra tolás S operátorának. Könnyen ellenőrizhető, hogy S -nek nem lehet sajátvektora, tehát $\{\lambda x - S^*x : x \in \ell^2\}$ biztosan sűrű. Így $\{\lambda : |\lambda| = 1\} = \sigma_f(S^*)$. $\square$

Amit az S^* operátorral kapcsolatban bebizonyítottunk, az általában is érvényes:

$$(\text{Rng } T)^\perp = \text{Ker } T^*. \quad (3.10.31)$$

A továbbiakban $\lambda \cdot I - T$ helyett egyszerűen $\lambda - T$ -t írunk.

6. lemma: Legyen $T \in B(\mathcal{H})$ egy normális operátor. Ekkor $\lambda \notin \sigma(T)$ akkor és csak akkor, ha van olyan $C > 0$ szám, amelyre

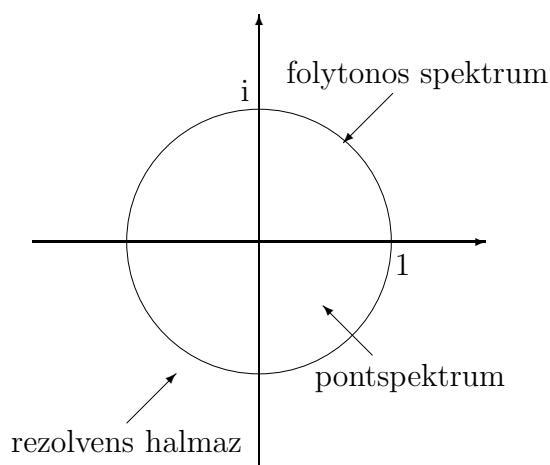
$$\|(\lambda - T)x\| \geq C\|x\|$$

minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra.

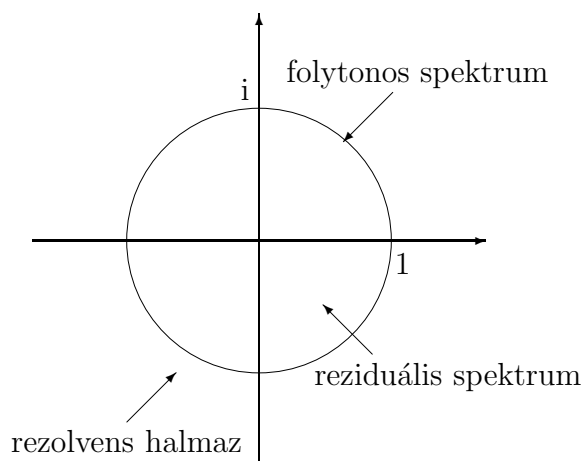
Bizonyítás: $V := \lambda - T$ normális operátor. Elég azt bizonyítani, hogy egy V normális operátor akkor és csak akkor invertálható, ha

$$\|Vx\| \geq C\|x\| \quad (3.10.32)$$

valamilyen $C > 0$ számra.



A balra tolás operátor spektruma folytonos és pontospektrumból áll



A jobbra tolás operátor spektruma folytonos és reziduális spektrumból áll

Ha V invertálható, akkor

$$\|x\| = \|V^{-1}Vx\| \leq \|V^{-1}\| \cdot \|Vx\|$$

és ebből következik a fenti egyenlőtlenség (3.10.32).

A megfordítás igazolásához induljunk ki a fenti (3.10.32) feltételből. Ez maga után vonja, hogy $\text{Ker } V = \{0\}$. Mivel egy normális operátorra

$$\|Vx\| = \|V^*x\|,$$

$\text{Ker } V^* = \{0\}$, és (3.10.31) szerint $\text{Rng } V$ sűrű. Ugyanakkor a feltételünkből következik, hogy $\text{Rng } V$ zárt: Ha Vx_n konvergens, akkor

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C} \|Vx_n - Vx_m\|$$

mutaja, hogy x_n konvergál, $x_n \rightarrow x$ és $Vx = \lim_n Vx_n$. □

Használjuk a $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jelölést.

13. tétel: Ha U egy unitér operátor, akkor $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$.

Bizonyítás: U normális, és

$$\|(\lambda - U)x\|^2 = \|Ux\|^2 + |\lambda|^2 \|x\|^2 - 2\text{Re} \langle Ux, \lambda x \rangle \geq (1 - |\lambda|)^2 \|x\|^2.$$

Most a lemma alkalmazható, ha $|\lambda| \neq 1$, akkor $\lambda \in \rho(U)$. (Egy másik bizonyítást tartalmazott a 36. példa.) □

41. példa: A **Fourier-transzformáció** a $L^2(\mathbb{R})$ tér egy $\mathcal{F}$ unitér operátorának tekinthető. $\mathcal{F}$ -nek az $1, i, -1, -i$ számok a sajátértékei. A sajátfüggvények az ún. Hermite-féle függvények:

$$f_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x).$$

($H_n(x)$ az n -edfokú Hermite-polinom, lásd a 32. példát és a (3.9.28) képletet.) Számolás adja, hogy $\mathcal{F}f_n = (-i)^n f_n$. Mivel a Hermite-féle függvények teljes ortogonális rendszert alkotnak $\{1, i, -1, -i\}$ a teljes spektrum. □

14. tétel: Legyen $A \in B(\mathcal{H})$ egy önadjungált operátor, és $M := \sup\{\langle x, Ax \rangle : \|x\| = 1\}$, $m := \inf\{\langle x, Ax \rangle : \|x\| = 1\}$. Ekkor $\sigma(A) \subset [m, M]$, $\{m, M\} \subset \sigma(A)$, továbbá A -nak nincsen reziduális spektruma.

Bizonyítás: Legyen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|[(\lambda + i\mu) - A]x\|^2 &= \|(A - \lambda)x\|^2 + \mu^2 \|x\|^2 + 2\mu \text{Re } i \langle (A - \lambda)x, x \rangle = \\ &= \|(A - \lambda)x\|^2 + \mu^2 \|x\|^2 \geq \\ &\geq \mu^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Ha $\mu \neq 0$, akkor a 6. lemma elegendő ahhoz, hogy a $\lambda + i\mu \notin \sigma(A)$, tehát $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Amennyiben $\lambda > M$, akkor bármilyen x egységvektorra a

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \langle (\lambda - A)x, x \rangle \geq \lambda - M$$

egyenlőtlenség érvényes. (Először a Schwarz-egyenlőtlenséget, másodszor pedig M értelmezését használtuk.) Ebből $\lambda \notin \sigma(A)$ ismét a 6. lemma alapján adódik. A $\lambda < m$ eset teljesen hasonló.

$M \in \sigma(A)$ igazolására tegyük fel indirekte, hogy $M - A$ invertálható. Mivel $M - A \geq 0$, ennek az operátornak van egy B négyzetgyöke (lásd a 8. tételt), $B^2 = M - A$, és ez is invertálható. Ha $\|x\| = 1$, akkor

$$1 = \|B^{-1}Bx\|^2 \leq \|B^{-1}\|^2 \|Bx\|^2 = \|B^{-1}\|^2 \langle B^2x, x \rangle = \|B^{-1}\|^2 \langle (M - A)x, x \rangle,$$

amiből

$$\langle x, Ax \rangle \leq M - \|B^{-1}\|^{-2}.$$

Ez ellentmondana M értelmezésének. Tehát $M \in \sigma(A)$ és $m \in \sigma(A)$ igazolása hasonló.

Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ olyan szám, hogy $\text{Rng } (\lambda - A)$ nem sűrű, akkor $\text{Rng } (\lambda - A)^\perp = \text{Ker } (\lambda - A) \neq \{0\}$, tehát λ a pont spektrumban van. □

3.11. Operátorok függvényei

Legyen A egy korlátos operátor és $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ egy polinom. Ekkor $\sum_{i=0}^n a_i A^i$ egy korlátos operátor, amire joggal használjuk a $p(A)$ jelölést. Rögzített A -ra a $p \mapsto p(A)$ megfeleltetés lineáris és multiplikatív. Célunk az, hogy a Weierstrass-féle approximációs tételt felhasználva egy tetszőleges folytonos f függvényre és $A = A^*$ operátorra értelmezzük az $f(A)$ operátort.

7. lemma: *Ha p egy polinom, és $A \in B(\mathcal{H})$, akkor $\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.*

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $\lambda \in \sigma(A)$. Mivel λ gyöke a $p(x) - p(\lambda)$ polinomnak, $p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x)$ egy alkalmas $q(x)$ polinomra. Ebből kapjuk, hogy $p(A) - p(\lambda) = (A - \lambda)q(A)$. Mivel $(A - \lambda)$ nem invertálható, $p(A) - p(\lambda)$ sem az, más szóval $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$. Így $p(\sigma(A)) \subset \sigma(p(A))$.

Amennyiben $\mu \in \sigma(p(A))$ és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a $p(x) - \mu$ polinom gyökei, akkor

$$p(A) - \mu = a(A - \lambda_1)(A - \lambda_2) \dots (A - \lambda_n).$$

A jobb oldal minden tényezője nem lehet invertálható, mert akkor a teljes szorzat is invertálható lenne, de $p(A) - \mu$ nem invertálható a feltevésünk szerint. Tehát $(A - \lambda_i)$ nem invertálható valamely $1 \leq i \leq n$ értékre. Ez azt jelenti, hogy $\lambda_i \in \sigma(A)$ és $p(\lambda_i) = \mu$. Beláttuk, hogy $\sigma(p(A)) \subset p(\sigma(A))$. $\square$

8. lemma: *Legyen $A = A^* \in B(\mathcal{H})$ és p egy polinom. Ekkor $\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$.*

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \|p(A)\|^2 &= \|p(A)^* p(A)\| = \|\overline{p} p(A)\| = \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\overline{p} p(A))\} = \\ &= \sup\{|\overline{p} p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = \\ &= (\sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\})^2. \end{aligned}$$

Itt az első sorban a norma C^* -tulajdonságát használtuk, ezután azt a tényt, hogy önadjungált operátor normája és spektrálsugara azonos, végül pedig a megelőző lemmát. $\square$

15. tétel: (Folytonos függvénykalkulus) *Legyen $A = A^* \in B(\mathcal{H})$. Ekkor létezik és egyértelműen meghatározott egy olyan $\Phi_A : C(\sigma(A)) \rightarrow B(\mathcal{H})$ lineáris leképezés, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:*

- (1) $\Phi_A(fg) = \Phi_A(f)\Phi_A(g)$,
- (2) $\Phi_A(\overline{f}) = \Phi_A(f)^*$,
- (3) $\Phi_A(1) = I$, $\Phi_A(\text{id}_{\sigma(A)}) = A$,
- (4) $\|\Phi_A(f)\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$,
- (5) Ha $f \geq 0$, akkor $\Phi_A(f) \geq 0$,
- (6) Ha $Ax = \lambda x$, akkor $\Phi_A(f)x = f(\lambda)x$,

$$(7) \sigma(\Phi_A(f)) = f(\sigma(A)).$$

Bizonyítás: A $C(\sigma(A))$ térben a polinomok sűrű halmazzá alkotnak a Weierstrass-féle approximációs tétel értelmében. Ha $p \in C(\sigma(A))$ egy polinom, akkor $\Phi_0(p)$ -t értelmezzük úgy, hogy $\Phi_0(p) = p(A)$. Az így értelmezett Φ_0 leképezés rendelkezik az (1–7) tulajdonságok mindegyikével. Ez jórészt triviális, de (4)-et és (7)-et az előző lemmák tartalmazzák. (4) azt jelenti, hogy Φ_0 izometria, azaz $\|\Phi_0(p)\| = \|p\|_\infty$, ahol $\|\cdot\|_\infty$ a $C(\sigma(A))$ térben vett sup normát jelöli. Mivel $B(\mathcal{H})$ teljes tér az operátornormára nézve, Φ_0 -nak létezik izometrikus lineáris kiterjesztése $C(\sigma(A))$ -ra, és ez lesz Φ_A . Végiggondolandó, hogy a kiterjesztés során a felsorolt tulajdonságok megmaradnak. $\square$

42. példa: Legyen $A = A^* \in B(\mathcal{H})$ egy önadjungált operátor, és tekintsük a

$$g(z) := \frac{z - i}{z + i}.$$

Ez folytonos az egész számegegyenesen, és a függvénykalkulus értelmezi a $g(A)$ operátort. A $g(z)g(\bar{z}) = 1$ relációból következik, hogy $g(A)$ unitér operátor. Az A operátor **Cayley-transzformáltjának** nevezik. $\square$

43. példa: Ha $A = A^* \in B(\mathcal{H})$ és $A \geq 0$, akkor $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$. A négyzetgyök függvény folytonos $\mathbb{R}^+$ -on, ezért a megelőző tétel értelmében létezik egy olyan $B \geq 0$ operátor, amire $B^2 = A$. Valóban, jelölje f az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvényt. Ekkor a $B = \Phi_A(f)$ operátor ilyen, amennyiben Φ_A -t a tétel szerint konstruáljuk A -hoz. Az $A^{1/2}$ operátort a négyzetgyök függvény Taylor-sorából kézzelfoghatóbb módon is előállíthatjuk.

Ismeretes, hogy

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n \quad (|x| < 1).$$

Ezért $0 < \varepsilon \cdot I \leq A \leq I$ esetén

$$\sqrt{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (A - I)^n,$$

ugyanis $\|A - I\| \leq 1 - \varepsilon$ és a sor normában konvergens. $\square$

Tetszőleges $X \in B(\mathcal{H})$ esetén $X^*X \geq 0$, és ezért beszélhetünk az $(X^*X)^{1/2}$ operátorról, amit $|X|$ -szel jelölünk. A jelölés nem akarja sugallni az $|XY| = |X| \cdot |Y|$ és $|X+Y| \leq |X| + |Y|$ tulajdonságokat. Ezek ugyanis nagyon ritkán teljesülnek.

44. példa: Legyen $A, B \in B(\mathcal{H})$ pozitív operátorok és $0 \leq t \leq 1$ egy valós szám. A^t és B^t értelmezve van. Megmutatjuk, hogy

$$\|A^t B^t\| \leq \|AB\|^t.$$

A $t = 0$ és $t = 1$ számokra ez nyilvánvaló. Legyen

$$J = \{t : 0 \leq t \leq 1 \text{ és } \|A^t B^t\| \leq \|AB\|^t\}.$$

J egy zárt halmaz, elég megmutatnunk, hogy $t, s \in J$ esetén $(s+t)/2 \in J$. Fel fogjuk használni a spektrálsugarat:

$$\begin{aligned} \|A^{(s+t)/2} B^{(s+t)/2}\|^2 &= \|B^{(s+t)/2} A^{s+t} B^{(s+t)/2}\| = r(B^{(s+t)/2} A^{s+t} B^{(s+t)/2}) \\ &= r(B^s A^{s+t} B^t) \leq \|B^s A^{s+t} B^t\| \\ &= \|B^s A^s\| \|A^t B^t\| = \|A^s B^s\| \|A^t B^t\| \end{aligned}$$

A $t, s \in J$ feltétel alapján

$$\|A^s B^s\| \|A^t B^t\| \leq \|AB\|^s \|AB\|^t$$

és ez megadja a $(s+t)/2 \in J$ állítást. $\square$

Eddig önadjungált operátorok függvénykalkulusával foglalkoztunk, most egy tetszőleges korlátos operátor függvényeit nézzük a komplex függvénytan módszerei segítségével. A komplex függvénytan fontos formulája

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

ahol a Γ egy sima zárt görbe pozitív irányítással a komplex téren, határa egy zárt G tartománynak, az x pont G belsejében van és az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény analitikus egy G -t tartalmazó nyílt halmazon. Az x pontot helyettesíthetjük egy $A \in B(\mathcal{H})$ operátorral, aminek spektruma G belsejében van:

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz \quad (3.11.33)$$

$z \in \Gamma$ nincs a spektrumban, tehát a $zI - A$ operátor invertálható. Az integrált értelmezhetjük úgy, hogy

$$\langle a, f(A)b \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \langle a, (zI - A)^{-1} b \rangle dz$$

minden $a, b \in \mathcal{H}$ vektorra.

45. példa: Tételezzük fel, hogy $f(A)$ a (3.11.33) képlettel van értelmezve. Kiszámolunk iránymenti deriváltakat.

Legyen $BA = AB$. Ekkor

$$\left. \frac{d}{dt} (zI - (A + tB))^{-1} \right|_{t=0} = (zI - A)^{-1} B (zI - A)^{-1}$$

alapján

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(A + tB) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (zI - A)^{-1} B (zI - A)^{-1} dz \\ &= \frac{B}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (zI - A)^{-2} dz = B f'(A) \end{aligned}$$

Most B helyett egy $[A, X] = AX - XA$ operátort veszünk a deriválás irányára. Ekkor a

$$(zI - A)^{-1} [A, X] (zI - A)^{-1} = [(zI - A)^{-1}, X]$$

formulára lesz szükségünk és

$$\left. \frac{d}{dt} f(A + t[A, X]) \right|_{t=0} = [f(A), X]. \quad (3.11.34)$$

Érdemes megjegyezni, hogy ha különböző irányokba tudjuk a deriváltat, akkor azok lineáris kombináció irányába is meg tudjuk adni. $\square$

3.12. Önadjungált operátorok

16. tétel: *Tetszőleges $X \in B(\mathcal{H})$ operátor előáll $X = V|X|$ alakban egy olyan V operátorral, amely $|X|$ képterén izometrikus.*

Bizonyítás: Legyen $V|X|y = Xy$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|V|X|y\|^2 &= \|Xy\|^2 = \langle X^*Xy, y \rangle = \langle (X^*X)^{1/2}y, (X^*X)^{1/2}y \rangle = \\ &= \||X|y\|^2, \end{aligned}$$

ami azt mutatja, hogy V izometrikus $|X|$ képterén. $\square$

A tételben szereplő $X = V|X|$ felbontást **poláris felbontásnak** nevezik. Ha $X = UH$ és $H \geq 0$, U izometrikus H képterén és 0 az erre merőleges altéren, akkor az UH felbontás egyértelmű, és a fent konstruált poláris előállítással azonos.

46. példa: Legyen $\mathcal{H}$ egy n -dimenziós Hilbert-tér és $A \in B(\mathcal{H})$ egy pozitív operátor $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ sajátértékekkel. Ha $x, y \in \mathcal{H}$ ortogonális vektorok, akkor

$$|\langle x, Ay \rangle|^2 \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \right)^2 \langle x, Ax \rangle \langle y, Ay \rangle,$$

amit Wielandt-egyenlőtlenségnek hívnak. Feltehető, hogy x és y egységvektorok, kiegészíthetők egy bázissá: $x, y, z_1, z_2, \dots, z_{n-2}$. Ha

$$M = \begin{bmatrix} \langle x, Ax \rangle & \langle x, Ay \rangle \\ \langle y, Ax \rangle & \langle y, Ay \rangle \end{bmatrix},$$

akkor A mátrixa

$$\begin{bmatrix} M & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$$

alakú lesz a fenti bázisban. Ez mutatja, hogy $M \geq 0$, és ekkor a determinánsa pozitív:

$$\langle x, Ax \rangle \langle y, Ay \rangle \geq |\langle x, Ay \rangle|^2.$$

Ha $\lambda_n = 0$, akkor készen vagyunk. A következő eset $\lambda_n > 0$.

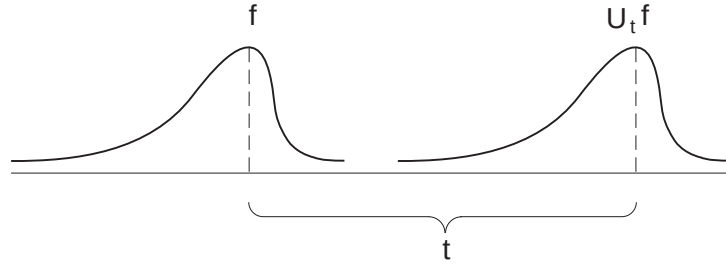
Ha α és β az M sajátértékei, akkor a 1. fejezet 27. példája azt mondja, hogy

$$|\langle x, Ay \rangle|^2 \leq \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \langle x, Ax \rangle \langle y, Ay \rangle.$$

Ezért a

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

egyenlőtlenséget kell meggondolni, ha $\alpha \geq \beta$. Ez teljesül, mert $\lambda_1 \geq \alpha \geq \beta \geq \lambda_n$. $\square$

A 32. példa T_t eltoláscsoportjának hatása

Legyen $(A_n) \subset B(\mathcal{H})$ korlátos operátorok sorozata és $A \in B(\mathcal{H})$. Azt mondjuk, hogy A_n tart pontonként A -hoz, ha $\|(A_n - A)x\| \rightarrow 0$ bármilyen $x \in \mathcal{H}$ vektorra. A **pontonkénti konvergencia** jelölése $A_n \xrightarrow{so} A$. Azt is mondjuk, hogy A_n **tart A -hoz az erős operátor topológiában**. (Valójában az utóbbit tükrözi a jelölésünk.)

47. példa: Legyen $\mathcal{H} = L^2(\mu)$ és (f_n) függvények olyan sorozata, hogy $|f_n(x)| \leq M$ minden $x \in X$ pontra és $n \in \mathbb{N}$ -re. Tételezzük fel, hogy $f_n(x) \rightarrow f(x)$ majdnem mindenütt. Ekkor $M_{f_n} \xrightarrow{so} M_f$ a megfelelő szorzásoperátorok sorozatára.

Legyen $g \in L^2(\mu)$. $\|(M_{f_n} - M_f)g\|^2 = \int |f_n(x) - f(x)|^2 |g(x)|^2 d\mu(x)$. Az integrandus pontonként 0-hoz tart, és a triviális

$$|f_n(x) - f(x)|^2 |g(x)|^2 \leq 4M^2 |g(x)|^2$$

becslés mutatja integrálható majoráló függvény létezését. A Lebesgue-tétel értelmében az integrál 0-hoz tart. $\square$

3.13. A spektráltétel

Véges dimenziós téren egy önadjungált operátor páronként ortogonális projekciók valós lineáris kombinációja. Az együtthatók a valós sajátértékek, és a projekciók a sajátalterekre való merőleges vetítések. E lineáris algebrából ismert ténynek az általánosítása a spektráltétel. A végtelen dimenziós esetben egy önadjungált operátor páronként ortogonális projekciók valós lineáris kombinációjával közelíthető. Pontosabban az operátor egy úgynevezett projektormérték szerinti integrálként áll elő, és az integrált közelítő „tégláösszegek” nem mások, mint a fent említett lineáris kombinációk.

Rendeljünk hozzá a valós számegyenes minden B Borel-halmazához egy $E(B) \in B(\mathcal{H})$ operátort. (A Borel-halmaz definíciója a Függelékben található meg, az intervallumok is Borel-halmazok, tehát E intervallumokon is értelmezve van.) Azt mondjuk, hogy $E : B \mapsto E(B)$ egy **pozitív operátor értékű mérték**, ha

- (1) $0 \leq E(B) \leq I$, $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{C}) = I$,
- (2) Ha (B_i) páronként diszjunkt Borel-halmazok sorozata és $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, akkor $E(B)x = \sum_{i=1}^{\infty} E(B_i)x$ minden x vektorra.

A (2) feltétel azt mondja, hogy a hozzárendelés additív az erős operátor topológiában.

48. példa: Legyen $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$. Ha $B \subset \mathbb{R}$ egy Borel-halmaz, akkor értelmezzük $E(B)$ -t úgy, mint a $B \cap [0, 1]$ halmaz karakterisztikus függvényével való szorzás operátora.

Igy egy olyan pozitív operátor értékű mértéket kapunk, amelyre $E(B)$ projekció bármilyen $B \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz esetében. A pozitív operátor értékű mérték tulajdonságai közül csak az additivitás nem nyilvánvaló. Legyen $B_i \subset [0, 1]$ páronként diszjunkt Borel-halmazok egy sorozata, és $B := \cup_{i=1}^{\infty} B_i$. $E(\cup_{i=1}^n B_i)$ az $\cup_{i=1}^n B_i$ halmaz f_n karakterisztikus függvényével való szorzás operátora. $f_n(x) \rightarrow \mathbb{1}_B(x)$ minden $t \in \mathbb{R}$ pontra. Ezért a 47. példa szerint $E(\cup_{i=1}^n B_i) \xrightarrow{so} E(B)$. $\square$

A továbbiakban olyan pozitív operátor értékű mértékek lesznek fontosak, amelyek értékei projekciók. Ebben az esetben projektor értékű mértékről vagy röviden **projektormértékről** beszélünk.

49. példa: Legyen $E : B \mapsto E(B)$ egy projektormérték a számegyenesen. Ha $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ diszjunkt halmazok, és az x vektor az $E(B_1)$ projekció képterében van, akkor $E(B_2)x = 0$.

Mivel E projektormérték, $F_1 := E(B_1), F_2 := E(B_2), F := E(B_1 \cup B_2)$ projekciók, és $F = F_1 + F_2$. Ezért

$$F^2 = F_1 + F_2 + F_1 F_2 + F_2 F_1 = F_1 + F_2 = F,$$

és $F_1 F_2 + F_2 F_1 = 0$ következik, azaz $F_1 F_2 = -F_2 F_1$. Szorozzuk ezt meg balról F_1 -gyel: $F_1 F_2 = -F_1 F_2 F_1$. A jobb oldal önadjungált lévén, $F_1 F_2$ is önadjungált, vagyis $F_1 F_2 = F_2 F_1$. A korábbiakkal összevetve azt kapjuk, hogy $F_2 F_1 = 0$. Ebből nyomban következik, amit állítottunk. $\square$

Legyen $E : B \mapsto E(B)$ egy projektormérték és $x \in \mathcal{H}$. Ekkor

$$\mu_x(B) = \langle x, E(B)x \rangle \quad (3.13.35)$$

egy közönséges mérték: Ha (B_i) páronként diszjunkt Borel-halmazok sorozata, és $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, akkor $E(B)x = \sum_{i=1}^{\infty} E(B_i)x$ az adott x vektorra. x -szel való belső szorzással

$$\langle x, E(B)x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, E(B_i)x \rangle,$$

ami pontosan μ_x additivitása.

A megfordítás is igaz, ha minden B Borel-halmazra adott egy $E(B) \in B(\mathcal{H})$ projekció úgy, hogy bármilyen $x \in \mathcal{H}$ vektorra (3.13.35) egy mértéket ad, akkor E egy projektormérték. Az E projektormérték és a $\{\mu_x : x \in \mathcal{H}\}$ mértékcsalád kapcsolatát használhatjuk fel arra, hogy kiépítsünk egy integrálméletet projektor mértékekre. Legyen f a valós számegyenes értelmezett korlátos mérhető függvény. Az

$$A = \int f(\lambda) dE(\lambda)$$

jelölést akkor fogjuk használni, ha bármilyen $x \in \mathcal{H}$ vektorra

$$\langle x, Ax \rangle = \int f(\lambda) d\mu_x(\lambda)$$

teljesül. μ_x definícióját beolvaszthatjuk az írásmódba, és röviden

$$\langle x, Ax \rangle = \int f(\lambda) d\langle x, E(\lambda)x \rangle(\lambda).$$

Érdemes megjegyezni, hogy ha $F \subset \mathbb{R}$ olyan zárt halmaz, hogy $E(\mathbb{R} \setminus F) = 0$ az E projektormértékre, akkor az $\int f(\lambda) dE(\lambda)$ integrál csak az f függvény F -en felvett értékeitől függ. Tehát elegendő, ha f az F halmazon van értelmezve.

50. példa: Legyen E a 48. példában szereplő projektormérték. Ekkor egy $f \in L^\infty(0, 1)$ függvényre

$$\int f(\lambda) dE(\lambda) = M_f.$$

Legyen $g \in L^2(0, 1)$. A μ_g mérték definíciója szerint

$$\mu_g(B) = \langle g, E(B)g \rangle = \langle g, \chi_B g \rangle = \int_B |g(t)|^2 dt.$$

Így μ_g abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, és

$$\int h(t) d\mu_g(t) = \int h(t) |g(t)|^2 dt.$$

Ezért

$$\int f(\lambda) d\langle g, E(\cdot)g \rangle(\lambda) = \int f(\lambda) |g(\lambda)|^2 dt = \langle g, M_f g \rangle. \quad \square$$

17. tétel: (Spektráltétel). Legyen $A = A^* \in B(\mathcal{H})$. Ekkor létezik egy olyan E projektormérték, amire $E(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$, és

$$f(A) = \int f(\lambda) dE(\lambda) \quad (f \in C(\sigma(A))).$$

A tételt nem bizonyítjuk a szigorú értelemben véve, de körvonalazzuk a bizonyítás vázát. Az A operátor folytonos függvénykalkulusából indulunk ki, lásd 15. tétel.

Legyen $\phi_A : C(\sigma(A)) \rightarrow B(\mathcal{H})$ az a leképezés, amelyre $\phi_A(f) = f(A)$. Ha $x \in \mathcal{H}$, akkor

$$\varphi_x : f \mapsto \langle x, \phi_A(f)x \rangle$$

egy lineáris funkcionál $C(\sigma(A))$, amelynek lényeges tulajdonságai

- (1) $\varphi_x(1) = \|x\|^2$,
- (2) Ha $f \geq 0$, akkor $\varphi_x(f) \geq 0$,
- (3) $|\varphi_x(f)| \leq \|f\|_\infty$.

Ezek a tulajdonságok következnek rendre a $\phi_A(1) = I$, $\phi_A(\bar{g}g) \geq 0$, $\|\phi_A(f)\| = \|f\|_\infty$ tulajdonságaiból a függvénykalkulusnak. A Riesz–Radon reprezentációs tétel szerint létezik egy μ_x mérték $\sigma(A)$ Borel-halmazain, amire

$$\varphi_x(f) = \int f(\lambda) d\mu_x(\lambda),$$

azaz

$$\langle x, f(A)x \rangle = \int f(\lambda) d\mu_x(\lambda).$$

Ez már hasonlít arra, amit bizonyítanunk kellene, de még igazolni kell, hogy van egy olyan $E(\cdot)$ projektormérték, amire

$$\langle x, E(\cdot)x \rangle = \mu_x$$

teljesül. Be kell látni, hogy rögzített $H \subset \sigma(A)$ -ra van egy olyan $B(x, y)$ korlátos forma, amelyre

$$B(x, x) = \mu_x(H). \quad (3.13.36)$$

Ezt a képletet használhatjuk $B(x, x)$ definíciójául, és a polarizációs azonosság segítségével értelmezzük $B(x, y)$ -t, azaz

$$B(x, y) := \frac{1}{4}(\mu_{x+y}(H) - \mu_{x-y}(H) - i\mu_{x+iy}(H) + i\mu_{x-iy}(H)). \quad (3.13.37)$$

(Számolással lehet ellenőrizni, hogy az (3.13.36) és (3.13.37) egyenletek összhangban vannak.) A kapott forma korlátossága nyilvánvaló $B(x, x) \leq \|x\|^2 = \mu_x(H) \leq \|x\|^2$ miatt. Az $E(H)$ operátor így adódik. Az operátor értékű mérték σ -additivitása egyenes következménye μ_x -ek σ -additivitásának. Egy kis nehézség annak igazolásában van, hogy $E(H)$ egy projekció.

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy H egy nyílt intervallum karakterisztikus függvénye. Ekkor van egy olyan $0 \leq f_n$ függvényt sorozat, amely pontonként növekvően tart $\mathbb{1}_H$ -hoz. Ekkor $f_n(A) \leq f_{n+1}(A) \leq \mathbb{1}_H(A) = E(H)$.

$$\langle x, f_n(A)x \rangle = \int f_n(t) d\mu_x(t) \rightarrow \int \mathbb{1}_H(t) d\mu_x(t) = \langle x, E(H)x \rangle$$

a monoton konvergencia tétel alapján. A 47. példa azt mondja, hogy ekkor $f_n(A) \xrightarrow{so} E(H)$. Ugyanez a gondolatmenet megismételhető az f_n^2 függvényt sorozattal, tehát $f_n^2(A) \xrightarrow{so} E(H)$. Egyrészt $f_n^2(A) = [f_n(A)]^2$ a függvénykalkulus multiplikatív tulajdonsága miatt, másrészt korlátos halmazon az operátorok szorzása folytonos az erős operátor topológiában, vagyis $f_n(A) \xrightarrow{so} E(H)$ alapján $f_n(A)^2 \xrightarrow{so} E(H)^2$. Ebből arra következtethetünk, hogy $E(H) = E(H)^2$, vagyis $E(H)$ valóban projekció. $\square$

51. példa: Véges dimenzióban a spektráltételben szereplő integrál egy véges összegre egyszerűsödik. Legyen A egy önadjungált $n \times n$ -es mátrix. Ennek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértékei valósak. (Feltételezzük, hogy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ mind különböző számok.) Legyen E_k a λ_k sajátértékhez tartozó sajátvektorok által feszített altérre vetítő projekció. Ekkor

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_k$$

az A spektrális felbontása. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz spektrálmértéke $\sum E_i$ alakú, ahol az összegzés azokra az i indexekre történik, amelyekre $\lambda_i \in H$. Ezentúlmenően

$$f(A) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) E_k$$

egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre.

Adunk egy konkrét példát.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

egy pozitív önadjungált operátor, ami két projekcióval adható meg:

$$A = 4 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

A mérték a 2 és 4 pontban van:

$$2 \mapsto \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad 4 \mapsto \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A végtelen dimenzió sokkal komplikáltabb lehet. $\square$

Egy önadjungált operátor spektrális felbontásának meghatározása általában nem könnyű feladat. A következő példában megkapjuk a spektrális felbontást, de a hozzá vezető utat más operátorra átvinni csak bizonyos esetekben lehet.

52. példa: Legyen $(b_n) \subset \mathbb{R}$ egy valós számsorozat. Értelmezzünk a $\delta_i \mapsto b_{i+1}\delta_{i+1}$ képlettel egy T lineáris operátort $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ -on. Ha (b_n) korlátos sorozat, akkor T korlátos operátor és $T + T^*$ önadjungált. Szeretnénk meghatározni $T + T^*$ spektrális előállítását.

A kanonikus bázisban $T + T^*$ mátrixa tridiagonális:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & & \\ & b_2 & 0 & b_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.13.38)$$

Legyen A_n a végtelen mátrix $n \times n$ -es bal felső sarka. Ha $p_n(x) = \text{Det}(x - A_n)$ az A_n mátrix karakterisztikus polinomja, akkor ez a polinomsorozat a

$$p_{-1}(x) \equiv 0, \quad p_0(x) = 1, \quad p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \lambda_n p_{n-1}(x)$$

rekurziónak tesz eleget, ahol $\lambda_n = b_n^2$. Létezik egy olyan μ mérték $\mathbb{R}$ -en, amelyre a $p_n(x)$ polinomok ortogonálisak, és

$$\langle \delta_u, (T + T^*)^k \delta_v \rangle = \int x^k \tilde{p}_u(x) \tilde{p}_v(x) dx.$$

(Ezt az állítást egyáltalán nem indokoljuk.) $\tilde{p}_n(x)$ jelöli a normált n -edik ortogonális polinomot, tehát $\tilde{p}_n(x) = p_n(x)/\|p_n(x)\|$. $U : \delta_n \mapsto \tilde{p}_n$ egy $\ell^2(\mathbb{Z}^+) \rightarrow L^2(\mu)$ unitér operátor, hiszen bázist bázisba visz.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}_u, U(T + T^*)U^* \tilde{p}_v \rangle &= \langle \delta_u, (T + T^*) \delta_v \rangle = \int x \tilde{p}_u(x) \tilde{p}_v(x) dx = \\ &= \langle \tilde{p}_u, M \tilde{p}_v \rangle, \end{aligned}$$

ha M az x változóval való szorzás operátora $L^2(\mu)$ -ben. $U(T+T^*)U^* = M$, a $T+T^*$ és az M operátorok **unitér ekvivalensek**. Mivel M spektrálmértékét jól ismerjük, segítségével megadható $T+T^*$ spektrális előállítás:

$$T+T^* = \int \lambda dU E(\cdot) U^*(\lambda),$$

ahol $E(H)$ a H halmaz $\mathbb{1}_H$ karakterisztikus függvényeivel való szorzás $L^2(\mu)$ -n.

Az $1 = b_1 = b_2 = \dots$ esetben

$$d\mu(t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2} dt,$$

azaz μ az ún. **Wigner-mérték** vagy **félköreloszlás**, a megfelelő ortogonális polinomok bizonyos **Jacobi-féle polinomok**.

A Hermite-polinomok a

$$H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

rekurziónak tesznek eleget. Ha úgy normáljuk őket, hogy a főegyütthatójuk 1 legyen, akkor a

$$h_{n+1}(x) = xh_n(x) - \frac{n}{2}h_{n-1}(x) \quad (3.13.39)$$

rekurzióhoz jutunk. Ez a $b_n = \sqrt{n/2}$ esetnek felel meg, ilyenkor $T+T^*$ mátrixa

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.13.40)$$

Ez a mátrix volt Heisenberg mátrixmechanikájának egyik építőköve. Az $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ téren egy nem korlátos operátort ad meg, amely unitér ekvivalens a $d\mu(t) = e^{-t^2} dt$ mérték feletti L^2 -téren a változóval való szorzással. $\square$

Legyen $T \in B(\mathcal{H})$ egy operátor és $x \in \mathcal{H}$ egy vektor. Azt mondjuk, hogy x **ciklikus vektora** a T operátornak, ha

$$\{p(T)x : p \text{ egy polinom}\}$$

sűrű $\mathcal{H}$ -ban.

A következő tétel azt mondja, hogy ciklikus vektorral rendelkező önadjungált operátor lényegében **szorzásoperátor** valamely L^2 téren. Ez a tény a spektráltétel következménye.

18. tétel: Legyen $A = A^* \in B(\mathcal{H})$ egy olyan operátor, amelynek létezik ciklikus vektora. Ekkor létezik egy μ valószínűségi mérték az A operátor $\sigma(A)$ spektrumán és egy $U : L^2(\mu) \rightarrow \mathcal{H}$ unitér operátor, hogy

$$A = U M U^*,$$

ahol M a változóval való szorzás operátora $L^2(\mu)$ -n.

Bizonyítás: Legyen $x \in \mathcal{H}$ a ciklikus vektor, feltehető, hogy $\|x\| = 1$. Induljunk ki A spektrális előállításából:

$$A = \int \lambda dE(\lambda)$$

egy alkalmas projektormértékkel, és legyen $\mu(\cdot) := \langle x, E(\cdot)x \rangle$, ami egy valószínűségi mérték. Az U operátort értelmezzük az

$$f \mapsto f(A)x$$

képlettel folytonos f függvényekre, majd izometrikus tulajdonsága alapján terjesszük ki az egész $L^2(\mu)$ -re. Mivel U képtere sűrű, unitérnek kell lennie.

Az $A = U M U^*$ reláció, pontosabban $AU = U M$, igazolása:

$$\begin{aligned} \langle f(A)x, AUg \rangle &= \langle x, \overline{f}(A)Ag(A)x \rangle = \int \overline{f}(\lambda)\lambda g(\lambda) d\mu(x) = \langle f, Mg \rangle = \\ &= \langle Uf, U M g \rangle = \langle f(A)x, U M g \rangle. \end{aligned}$$

(f és g folytonos függvények.) □

53. példa: Legyen $A = A^* \in B(\mathcal{H})$ és $\mathcal{H}$ véges dimenziós. Ekkor A -t egy önadjungált mátrixnak tekinthetjük. A -nak pontosan akkor van ciklikus vektora, ha minden sajátértéke egy multiplicitású.

Legyen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ A sajátértéklistája és $e_1, \dots, e_n$ a megfelelő sajátvektorok, amelyek bázist alkotnak. Ha $\lambda_1 = \lambda_2$, akkor a $x = \sum c_i e_i$ vektor nem lehet ciklikus, hiszen $p(A)x = \sum p(\lambda_i)c_i e_i$ nem lehet sűrű, mert az első két koordináta aránya p -től független.

Másrészt, ha λ_i -k egymástól különbözőek, akkor $x = \sum e_i$ ciklikus vektor. Az y vektor $p(A)x$ formában való közelítéséhez elég olyan p polinomot találunk, hogy $|p(\lambda_i) - y_i| < \varepsilon$. Ez lehetséges a Weierstrass-féle approximációs tétel miatt. Ha g egy olyan kompakt tartójú folytonos függvény, amelyre $g(\lambda_i) = y_i$, akkor g olyan p közelítése megteszi, amelyre $|g(t) - p(t)| < \varepsilon$ egy λ_i -ket tartalmazó intervallumon. □

Ha A és B felcserélhető önadjungált mátrixok, akkor van olyan bázisa a véges dimenziós térnek, amelyben mindkettő diagonális. Ennek az egyszerű ténynek a korlátos önadjungált operátorok körében a következő általánosítása igaz.

19. tétel: Ha A és B felcserélhető korlátos önadjungált operátorok, akkor létezik olyan E projektor értékű mérték a számegyenesen, hogy

$$A = \int f(\lambda) dE(\lambda) \quad \text{és} \quad B = \int g(\lambda) dE(\lambda)$$

alkalmas f és g függvényekre. □

Miután minden projektormérték egy önadjungált operátor spektrálmértéke, úgy is fogalmazhatunk, hogy felcserélhető operátorok egy velük felcserélhető harmadik operátor függvényei.

20. tétel: Legyen $A \in B(\mathcal{H})$ egy önadjungált operátor. $t \in \sigma(A)$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik egységvektoroknak olyan $x_n \in \mathcal{H}$ sorozata, hogy $\|Ax_n - tx_n\| \rightarrow 0$.

Bizonyítás: Legyen $E(\cdot)$ az A -hoz tartozó projektormérték és

$$E_n = E(t - 1/n, t + 1/n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

spektrális projekciók egy sorozata. Ha $t \in \sigma(T)$, akkor $E_n \neq 0$ és választhatunk olyan x_n vektort, amelyre $E_n x_n = x_n$ és $\|x_n\| = 1$. Ekkor

$$\|Ax_n - tx_n\|^2 = \int_{t-1/n}^{t+1/n} (\lambda - t)^2 d\langle x_n, E(\lambda)x_n \rangle \leq \frac{1}{n^2}.$$

A megfordítás ennél még egyszerűbb, ha létezik olyan x_n sorozat, amelyre $\|x_n\| = 1$ és $(T - t)x_n \rightarrow 0$, akkor a $T - t$ operátornak nem létezhet inverze, tehát $t \in \sigma(T)$. $\square$

A tétel szerint egy önadjungált operátor spektruma **approximatív sajátértékekből** áll. $t \in \mathbb{R}$ -et approximatív sajátértéknek nevezhetjük, ha van egységvektoroknak egy x_n sorozata, amelyre $(Ax_n - tx_n) \rightarrow 0$. Ha t sajátérték, akkor x_n -et n -től függetlennek választhatjuk.

3.14. Kompakt operátorok

Ha $T \in B(\mathcal{H})$ egy korlátos operátor, akkor T folytonos a gyenge topológiára, azaz $x_n \xrightarrow{w} x$ alapján $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$ következik. Valóban,

$$\langle T(x - x_n), y \rangle = \langle x - x_n, T^*y \rangle \rightarrow 0.$$

A $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy L lineáris operátorát **kompaktnak** (vagy **teljesen folytonosnak**) nevezzük, ha $x_n \xrightarrow{w} x$ esetén $Lx_n \rightarrow Lx$. Minden kompakt operátor folytonos, és ezért korlátos. $K(\mathcal{H})$ jelöli $\mathcal{H}$ kompakt operátorainak halmazát.

21. tétel: Ha $T \in B(\mathcal{H})$ és $K \in K(\mathcal{H})$, akkor $TK, KT, K^* \in K(\mathcal{H})$. Továbbá $K(\mathcal{H})$ a $B(\mathcal{H})$ tér zárt lineáris altere a norma topológiára nézve.

Bizonyítás: A tétel KT -re és TK -ra vonatkozó része közvetlenül következik a definícióból. Megmutatjuk, hogy T^* kompakt (amennyiben T is az).

$$\|T^*x_n - T^*x\|^2 \leq \|x_n - x\| \|TT^*(x_n - x)\|.$$

Ha $x_n \xrightarrow{w} x$, akkor $\|x_n - x\|$ korlátos, és $\|TT^*(x_n - x)\| \rightarrow 0$, hiszen a tétel előző része szerint TT^* kompakt operátor. Így $T^*x_n \rightarrow T^*x$ és T^* valóban kompakt.

Legyen $K_n \in K(\mathcal{H})$ és $\|L - K_n\| \rightarrow 0$ valamely $L \in B(\mathcal{H})$ operátorra. $L \in K(\mathcal{H})$ belátásához vegyünk egy olyan $(x_n) \subset \mathcal{H}$ sorozatot, hogy $x_n \xrightarrow{w} x$. Ekkor

$$\|L(x - x_n)\| \leq \|L - K_m\| \|x - x_n\| + \|K_m(x - x_n)\|.$$

Az $\|x_n\|$ sorozat korlátos, ezért van olyan C szám, amelyre $\|x - x_n\| \leq C$. Ha a jobb oldalt kicsinek akarjuk, akkor először m -et választjuk olyan nagynak, hogy az első tag kicsi legyen, majd az adott m -re az n indexet választjuk olyan nagynak, hogy a második tag kicsi legyen. Így jutunk arra a következtetésre, hogy $Lx_n \rightarrow Lx$, tehát $L \in K(\mathcal{H})$. $\square$

Az előző tételt úgy is lehetne fogalmazni, hogy $K(\mathcal{H})$ zárt $*$ -ideál $B(\mathcal{H})$ -ban.

Legyen $\mathcal{H}$ végtelen dimenziós. Ekkor az identitás operátor nem lehet kompakt. Ha T egy kompakt operátor $\mathcal{H}$ -n, akkor $0 \in \sigma(T)$. Ha ugyanis lenne olyan korlátos X operátor, amelyre $XT = I$, akkor az előző tétel szerint I -nek kompaktnak kellene lenni.

Egy véges dimenziós Hilbert-térben a gyenge konvergencia egybeesik a normából származó konvergenciával. Ezért minden olyan operátor, amelynek képtere véges dimenziós, az kompakt. Az ilyen operátorokat **véges rangúnak** is nevezzük.

22. tétel: $T \in B(\mathcal{H})$ akkor és csak akkor kompakt, ha létezik véges rangú operátoroknak olyan T_n sorozata, hogy $\|T - T_n\| \rightarrow 0$.

A bizonyítást arra az esetre vázoljuk, amikor létezik a Hilbert-térnek egy megszámlálható (e_n) bázisa. Legyen P_n az $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorok által feszített altérre vetítő projekció. TP_n véges rangú, ezért kompakt. Megmutatjuk, hogy $\|TP_n - T\| \rightarrow 0$. Ha nem így lenne, akkor létezne egységvektoroknak egy olyan x_m sorozata, hogy $P_{n(m)}x_m = 0$ és $\|(TP_{n(m)} - T)x_m\| \geq \varepsilon$ valamilyen $\varepsilon > 0$ számra és egy $n(m)$ növvő sorozatra. A $P_{n(m)}x_m = 0$ feltétel biztosítja, hogy $x_m \xrightarrow{w} 0$. Ugyanakkor $\|(TP_{n(m)} - T)x_m\| = \|Tx_m\| \geq \varepsilon$, ami ellentmond T kompaktságának. $\square$

A következő példa egy gyakran előforduló kompakt operátort, a **Hilbert–Schmidt-féle integráloperátort** mutatja be.

54. példa: Legyen $K(x, y) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ és

$$(T_K f)(x) = \int K(x, y) f(y) dy.$$

Feltehető, hogy $f \in L^2([0, 1])$ egységnyi hosszúságú, és $f_1, f_2, \dots$ egy bázis. Ekkor

$$K(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} f_i(x) f_j(y)$$

az úgynevezett **magfüggvénynek** a sorfejtése. Ekkor

$$T_K f_k(x) = \int \sum_{i,j} c_{ij} f_i(x) f_j(y) f_k(y) dy = \sum_i c_{ik} f_i(x),$$

és

$$\|T_K f_k\|^2 = \sum_i |c_{ik}|^2.$$

Ebből egyrészt látszik, hogy

$$\|T_K f_k\|^2 \leq \sum_{ij} |c_{ij}|^2 = \|K(x, y)\|^2,$$

másrészt

$$\sum_k \langle f_k, T_K^* T_K f_k \rangle = \sum_k \|T_K f_k\|^2 = \|K(x, y)\|^2 \quad (3.14.41)$$

az adott bázistól független mennyiség, a $T_K^* T_K$ operátor **nyoma**.

A T_K operátorról láttuk, hogy korlátos, és a (3.14.41) alapján a következő lemmából adódik, hogy T_K kompakt is. $\square$

9. lemma: Legyen (e_n) egy bázis a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben és $T \in B(\mathcal{H})$. Ekkor $\sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \|T^*e_n\|^2$. Ha $\sum_n \|Te_n\|^2 < +\infty$, akkor T kompakt.

Bizonyítás: Egy egyszerű számolás:

$$\begin{aligned} \sum_n \|Te_n\|^2 &= \sum_{n,k} |\langle e_k, Te_n \rangle|^2 = \sum_{n,k} \langle T^*e_k, e_n \rangle = \\ &= \sum_{n,k} |\langle e_n, T^*e_k \rangle|^2 = \sum_k \|T^*e_k\|^2. \end{aligned}$$

Ez éppen az igazolandó állítás.

Legyen P_n az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisvektorok által kifeszített altérre való projekció. A $P_n T$ operátor véges rangú és

$$\|(T - P_n T)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\langle e_j, Tx \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \|T^*e_j\|^2.$$

Ez azt mutatja, hogy $P_n T \rightarrow T$ normában, hiszen $\sum_n \|T^*e_n\|^2 < +\infty$. Mivel kompakt operátorok normában vett határértéke kompakt, adódik, hogy T kompakt. $\square$

A kompakt operátorok spektruma meglehetősen egyszerű szerkezetű.

23. tétel: (Riesz–Schauder) Legyen K egy kompakt operátor. Ha $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$, akkor λ véges multiplicitású sajátérték és a sajátértékeknek legfeljebb a 0 lehet torlódási pontja. $\square$

Ha a Hilbert-tér végtelen dimenziós, és egy kompakt operátornak végtelen sok sajátértéke van, akkor a 0 mindenképpen a spektrumhoz tartozik, de nem feltétlenül sajátérték.

55. példa: Legyen A önadjungált kompakt operátor egy végtelen dimenziós térben, és tételezzük fel, hogy a 0 nem sajátértéke. Ekkor A -nak végtelen sok sajátértéke van, ezek $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Mindegyik sajátérték véges multiplicitású, azaz a hozzá tartozó E_n sajátprojekció véges rangú. A spektruma $\{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, amiből $\{0\}$ a folytonos spektrum. Az operátor spektrálfelbontása

$$A = \sum_n \lambda_n E_n.$$

Jelen esetben tehát az integrál összegre egyszerűsödik. $\square$

56. példa: Legyen G egy kompakt topologikus csoport és $\pi : G \rightarrow B(\mathcal{H})$ egy erősen folytonos reprezentáció egy $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Tételezzük fel, hogy létezik egy olyan $x \in \mathcal{H}$ vektor, hogy $\|x\| = 1$ és a $\{\pi(g)x : g \in G\}$ halmaz teljes $\mathcal{H}$ -ban. (Ilyenkor x -et **ciklikusnak** mondjuk.) A Dirac-féle jelölésmódban

$$|\pi(g)x\rangle \langle \pi(g)x|$$

jelenti a $\pi(g)x$ vektorra való projekció operátorát.

Megmutatjuk, hogy a

$$T = \int |\pi(g)x\rangle \langle \pi(g)x| d\mu(g)$$

integrállal értelmezett ún. Weyl-féle operátor kompakt. Az integrált a wo -topológiában, azaz a belső szorzaton keresztül értjük:

$$\langle y, Tw \rangle = \int \langle y, |\pi(g)x \rangle \langle \pi(g)x | w \rangle d\mu(g)$$

minden y és w vektorára a Hilbert-térnek. μ G csoport Haar-mértékét jelöli.

Mivel T projekció operátorok integrálja, maga is egy nemnegatív önadjungált operátor.

Legyen (e_n) egy bázis $\mathcal{H}$ -ban

$$\|Te_n\|^2 = \langle Te_n, Te_n \rangle = \iint \overline{\langle \pi(g)x, e_n \rangle} \langle \pi(h)x, e_n \rangle \langle \pi(g)x, \pi(h)x \rangle d\mu(h) d\mu(g).$$

Így

$$\begin{aligned} \sum_n \|Te_n\|^2 &= \iint \sum_n \overline{\langle \pi(g)x, e_n \rangle} \langle \pi(h)x, e_n \rangle \langle \pi(g)x, \pi(h)x \rangle d\mu(g) d\mu(h) = \\ &= \iint |\langle \pi(g)x, \pi(h)x \rangle|^2 d\mu(g) d\mu(h). \end{aligned}$$

Az integrandus egy folytonos függvény, ami integrálható, tehát $\sum_n \|Te_n\|^2 < +\infty$. Ebből a tulajdonságból következik, hogy T kompakt a 9. lemma alapján. $\square$

A fenti Weyl-féle operátor kompaktságának fontos következménye van. A Haar-mérték invarianciájából adódik, hogy $\pi(h)T\pi(h)^* = T$ a csoport minden h elemére, azaz T felcserélhető a $\pi(h)$ unitérekkel. Ha $\mathcal{H}_\lambda$ a T operátor λ sajátértékéhez tartozó sajátaltér, akkor $\pi(h)$ ezt önmagába viszi. A Riesz–Schauder-tételből adódóan az eredeti $\mathcal{H}$ Hilbert-tér véges dimenziós invaráns $\mathcal{H}_\lambda$ alterekre bomlik. Így egy kompakt csoport folytonos ciklikus ábrázolása véges dimenziós ábrázolások összegére bomlik. Mivel bármely ábrázolás ciklikusak összege, tetszőleges folytonos ábrázolás véges dimenziósakra bontható. Nevezetesen, a felbonthatatlan, azaz **irreducibilis** ábrázolások véges dimenziósak.

Legyen A egy kompakt operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor $|A|$ is kompakt, és spektruma a λ_i sajátértékekből áll. Feltehető, hogy $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$. Ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^p < \infty,$$

akkor az $A \in L^p(\mathcal{H})$ jelölést használjuk. Ha $1 \leq p < \infty$, akkor $L^p(\mathcal{H})$ Banach-tér az

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^p \right)^{1/p} \quad (3.14.42)$$

normára nézve. A szóba jövő p értékek közül $p = 1$ talán a leglényegesebb. Az $L^1(\mathcal{H})$ osztályba tartozó kompakt operátorokat **nyomoperátornak** nevezzük. Legyen ξ_i a Hilbert-tér bázisa. Ekkor az

$$\text{Tr} : A \mapsto \sum_i \langle \xi_i, A\xi_i \rangle \quad (3.14.43)$$

lineáris funkcionál a bázis választásától független, az A operátor **nyomának** nevezzük. Megjegyezzük, hogy $L^2(\mathcal{H})$ nem más, mint a Hilbert–Schmidt-féle integráloperátorok

osztálya. Ezt úgy értjük, hogy az $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy L^2 -térként fogható fel, és a $K \in L^2(\mathcal{H})$ operátor egy négyzetesen integrálható $f(x, y)$ magfüggvénnyel adható meg. A fentiekből (lásd 54. példa) látszik, hogy

$$\mathrm{Tr}(K^*K) = \iint |f(x, y)|^2 dx dy. \quad (3.14.44)$$

A jelölés is azt akarja sugallni, hogy az $L^p(\mathcal{H})$ tereknek köze van a mértéktér feletti L^p terekhez, azoknak egyfajta általánosítása. Ha $1 \leq p < \infty$, akkor $L^p(\mathcal{H})$ Banach-tér, duális $L^q(\mathcal{H})$, érvényben marad a Hölder-egyenlőtlenség, és így tovább.

Azt szokták mondani, hogy t az $A = A^*$ operátor **lényeges spektrumához** tartozik, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra a $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ intervallumhoz tartozó spektrális projekció végtelen dimenziós, azaz végtelen dimenziós altérre vetít. A 20. Tétel bizonyításának gondolatmenetével adódik, hogy t pontosan akkor tartozik A lényeges spektrumához, ha létezik olyan ortonormált x_n sorozat, amelyre $Ax_n - tx_n \rightarrow 0$. A lényeges spektrumára a $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ jelölést használjuk. A lényeges spektrum nem változik kompakt perturbáció hatására.

24. tétel: (Weyl-tétel) Legyen $A = A^*, K = K^* \in B(\mathcal{H})$ két önadjungált operátor, és tételezzük fel, hogy K kompakt. Ekkor A és $A + K$ lényeges spektruma azonos.

Bizonyítás: Elég belátni, hogy $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(A + K)$. Ha $t \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, akkor van olyan ortonormált x_n sorozat, amelyre $Ax_n - tx_n \rightarrow 0$. Mivel $x_n \xrightarrow{w} 0$, $Kx_n \rightarrow 0$, és $(A + K)x_n - tx_n \rightarrow 0$. Következésképpen $t \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A + K)$. $\square$

3.15. Gyakorlófeladatok

- 1.^M Igaz-e, hogy az $L^2(\mathbb{T})$ Hilbert-térben bázist alkotnak az $1, z, z^2, \dots$ függvények?
- 2.^M Legyen $\mathcal{H}$ egy Hilbert-tér. Igazolja, hogy a következő két állítás ekvivalens: 1. Van $\mathcal{H}$ -ban megszámlálható sűrű halmaz. 2. Létezik $\mathcal{H}$ -nak megszámlálható bázisa.
3. Igazolja, hogy nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer lineárisan független.
4. A **Rademacher-függvényeket** a

$$R_m(x) := \mathrm{sgn}(\sin 2^m \pi x) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in [0, 1])$$

képlet értelmezi. Igazolja, hogy ezek a függvények ortogonális rendszert alkotnak $L^2(0, 1)$ -ben. Teljes-e ez a rendszer?

- 5.^M Mutassa meg, hogy az $L^2([-\pi, \pi])$ Hilbert-térben az

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sorozat ortonormált. Igaz-e, hogy ez egy bázisa a térnek?

6. Jelölje $C^1([a, b])$ az $[a, b]$ intervallumon értelmezett komplex értékű folytonosan differenciálható függvények terét. $f, g \in C^1([a, b])$ esetén legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f'(x)} g'(x) dx.$$

a. Igaz-e, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ belső szorzat? **b.** Legyen $F = \{f \in C^1([a, b]) : f(a) = 0\}$. Igaz-e, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ belső szorzat az F téren?

7. Igazolja, hogy egy Hilbert-térben $\|x - y\| + \|y - z\| = \|x - z\|$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan $0 \leq \alpha \leq 1$ szám, amelyre $y = \alpha x + (1 - \alpha)z$.

8.^M Igazolja, hogy Hilbert-térben $\|x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle| : \|y\| \leq 1\}$.

9.^M Mi az $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert-térben a páros függvények halmazának ortogonális kiegészítője?

10. Mi az $L^2([-\pi, \pi])$ Hilbert-térben a páratlan fokszámú polinomok halmazának ortogonális kiegészítője?

11.^M Igazolja, hogy az $L^2([0, \pi])$ Hilbert-térben

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 3x, \quad \dots$$

teljes ortonormált rendszer.

12. Legyen H egy lineáris altér valamely $\mathcal{H}$ Hilbert-térben $\overline{H}$ lezárással. Igazolja, hogy $H^\perp = \overline{H}^\perp$. Általánosítható az állítás?

13. Igazolja, hogy $L^2(\mathbb{R}^+)$ -ban sűrűn vannak a $\sum_{n=1}^N a_n e^{-nx}$ alakú függvények.

14. Bizonyítsa be, hogy az $L^2[0, 1]$ Hilbert-térben sűrűn vannak az olyan $p(x)$ polinomok, amelyekre $p(1/2) = 0$.

15. Legyen $\mu(H) = \int_{-1}^1 1_H(x) \sqrt{1-x^2} dx$ egy mérték $[-1, 1]$ -en. Igaz-e, hogy a polinomok sűrűn vannak $L^2(\mu)$ -ben?

16.^M Megadható-e a $C([0, 1])$ téren olyan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ belső szorzás, hogy

$$\langle f, f \rangle = \sup\{|f(x)|^2 : 0 \leq x \leq 1\}?$$

17.* Legyen $\mathcal{H}$ azoknak a $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ halmazon analitikus függvényeknek az összessége, amelyre

$$\iint |f(x + iy)|^2 dx dy < +\infty.$$

Igazoljuk, hogy ez Hilbert-tér az

$$\langle f, g \rangle = \iint \overline{f(x + iy)} g(x + iy) dx dy$$

belső szorzással, és

$$\phi_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} z^{n-1}$$

bázis $(n = 1, 2, \dots)$.

18. Mutassa meg, hogy a $n \times n$ komplex mátrixok terén $\langle A, B \rangle = \text{Tr } A^* B$ belső szorzatot értelmez. Legyen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Igaz-e, hogy a 2×2 esetben $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ortogonális rendszer? Esetleg bázis? ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ az úgynevezett Pauli-mátrixok.)

19. Tekintse a 3×3 -as mátrixok terét az előző feladat belső szorzatával, és adjon meg egy bázist.
20. Mutassa meg, hogy ha A és B invertálható mátrixok, akkor AB és BA sajátértékei megegyeznek.

- 21.* Tekintsük azokat az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mérhető függvényeket, amelyekre

$$\|f\|^2 := \frac{1}{\pi} \int |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dx dy \quad (z = x + iy)$$

véges. Ezek az

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int \bar{f}(z) g(z) e^{-|z|^2} dx dy$$

belső szorzással egy $\mathcal{K}$ Hilbert-teret alkotnak. 1. Igazolja, hogy $\mathcal{K}$ -ban az analitikus függvények $\mathcal{K}_0$ altere zárt. 2. Mutassa meg, hogy $\mathcal{K}_0$ -ban a polinomok teljes halmazt alkotnak.

22. Legyen $P_n(x)$ az n -ed fokú Legendre-polinom. Számolja ki a $P_n(1)$ értéket. Mutassa meg, hogy $P_n(-1) = (-1)^n$. (Útmutatás: Felhasználhatja, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n = \frac{1}{\sqrt{1 - (2rx - r^2)}} \quad (|x| < 1),$$

amit a Legendre-polinomok **generátor függvényének** neveznek.)

23. Igazolja, hogy $H_{2n}(0) = (-1)^n (2n)!/n!$, ha $H_m(x)$ az m -edfokú Hermite-polinom.

24. Igazolja az

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

összefüggést. (Az $\exp(2xt - t^2)$ függvényt a Hermite-polinomok **generátorfüggvényének** nevezik.)

- 25.* Igazolja, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ixt - t^2/2} H_n(t) dt = i^n e^{-x^2/2} H_n(x).$$

26. Az $e^{2xt}e^{-t^2}$ generátorfüggvénybe beírva az exponenciális függvény hatványsorát igazolja a

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

összefüggést.

27. A 32. példa $L^2(\mu)$ Hilbert-terében tekintsük az

$$L = \{H_n : n \text{ páratlan}\}$$

halmazt. (H_n jelöli az n -edfokú Hermite-polinomot.) Határozzuk meg az $L^\perp$ alteret.

28. Igazolja, hogy az ℓ^2 tér szeparábilis.
29. Mutassa meg, hogy ha egy Banach-tér normája eleget tesz a paralelogramma azonosságnak, akkor van olyan belső szorzat a téren, amiből a norma a Hilbert-terekben megszokott módon származtatható. (Neumann és Jordan tétele.)
30. Számoljuk ki $e^{-\lambda|x|}$ Fourier-transzformáltját, $x \in \mathbb{R}$.
31. Mutassa meg, hogy integrálható függvény Fourier-transzformáltja folytonos.
32. Milyen $a, b, c \in \mathbb{C}$ számokra lesz az

$$\int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$$

integrál minimális?

33. Tételezzük fel, hogy egy Hilbert-térben $x_n \xrightarrow{w} x$ és $y_n \xrightarrow{w} y$. Melyik igaz a következő állítások közül? **a.** $x_n + y_n \xrightarrow{w} x + y$. **b.** $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$. **c.** $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. **d.** Ha $x_n = y_n$, akkor $x = y$.
34. Tételezzük fel, hogy $x_n \rightarrow x$ és $y_n \rightarrow y$ egy Hilbert-térben. Melyik igaz az alábbi állítások közül? **a.** $x_n + y_n \rightarrow x + y$. **b.** $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$. **c.** $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.
35. Tekintsünk egy olyan rendszert, amely a számegyenesen elhelyezkedő N darab tömegpontból áll, és szabad energiáját az

$$F(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} \log |x_i - x_j| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N x_k^2$$

függvény adja meg az egyes tömegpontok $x_1, x_2, \dots, x_N$ helyzetével kifejezve. Igazoljuk, hogy F akkor minimális, ha $x_1, x_2, \dots$ és x_N az N -edfokú Hermite-polinom gyökei. (Útmutatás: 1. Differenciálással mutassuk meg, hogy az $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ minimumhelynek ki kell elégítenie a $\sum (x_n - x_m)^{-1} = x_n$ egyenleteket minden $1 \leq n \leq N$ -re, ha az összegzés $m \neq n$ -re történik. 2. Legyen $f(x) = (x - x_1) \dots (x - x_N)$, és számoljuk ki az

$$\frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f(x)} - x \frac{f'(x)}{f(x)}$$

mennyiséget az előző összefüggés felhasználásával. 3. Hivatkozzunk arra, hogy f az n -edik Hermite-féle differenciálegyenlet polinom megoldása, és így csak az n -edfokú Hermite-polinom lehet.)

36. Adjon példát olyan 2×2 -es P mátrixra, amelyre $P^2 = P$ és P nem önadjungált.
37. Adjon meg egy olyan konkrét operátort, amelyre ráillik a 55. példa.
38. Legyen P olyan operátor egy Hilbert-téren, amelyre $P = P^2$. Igazolja, hogy P akkor és csak akkor önadjungált, ha P magtere és képtere merőlegesek egymásra.
39. Legyen σ egy permutációja az $1, 2, \dots, n$ számoknak, és $U_\sigma : \mathcal{H}^{n \otimes} \rightarrow \mathcal{H}^{n \otimes}$ az (3.8.19) képlettel adott unitér operátor. Igazolja, hogy

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma} U_{\sigma}$$

önadjungált projekció, ha az összegzés a permutációkon fut végig.

40. Legyen φ egy lineáris funkcionál a $n \times n$ -es mátrixok terén. Igazolja, hogy egyértelműen létezik egy olyan D mátrix, amelyre $\varphi(A) = \text{Tr } DA$. φ nemnegatív értékeket vesz fel a pozitív szemidefinit mátrixokon, ha D pozitív szemidefinit.
41. Legyen A normális operátor. Igazolja, hogy $R_\lambda(A)$ normális minden $\lambda \in \rho(A)$ esetén.

42. Használjuk az

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(T - S)R_\lambda(S)$$

azonosságot a $T \mapsto R_\lambda(T)$ rezolvens iránymenti deriváltjának kiszámítására.

43. Adjuk meg az ℓ^2 téren az

$$A\delta_n = i\delta_n + \frac{1}{n}\delta_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

operátor adjungáltját. Normális-e az A operátor?

44. Legyen A az $L^2[0, 1]$ térben az x^2 függvénnyel való szorzás operátora. Mi A spektrálmértéke?

45. Ha $H \subset [0, 1]$ egy Borel-halmaz, akkor legyen

$$\mu(H) = \begin{cases} \frac{2}{3}\lambda(H), & \text{ha } \frac{1}{4} \in H, \\ \frac{2}{3}\lambda(H) + \frac{1}{3}, & \text{ha } \frac{1}{4} \notin H. \end{cases}$$

Mi az $L^2(\mu)$ térben az x^2 függvénnyel való szorzás operátorának spektruma?

46. Az ℓ^2 tér kanonikus bázisa $\delta_1, \delta_2, \dots$. Adjuk meg az

$$A\delta_n = \delta_{2n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

képlettel értelmezett operátor normáját. Konvergál-e az A^k sorozat az erős vagy gyenge operátor topológiában?

- 47.^M Bizonyítsa be, hogy ha E és F projekciók egy Hilbert-téren, akkor $\|E - F\| \leq 1$.
48. Adjon példát olyan korlátos önadjungált operátorra, amelynek nincsen sajátértéke.
- 49.^M Mutassa meg, hogy az $x \neq 0$ vektor pontosan akkor sajátvektora az A operátornak, ha $|\langle x, Ax \rangle| = \|Ax\| \cdot \|x\|$.
- 50.^M Igazolja, hogy ha P, Q és $P + Q$ projekciók, akkor $PQ = 0$.
51. Legyen P egy zárt altérre való merőleges vetítés operátora. Mikor lesz P kompakt?
52. Bizonyítsa be, hogy ha E és F projekciók, akkor $(EF)^n$ konvergens az erős operátor topológiában.
53. Legyen P egy projekció operátor. Adja meg e^{2iP} spektrumát.
54. Legyen T olyan normális operátor, amelyre $T^2 = I$. Igaz-e, hogy $(2i + T)^{-1}$ korlátos normális operátor?
55. Bizonyítsa be, hogy ha az $X \in B(\mathcal{H})$ operátorra X^*X és XX^* projekciók, akkor X parciális izometria.
- 56.^M Legyen $E(\cdot)$ egy projektormérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain. Milyen topológiában igaz, hogy $E([0, a_n]) \rightarrow E([0, a])$, ha $a_n \rightarrow a$?
57. Legyen $E(\cdot)$ egy projektormérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain. Hová tart $E([-n, n])$, ha $n \rightarrow \infty$?
58. Mikor lesz két projekció operátor szorzata projekció?
59. Legyen A és B olyan önadjungált operátorok, hogy $A \leq B$ és P egy projekció. Igazolja, hogy $PAP \leq PBP$.
60. Legyen A egy önadjungált operátor és P egy projekció. Igazolja, hogy $PAP \leq A$ esetén P és A felcserélhetők.
61. Legyen $0 \leq A$ egy önadjungált operátor és P egy projekció. Igazolja, hogy
- $$A \leq 2 PAP + 2 P^\perp AP^\perp.$$
62. Legyen S a jobbra tolás operátora az ℓ^2 téren, amelynek kanonikus bázisa $\delta_1, \delta_2, \dots$. Számolja ki a $(2 - S)^{-1}\delta_2$ vektort.
63. Legyen $\alpha_n \in [0, 1]$ növény sorozat 1 határértékkel. Az $\ell^2(\mathbb{N})$ téren $A\delta_n = \alpha_n\delta_{n+1}$ egy lineáris operátort értelmez. Mi ennek a spektruma?
64. Legyen $f, g \in L^2(0, 1)$ két rögzített függvény. Bizonyítsuk be, hogy

$$(Ah)(x) = \int f(x)g(y)h(y) dy$$

egy korlátos lineáris operátort értelmez. Mi ennek a spektruma?

65. Igazoljuk, hogy egy bázist bázisba vivő operátor unitér.
66. Legyen P és Q két projekció. Mikor lehet $P - Q$ is projekció?
67. Legyen S a jobbra tolás operátora. Határozza meg a $\langle \delta_1, (n - S)^{-1} \delta_2 \rangle$ sorozat határértékét, ha $n \rightarrow \infty$ ($n \geq 2$).
68. Igazolja, hogy végtelen dimenziós Hilbert-térben unitér operátor nem lehet kompakt.
69. Adjuk meg ℓ^2 balra tolás operátorának poláris felbontását.
70. Legyen A és B invertálható pozitív operátorok. **Geometriai közepüket** az

$$A \# B := A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^{1/2} A^{1/2}$$

képlettel értelmezzük. Igazoljuk, hogy **a.** $A \# B = B \# A$, **b.** $A \# B \leq (A + B)/2$, **c.** $(A \# B) B^{-1} (A \# B) = A$.

71. Legyen U és V két tetszőleges unitér operátor egy Hilbert-téren. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $F : [0, 1] \rightarrow B(\mathcal{H})$ folytonos függvény, amelynek minden értéke unitér operátor és $F(0) = U$, $F(1) = V$. Az állítás azt mondja, hogy bármely két unitér operátor ívvel összeköthető. (Útmutatás: U -t és V -t kössük ívvel össze az identitással.)
72. Legyen $(Af)(z) = zf(z)$ a 4. feladatban leírt Hilbert-térben. Bizonyítsuk be, hogy A korlátos operátor, és határozzuk meg a spektrumát. Elemezzük a spektrum részeit is.
- 73.* Legyen f egy kétváltozós folytonos függvény, és értelmezzünk $L^2(0, 1)$ -en egy A operátort:

$$(Ag)(t) = \int_0^t f(t, x)g(x) dx.$$

Igazoljuk, hogy A korlátos, és számoljuk ki $r(A)$ -t.

74. Számolja ki $L^2(-1, 1)$ -ben az x^2 -tel való szorzás operátorának spektrálmértékét.
75. $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ -ben legyen $(Af)(x, y) = \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2}$. Bizonyítsa be, hogy A egy projekció operátor.
76. Legyen $E_1 E_2, \dots$ páronként ortogonális projekciók sorozata, amelyre $\sum_n E_n = I$. Mi lesz a

$$\sum_n e^{i\pi/n} E_n$$

operátor spektruma? Mikor lesz ez az operátor kompakt?

77. Mutassuk meg a 30. példa gondolatmenetével, hogy ha $0 \leq A \leq I$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér operátora, akkor létezik egy Q projekció valamely $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ Hilbert-téren, amelyre $Ax = PQx$ ($x \in \mathcal{H}$ és $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ ortogonális projekció).

78. Igazolja, hogy az $L^2[0, 1]$ Hilbert-térben értelmezett

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (f \in L^2[0, 1], x \in [0, 1])$$

operátor korlátos.

Igazolja, hogy az A operátor adjungáltja

$$(A^*f)(x) = \int_x^1 f(t) dt \quad (f \in L^2[0, 1], x \in [0, 1]).$$

79. Legyen E_n páronként ortogonális (önadjungált) projekciók sorozata egy $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, $E_n \neq 0$ és $\lambda > 0$ egy valós szám. Milyen λ értékekre lesz az

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n E_n$$

lineáris operátor korlátos? Tegyük fel, hogy A korlátos. Mi a spektruma? Elemezze a spektrum részeit is. Mikor lesz az A operátor kompakt?

80.^M Legyen $f \in L^2(\mathbb{R})$, és

$$g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-itx} f(x) dx.$$

Igazolja, hogy g_n konvergál az $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert-térben. Mi a határérték?

81. Igazolja, hogy egy véges dimenziós Hilbert-tér operátorának akkor és csak akkor van ciklikus vektora, ha minden sajátértéke egy multiplációsú.

82. Legyen A és B két invertálható mátrix. Igazolja, hogy AB és BA spektruma azonos.

83. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Adja meg az $U_t = \exp(itA)$ unitér mátrixot ($t \in \mathbb{R}$).

84. Igazolja, hogy ha $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normális operátor, akkor $\|T\|^2 = \|T^2\|$.

85. Igazolja, hogy ha $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normális operátor, akkor $r(T) = \|T\|$.

86. Legyen $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ két önadjungált operátor, melyekre $A \leq B$. Mutassuk meg, hogy ha egy C pozitív önadjungált operátorra $AC = CA$ és $BC = CB$, akkor $AC \leq BC$.

87. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adja meg az $U_t = \exp(itA)$ unitér mátrixot ($t \in \mathbb{R}$).

88. Legyen B egy pozitív korlátos önadjungált operátor. Definiáljunk rekurzióval egy A_n sorozatot: $A_0 = 0$, $A_{n+1} = (B + A_n^2)/2$. Igazoljuk, hogy $A_n \leq A_{n+1}$. Hová tart az A_n operátor sorozat?

89.^M Legyen $U \in B(\mathcal{H})$ egy unitér operátor és $\mathcal{H}_0 := \{(x + Ux + \cdots + U^{n-1}x) - nx : x \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}\}$. Igazolja, hogy $\mathcal{H}_0^\perp = \{x \in \mathcal{H} : Ux = x\}$.

90. Használja fel az előző feladatot annak bizonyítására, hogy

$$\frac{1}{n} (y + Uy + \cdots + U^{n-1}y)$$

konvergál U egy fixpontjához. (Útmutatás: $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{H}_0^\perp$.)

91. Definiáljuk az $U : L^2(\mathbb{R}^2, dx dy) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+, r dr) \otimes L^2([0, 2\pi], d\varphi)$ lineáris operátort az

$$(Uf)(r, \varphi) = f(x, y) \quad x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

képletekkel. Igazolja, hogy U unitér.

92. Használja fel a (3.10.29) rezolvens azonosságot annak igazolására, hogy

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) R_z(T) dz \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) R_z(T) dz \right) = \frac{1}{2\pi i} \int f(z) g(z) R_z(T) dz,$$

ha f és g analitikus függvények egy D' tartományon, $D' \supset \overline{D} \supset D \supset \sigma(T)$ és az integrálás a T spektrumát tartalmazó D tartomány Γ határán történik. (Feltehető, hogy Γ sima zárt görbe.)

93. Igazolja, hogy $\inf\{\|A^n\|^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$ a korlátos A operátor spektrálsugara.

94. Adjunk meg olyan vektort, amely nincsen benne az $I - S^*$ operátor értékkészletében. (S^* az ℓ^2 tér balra tolás operátora.)

95.^M Legyen M_n az $n \times n$ -es mátrixok Hilbert-tere a $\langle A, B \rangle = \text{Tr } A^* B$ belső szorzással és D egy pozitív definit mátrix. Mutassuk meg, hogy az $L : M_n \rightarrow M_n$

$$L(A) = \int_0^1 D^t A D^{1-t} dt$$

operátorra $L \geq 0$, és adjuk meg L spektrumát.

96. Mutassa meg, hogy egy Hilbert-tér vektorainak gyengén konvergens sorozata normában korlátos.

97. Legyen $n \in \mathbb{N}$, és az $\ell^2(\mathbb{N})$ téren értelmezzünk egy A_n operátort az

$$A_n \delta_k = \begin{cases} \delta_{k+1} & k \leq n, \\ 0 & k > n, \end{cases}$$

képlettel. Mi az A_n operátor spektruma? Konvergál-e A_n az erős vagy a norma topológiában?

- 98.^M Adjuk meg egy korlátos operátor gráfjára vetítő projekciót.
- 99.^M Legyen $c \in \mathbb{C}$ és tételezzük fel, hogy $AB - BA = cI$ teljesül $A, B \in B(\mathcal{H})$ operátorokra. Igazoljuk, hogy $c = 0$.
100. Legyen $A, B \in B(\mathcal{H})$ pozitív operátorok és $1 \leq t \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy $\|A^t B^t\| \geq \|AB\|^t$.

4. Nemkorlátos operátorok

Az alkalmazások szempontjából fontos operátorok némelyike nem korlátos, ilyenek például a differenciáloperátorok. A nemkorlátos operátorok kezelése lényegesen bonyolultabb; kezdődik ez azzal, hogy az értelmezési tartományuk nem a teljes tér, és gondot kell fordítani az értelmezési tartomány megadására. (Látszólag ugyanaz az operátor különböző értelmezési tartományokkal egészen más jelenséget írhat le, és egészen más matematikai tulajdonságai lehetnek.)

Egy operátor gráfjának zártsága egyfajta minimumkövetelmény az operátor kezeléséhez, de számolási szempontból az önadjungált operátorok osztálya mondható jónak. A nemkorlátos önadjungált operátorok függvényei a korlátos esethez hasonlóan a spektráltételen keresztül értelmezhetők.

4.1. Zárt operátorok

Legyen T a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér sűrű alterén értelmezett lineáris operátor, amely értékeit is $\mathcal{H}$ -ban veszi fel. T **értelmezési tartományára** a $\mathcal{D}(T)$ jelölést használjuk. A

$$\Gamma(T) = \{(x, y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : x \in \mathcal{D}(T), y = Tx\}$$

halmaz lineáris altér, amit T **gráfjának** nevezünk. Ha $\Gamma(T)$ zárt, akkor T -t **zárt operátornak** mondjuk. T tehát akkor zárt, ha az $x_n \rightarrow x$ és $Tx_n \rightarrow y$ relációkból következik $x \in \mathcal{D}(T)$ és $Tx = y$. Az olyan zárt operátor, amelynek értelmezési tartománya az egész tér, a zárt gráf tétel szerint korlátos.

Ha a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér T_1 és T_2 operátoraira $\Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2)$ teljesül, akkor a $T_1 \subset T_2$ jelölést használjuk. Szavakban $T_1 \subset T_2$ jelentése nem más, mint az, hogy T_2 kiterjesztése T_1 -nek.

A következő példa azt mondja, hogy a differenciálás mint lineáris operátor nem korlátos.

1. példa: Legyen $\mathcal{D}(T)$ a számegegyenesen szakaszosan folytonosan differenciálható kompakt tartójú függvények halmaza és $Tf = f'$. Tehát $\mathcal{D}(T) \subset L^2(\mathbb{R})$. Ha

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{ha } x \in [0, n^{-1}], \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

akkor

$$\|f_n\|^2 = \int_0^{1/n} n^2 x^2 dx = \left[\frac{n^3}{3} x^3 \right]_0^{1/n} = \frac{1}{3n} \rightarrow 0$$

és

$$\|Tf_n\|^2 = \int_0^{1/n} n^2 dx = n \rightarrow \infty.$$

A T differenciáloperátor tehát nemkorlátos, és nem terjeszthető ki a teljes $L^2(\mathbb{R})$ tér zárt operátorává. $\square$

Most példát mutatunk zárt operátorra.

2. példa: Legyen $T_0 : \ell^2(\mathbb{Z}^+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^+)$ egy lineáris operátor a

$$\sum_n x_n \delta_n \mapsto \sum_n f(n) x_n \delta_n$$

képlettel adva a

$$\mathcal{D}(T_0) = \left\{ \sum_n x_n \delta_n : \sum_n |f(n)|^2 |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

értelmezési tartományon egy tetszőleges $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ függvény segítségével. Ekkor T_0 zárt operátor, ezt igazoljuk.

Legyen

$$H_n = \{(x, y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : y_k = f(k)x_k \text{ ha } k \leq n\}.$$

Ekkor H_n zárt halmaz minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Mivel

$$\Gamma(T_0) = \bigcap_n H_n,$$

T_0 gráfja is zárt, és T_0 zárt operátor. $\square$

Nemkorlátos operátorok körében a **spektrumot** ugyanúgy értelmezzük, mint a korlátos esetben. A $\lambda \in \mathbb{C}$ szám T spektrumában van, ha nem létezik olyan korlátos A operátor, amelyre $A(\lambda - T)x = x$ minden $x \in \mathcal{D}(T)$ esetén.

A korlátos és nemkorlátos operátorok közötti különbség a spektrumban is jelentkezik. Egy nemkorlátos operátornak akár minden komplex szám is a sajátértéke lehet. Ha az operátor nem zárt, akkor a spektruma mindig a teljes komplex sík.

3. példa: Legyen $T : \ell^2(\mathbb{Z}^+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^+)$ a

$$T\delta_n = \begin{cases} \sqrt{n}\delta_{n-1}, & \text{ha } n > 0, \\ 0, & \text{ha } n = 0 \end{cases}$$

képlettel értelmezve a $\mathcal{D}(T) = \{x \in \ell^2 : \sum_n n|x_n|^2 < +\infty\}$ értelmezési tartományon. Ekkor $T = T_0 S^*$, ahol S^* a balra tolás és

$$T_0 \delta_n = \sqrt{n+1} \delta_n.$$

T_0 a $\mathcal{D}(T)$ értelmezési tartományon zárt operátort ad, egy nemkorlátos szorzás operátort, lásd a 2. példát. Ebből adódik, hogy T zárt. Legyen ugyanis $x_n \rightarrow x$ és $Tx_n \rightarrow y$. Ekkor $S^*x_n \rightarrow S^*x$ és $T_0(S^*x_n) \rightarrow y$. Így T_0 zártsága alapján $Ty = T_0 S^*x = Tx$.

A T operátornak minden $z \in \mathbb{C}$ szám a spektrumában van, ugyanis

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \delta_n \quad (4.1.1)$$

sajátvektora T -nek z sajátértékekkel. (Egyébként $e(z)$ -t **exponenciális vektornak** szokták nevezni, és látható, hogy az $\{e(z) : z \in \mathbb{C}\}$ halmaz lineárisan független.) $\square$

1. lemma: Ha a T operátor spektruma nem az egész $\mathbb{C}$ komplex sík, akkor T zárt.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $\lambda \in \rho(T)$. Ekkor $B = (\lambda - T)^{-1}$ egy korlátos operátor. Vegyünk egy olyan $(f_n) \subset \mathcal{D}(T)$ sorozatot, hogy $f_n \rightarrow f$ és $Tf_n \rightarrow g$ valamely f és g vektorokra.

$$B(\lambda f - g) = \lim_{n \rightarrow \infty} B((\lambda - T)f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

Mindkét oldalra alkalmazva a $\lambda - T$ operátort, azt kapjuk, hogy

$$\lambda f - g = (\lambda - T)f.$$

Ez egyrészt mutatja, hogy $f \in \mathcal{D}(T)$, másrészt $Tf = g$. □

4.2. Az adjungált

Legyen T egy lineáris operátor a $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}$ értelmezési tartománnyal. $g \in \mathcal{D}(T^*)$, ha

$$\langle g, Tf \rangle = \langle k, f \rangle$$

minden $f \in \mathcal{D}(T)$ -re és valamely $k \in \mathcal{H}$ -ra. Ha $\mathcal{D}(T)$ sűrű $\mathcal{H}$ -ban, akkor k egyértelmű és $T^*g = k$ definíció szerint. T^* a T operátor **adjungáltja**. $\mathcal{D}(T^*)$ azokból a $g \in \mathcal{H}$ vektorokból áll, amelyekre $f \mapsto \langle g, Tf \rangle$ folytonos lineáris funkcionál a $\mathcal{D}(T)$ altéren, és $T^*(g)$ a Riesz-reprezentációs tétel alapján a (teljes Hilbert-térre kiterjesztett) funkcionált megadó vektor. Az adjungált értelmezéséből nyomban következik, hogy

$$T_1 \subset T_2 \quad \text{esetén} \quad T_2^* \subset T_1^*. \quad (4.2.2)$$

Ha $T \subset T^*$, akkor T -t **szimmetrikusnak** mondjuk. T tehát pontosan akkor szimmetrikus, ha

$$\langle g, Tf \rangle = \langle Tg, f \rangle$$

fennáll bármely $f, g \in \mathcal{D}(T)$ vektorra. Ha $T = T^*$, akkor T -t **önadjungáltnak** nevezzük. Neumann János a ma önadjungáltnak nevezett operátorokat **maximális szimmetrikusnak** nevezte. Valóban, ha $T_1 \subset T_2$ szimmetrikus operátorok, akkor $T_1 \subset T_2 \subset T_2^* \subset T_1^*$, és $T_1 = T_1^*$ esetén $T_1 = T_2$ -nek kell teljesülni.

Egy nemkorlátos operátor adjungáltjának meghatározása hosszadalmas is lehet, mint ezt a következő példa mutatja.

4. példa: Az $L^2(0, 1)$ Hilbert-téren két lineáris operátort tekintünk. $\mathcal{D}(T_1) = \{f \in L^2 : f(0) = f(1) = 0, f' \in L^2\}$, $\mathcal{D}(T_2) = \{f \in L^2 : f' \in L^2\}$. T_1 és T_2 egyaránt differenciáloperátorok: $(T_k f)(x) = -i f'(x)$ ha $f \in \mathcal{D}(T_k)$ ($k = 1, 2$). Megmutatjuk, hogy $T_1^* = T_2$. Mivel $T_1 \subset T_2$, ez azt is jelenti, hogy a T_1 operátor szimmetrikus ugyan, de nem önadjungált.

$T_2 \subset T_1^*$ belátása az egyszerűbb. A tartalmazás azt jelenti, hogy $y_2 \in \mathcal{D}(T_2)$ és $x_1 \in \mathcal{D}(T_1)$ esetén $\langle y_2, T_1 x_1 \rangle = \langle T_2 y_2, x_1 \rangle$. Valóban,

$$\langle y_2, T_1 x_1 \rangle = -i \int_0^1 x_1'(t) \overline{y_2(t)} dt = i \int_0^1 x_1(t) \overline{y_2'(t)} dt = \langle T_2 y_2, x_1 \rangle,$$

mert a középső egyenlőség parciális integrálással következik az $x_1(0) = x_1(1) = 0$ feltételből.

Ezután rátérünk $T_2 \supset T_1^*$ igazolására. Legyen $y \in \mathcal{D}(T_1^*)$ és $y^* := T_1^* y$. Az adjungált definíciója szerint $\langle y, T_1 x_1 \rangle = \langle T_1^* y, x_1 \rangle$, amiből integrálokra való átírással adódik, hogy

$$-i \int_0^1 x_1'(t) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 x_1(t) \overline{y^*(t)} dt \quad (4.2.3)$$

érvényes minden $x_1 \in \mathcal{D}(T_1)$ -re. Legyen $Y^*(s) = \int_0^s y^*(t) dt$. Parciális integrálással

$$\int_0^1 x_1(t) \overline{y^*(t)} dt = - \int_0^1 x_1'(t) \overline{Y^*(t)} dt. \quad (4.2.4)$$

Mivel $\int_0^1 x_1'(t) dt = 0$ a peremfeltétel miatt, tetszőleges $c \in \mathbb{C}$ számra

$$\int_0^1 x_1'(t) \overline{[Y^*(t) + i y(t) - c]} dt = 0$$

a (4.2.3) és (4.2.4) összefüggések alapján.

Tetszőleges $g \in L^2$ -ből kiindulva

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds - t \int_0^1 g(s) ds$$

T_1 értelmezési tartományában van, így x_1 helyébe tehető:

$$0 = \int_0^1 \left[g(t) - \int_0^1 g(s) ds \right] \overline{[Y^*(t) + i y(t) - c]} dt.$$

Ezt egyszerűen átrendezve

$$\int_0^1 g(t) \overline{[Y^*(t) + i y(t) - c]} dt = \int_0^1 g(s) ds \times \int_0^1 \overline{[Y^*(t) + i y(t) - c]} dt.$$

A c számot (g -től függetlenül) jól megválasztva elérhetjük, hogy $\int_0^1 \overline{[Y^*(t) + i y(t) - c]} dt = 0$, és ekkor

$$\int_0^1 g(t) \overline{[Y^*(t) + i y(t) - c]} dt = 0$$

egyenlőséghez jutunk, ami tetszőleges $g \in L^2$ -re fennáll. Így

$$Y^*(t) + i y(t) - c = 0,$$

és differenciálással $y^*(t) = -i y'(t)$. Ez azt mutatja, hogy $y \in \mathcal{D}(T_2)$ és $y^* = T_2 y$. Tehát $T_1^* \subset T_2$. $\square$

Azt mondjuk, hogy a $\overline{T}$ operátor a T operátor **lezárása**, ha $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$. Tehát $\overline{T}$ **kiterjesztése** T -nek, jelölésben $\overline{T} \supset T$. Ha egy T operátorra teljesül, hogy lezárása létezik, akkor **lezárható** mondjuk. A T operátor pontosan akkor lezárható, ha abból, hogy $(0, h)$ benne van T gráfjának lezárásában következik, hogy $h = 0$.

1. tétel: *Bármely sűrűn definiált lineáris operátor adjungáltja zárt. Az adjungált pontosan akkor sűrűn definiált, ha az operátor lezárható. Következésképpen egy sűrűn definiált zárt operátor adjungáltja is sűrűn definiált és zárt.*

Bizonyítás: Legyen T az operátor, amiről szó van.

$$\mathcal{M} := \{(Tf, -f) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : f \in \mathcal{D}(T)\}$$

egy izometriától eltekintve T gráfja. Kiszámoljuk, hogy $\Gamma(T^*) = \mathcal{M}^\perp$. Valóban, $(x, y) \perp \mathcal{M}$, pontosan akkor, ha $\langle x, Tf \rangle = \langle y, f \rangle$ minden $f \in \mathcal{D}(T)$ vektorra. Utóbbi nem más, mint $x \in \mathcal{D}(T^*)$ és $T^*x = y$, azaz $(x, y) \in \Gamma(T^*)$.

$\mathcal{M}^\perp$ zárt altér, tehát T^* zárt operátor, és $(\overline{T})^* = T^*$.

Hátra van még annak igazolása, hogy $\mathcal{D}(T^*)$ sűrű, amennyiben T lezárható, és viszont. Tételezzük fel, hogy $h \perp \mathcal{D}(T^*)$ és $\overline{T}$ létezik. Ekkor $(h, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp = \overline{\mathcal{M}}$, azaz $(h, 0) = (\overline{T}f, -f)$ valamely $f \in \mathcal{D}(\overline{T})$. Ebből adódik, hogy $f = 0$ és $Tf = h = 0$. Tehát $\mathcal{D}(T^*)$ sűrű. A megfordított állítás a gondolatmenet megfordításával igazolható. $\square$

Legyen U $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ -nak az $U(f, g) := (-g, f)$ képlettel értelmezett unitér operátora. Az előbbi bizonyítás azon múlt, hogy

$$\Gamma(T^*) = (U\Gamma(T))^\perp.$$

Felírva ezt a relációt T helyében T^* -ra is, és kihasználva, hogy $U^2 = -\text{identitás}$ azt kaphatjuk, hogy $\overline{T} = T^{**}$:

$$\Gamma(T^{**}) = (U\Gamma(T^*))^\perp = (U(U\Gamma(T))^\perp)^\perp = \overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T}). \quad (4.2.5)$$

A következő példa Laplace-operátorról szól.

5. példa: Legyen

$$\mathcal{D}(H_D) = \{f \in C^2[a, b], f(a) = f(b) = 0\},$$

$$\mathcal{D}(H_N) = \{f \in C^2[a, b] : f'(a) = f'(b) = 0\}.$$

Az $f \mapsto -f''$ operátor a $\mathcal{D}(H_D)$ és $\mathcal{D}(H_N)$ tartományokon egyaránt szimmetrikus. Ez következik az

$$\int_a^b (\overline{f}g'' - g\overline{f}'') dx = [\overline{f}g' - \overline{f}'g]_a^b \quad (4.2.6)$$

azonosságból. Utóbbi parciális integrálással látható:

$$\int_a^b \overline{f}''g dx = [\overline{f}'g]_a^b - \int_a^b \overline{f}'g' dx,$$

$$\int_a^b \overline{f}g'' dx = [\overline{f}g']_a^b - \int_a^b \overline{f}'g' dx$$

és különbség adja a fenti formulát.

Az előbbieket nagymértékben általánosíthatók. Legyen Ω egy tartomány $\mathbb{R}^n$ -ben. A **Laplace-operátor**

$$\Delta_n f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

értelmezhető a kétszer folytonosan differenciálható függvények osztályán. A **Green-tétel** szerint

$$\int_\Omega (f\Delta_n g - g\Delta_n f) dx = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - \frac{\partial f}{\partial \nu} g \right) ds, \quad (4.2.7)$$

ahol $\partial\Omega$ a tartomány határa, és $\frac{\partial}{\partial\nu}$ jelenti a normális irányú deriválást. (A fenti (4.2.6) ennek speciális esete.) Δ_n akkor lesz szimmetrikus operátor, ha a jobb oldal eltűnik:

$$\langle \bar{f}, \Delta_n g \rangle - \langle \Delta_n \bar{f}, g \rangle = \int_{\Omega} (f \Delta_n g - g \Delta_n f) dx = 0.$$

Ezt könnyen biztosíthatjuk, ha az értelmezési tartományba olyan f függvényeket választunk, amelyek eltűnnek $\partial\Omega$ -n, ez a **Dirichlet-féle peremfeltétel**. Természetesen ugyanilyen jó a $\frac{\partial}{\partial\nu} f = 0$ feltételt kielégítő függvények osztálya, ennek neve **Neumann-féle peremfeltétel**.

A Dirichlet-féle és a Neumann-féle Laplace-operátorok egyaránt szimmetrikusak. $\square$

6. példa: Legyen Q az x változóval való szorzás operátora $L^2(\mathbb{R})$ -en:

$$\mathcal{D}(Q) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad (Qf)(x) = xf(x).$$

Ha $g \in \mathcal{D}(Q^*)$ és $Q^*g = g^*$, akkor $\langle g, Qf \rangle = \langle g^*, f \rangle$ minden $f \in \mathcal{D}(Q)$ -ra, vagyis

$$\int [\bar{g}(x)x - \overline{g^*}(x)] f(x) dx = 0.$$

f helyébe tehetjük a $\mathbb{1}_{[-n,n]}[g(x)x - g^*(x)]$ függvényt, hiszen ez négyzetesen integrálható, és kompakt tartójú lévén, x -szel szorozva is négyzetesen integrálható. Ezért

$$g(x)x - g^*(x) = 0$$

majdnem mindenütt $[-n, n]$ -ben, és így $\mathbb{R}$ -en is. Azt kaptuk, hogy $g \in \mathcal{D}(Q)$ és $Qg = g^*$. Megállapítjuk, hogy $Q^* \subset Q$. Mivel Q szimmetrikus, azaz $Q \subset Q^*$, arra jutunk, hogy Q önadjungált.

$L^2(\mathbb{R})$ egy természetes bázisa a Hermite-függvények:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp(-x^2/2) H_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Mivel

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 1),$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x\varphi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp(-x^2/2) x H_n(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{n} \varphi_{n-1}(x) + \sqrt{n+1} \varphi_{n+1}(x) \right) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

A mátrix formája Q -nak ebben a bázisban

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

(Ezt Heisenberg-reprezentációnak is szokták nevezni.) $\square$

7. példa: Legyen Q az x változóval való szorzás operátora az előző példából, és legyen Q megszorítása a végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvények terére Q_0 . Ekkor Q_0 lezárása Q .

Mivel Q önadjungált lévén zárt, elég azt látnunk, hogy $f \in \mathcal{D}(Q)$ esetén van olyan g_n sorozata végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvényeknek, amelyre $g_n \rightarrow f$ és $g_n(x)x \rightarrow xf(x)$ az L^2 -normában. Legyen $f_n := \mathbb{1}_{[-n,n]}f$, és válasszunk olyan végtelen sokszor differenciálható g_n függvényt, amelynek tartója $[-n, n]$ -ben van és $\|f_n - g_n\| \leq n^{-2}$. Ekkor $g_n \rightarrow f$ nyilvánvalóan, és

$$\int_{-n}^n |xg_n(x) - xf_n(x)|^2 dx \leq n^2 \int_{-n}^n |g_n(x) - f_n(x)|^2 dx \leq n^{-2}.$$

Ebből látszik, hogy $xg_n(x)$ -nek és $xf_n(x)$ -nek ugyanaz a határértéke. Utóbbi $xf(x)$ -hez tart, tehát az előbbi is.

Amit a Q_0 operátorra bizonyítottunk, az nagymértékben általánosítható. Legyen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, és M_g a végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvények terén értelmezett g -vel való szorzás operátora. A fenti gondolatmenetet követve látható, hogy M_g lezárása a g -vel való szorzás a $\mathcal{D} := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : gf \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ értelmezési tartományon. $\square$

4.3. Önadjungált operátorok

Legyen A egy önadjungált operátor, és

$$m = \inf\{\langle x, Ax \rangle : |x| = 1\} \text{ és } M = \sup\{\langle x, Ax \rangle : |x| = 1\}.$$

A 3. fejezet 14. tételének bizonyítása működik akkor is, ha A nem korlátos, így $\sigma(A) \subset [m, M]$. Kövekezőképpen egy önadjungált operátor spektruma valós. Ha m véges, akkor A -t **alulról korlátosnak** nevezzük, ha M véges, akkor A **felülről korlátos**. Ha $m \geq 0$, akkor A -t **pozitívnak** mondjuk. (Az A pozitivitásába mindig beleértjük, hogy A egy önadjungált operátor.)

Az önadjungált operátorokra kiterjeszthető a korlátos operátorok köréből ismert spektráltétel és a folytonos függvény kalkulus is.

2. tétel: (Spektráltétel) Legyen A egy önadjungált operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor $\mathbb{R}$ Borel-halmazain egyértelműen létezik egy olyan E projektormérték, amelyre

$$(1) \text{ ha } H \subset \mathbb{R} \text{ Borel-halmaz és } H \cap \sigma(A) = \emptyset, \text{ akkor } E(H) = 0,$$

$$(2) \mathcal{D}(A) = \{x \in \mathcal{H} : \int \lambda^2 d\langle x, E(\cdot)x \rangle(\lambda) < +\infty\},$$

$$(3) \text{ ha } A_n = \int_{-n}^n \lambda dE(\lambda) \text{ és } x \in \mathcal{D}(A), \text{ akkor } A_n x \rightarrow Ax. \quad \square$$

A tételben szereplő E projektormérték az A operátort egyértelműen meghatározza. A (2) tulajdonság megadja A értelmezési tartományát, a (3)-ban adott korlátos A_n operátorok hatásának pontonkénti határértéke pedig A .

8. példa: A 6. példa Q operátora a kvantummechanikában az egy szabadsági fokú részecske **koordináta-operátora**. A változóval való szorzás operátora, és spektrális projekciói is szorzás operátorok. Ha $H \subset \mathbb{R}$, akkor az $E(H)$ spektrális projekció a H halmaz karakterisztikus függvényével való szorzás operátora. Ha $f \in L^2(\mathbb{R})$, akkor az $\langle f, E(\cdot)f \rangle$ mérték sűrűségfüggvénye $|f|^2$. A spektráltétel (2) állítása szerint $f \in \mathcal{D}(Q)$ pontosan akkor, ha

$$\int \lambda^2 d\langle f, E(\cdot)f \rangle(\lambda) d\lambda = \int \lambda^2 |f(\lambda)|^2 d\lambda$$

véges, és valóban éppen ez volt Q értelmezési tartományának meghatározása. Legyen $f \in \mathcal{D}(Q)$, és A_n a spektráltétel (3) állításában szereplő operátor. Ekkor

$$\langle f, A_n f \rangle = \int_{-n}^n \lambda d\langle f, E(\cdot)f \rangle = \int_{-n}^n \lambda |f(\lambda)|^2 d\lambda,$$

és

$$A_n f(t) = \begin{cases} tf(t), & \text{ha } |t| \leq n, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $A_n f \rightarrow Qf$. □

A spektráltétel lehetőséget ad arra, hogy az $f(T)$ operátort értelmezzük bármilyen Borel-mérhető $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényre. $f(T)$ sűrűn értelmezett zárt operátor lesz, és

$$(1) \mathcal{D}(f(T)) = \{x \in \mathcal{H} : \int |f(\lambda)|^2 d\langle x, E(\cdot)x \rangle(\lambda) < +\infty\},$$

$$(2) \|f(T)x\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\langle x, E(\cdot)x \rangle(\lambda),$$

$$(3) \text{ ha } f_n(t) = f(t) \text{ } |f(t)| \leq n \text{ esetén és } f_n(t) = 0 \text{ } |f(t)| > n \text{ esetén, akkor}$$

$$f_n(T)x \rightarrow f(T)x,$$

feltéve, hogy $x \in \mathcal{D}(f(T))$,

$$(4) f(T)^* = \overline{f}(T),$$

$$(5) \text{ Ha } z \in \rho(T), \text{ akkor}$$

$$R_z(T) = \int \frac{dE(\lambda)}{z - \lambda}.$$

9. példa: Legyen A egy önadjungált operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren $A = \int \lambda dE(\lambda)$ spektrális felbontással. Ha $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ jelöli egy kompakt $[a, b]$ intervallumra az $E([a, b])$ projekció képterét, akkor minden $x \in \mathcal{K}$ vektorra az $\langle x, E(\cdot)x \rangle$ mérték tartója $[a, b]$ -ban van. Valóban, ha $H \subset \mathbb{R}$ olyan Borel-halmaz, amely diszjunkt $[a, b]$ -től, akkor $E(H)$ képtere merőleges $\mathcal{K}$ -ra és $\langle x, E(H)x \rangle = 0$. Tetszőleges folytonos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényre

$$\int |f(\lambda)|^2 d\langle x, E(\cdot)x \rangle(\lambda) \leq M(b-a)\|x\|^2,$$

ahol M az $|f|$ egy felső korlátja az $[a, b]$ intervallumon. Az $f(A)$ értelmezési tartományát megadó (1) képlet szerint x benne van $f(A)$ értelmezési tartományában. (Egyébként az $\mathcal{K}$ alteret az $f(A)$ operátor invariánsan hagyja.)

Ha $a = -n$ és $b = n$, akkor legyen $\mathcal{K}_n$ az $E([-n, n])$ spektrális projekció képtere. Az $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ altér sűrű a teljes $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, és az $f(A)$ operátorok értelmezési tartományában van. Annak ellenére, hogy $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(A^2) \supset \mathcal{D}(A^3) \dots$, van egy sűrű halmaz, amin A összes hatványa értelmezve van. $\square$

Érdemes megjegyezni, hogy $(\alpha f)(T) = \alpha f(T)$ minden mérhető f függvényre és $\alpha \in \mathbb{C}$ számra teljesül, de $(f + g)(T) = f(T) + g(T)$ általában nem igaz. Ha $x \in \mathcal{D}(f(T)) \cap \mathcal{D}(g(T))$, akkor $x \in \mathcal{D}((f + g)(T))$ és $f(T)x + g(T)x = (f + g)(T)x$, azaz $f(T) + g(T) \subset (f + g)(T)$, de a két operátor lehet különböző. $((f(T) + g(T))$ nem feltétlenül zárt, míg $(f + g)(T)$ mindig az.)

3. tétel: Legyen T egy önadjungált operátor. $t \in \sigma(T)$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik egységvektoroknak olyan f_n sorozata, hogy $f_n \in \mathcal{D}(T)$ és $\|Tf_n - tf_n\| \rightarrow 0$.

Bizonyítás: Legyen $E(\cdot)$ a T -hez tartozó projektormérték és

$$E_n = E(t - 1/n, t + 1/n)$$

spektrális projekciók egy sorozata. Ha $t \in \sigma(T)$, akkor $E_n \neq 0$ és választhatunk olyan f_n vektort, amelyre $E_n f_n = f_n$. Ekkor

$$\|Tf_n - tf_n\|^2 = \int_{t-1/n}^{t+1/n} (\lambda - t)^2 d\langle f_n, E(\lambda) f_n \rangle \leq \frac{1}{n^2}.$$

(Ugyanis a 3. fejezet 49. példája alapján az $\langle f_n, E(\cdot) f_n \rangle$ mérték tartója a $[t - 1/n, t + 1/n]$ intervallumban van.)

A megfordítás ennél még egyszerűbb, ha létezik olyan f_n sorozat, amelyre $(T - t)f_n \rightarrow 0$, akkor a $T - t$ operátornak nem létezhet korlátos inverze, tehát $t \in \sigma(T)$. $\square$

A tétel szerint egy önadjungált operátor spektruma **approximatív sajátértékekből** áll. $t \in \mathbb{R}$ -et approximatív sajátértéknek nevezhetjük, ha van egységvektoroknak egy f_n sorozata, amelyre $(Tf_n - tf_n) \rightarrow 0$. Ha t sajátérték, akkor f_n -et n -től függetlennek választhatjuk.

Azt szokták mondani, hogy t az $T = T^*$ operátor **lényeges spektrumához** tartozik, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra a $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ intervallumhoz tartozó spektrális projekció végtelen dimenziós, azaz végtelen dimenziós altérre vetít. Az előző tétel bizonyításának gondolatmenetével adódik, hogy t pontosan akkor tartozik T lényeges spektrumához, ha létezik olyan ortonormált f_n sorozat, amelyre $Tf_n - tf_n \rightarrow 0$. T lényeges spektrumára a $\sigma_{\text{ess}}(T)$ jelölést használjuk. A lényeges spektrum nem változik kompakt perturbáció hatására.

4. tétel: (Weyl-tétel) Legyen $T = T^*, K = K^* \in B(\mathcal{H})$ két önadjungált operátor, és tételezzük fel, hogy K kompakt. Ekkor T és $T + K$ lényeges spektruma azonos.

Bizonyítás: Elég belátni, hogy $\sigma_{\text{ess}}(T) \subset \sigma_{\text{ess}}(T + K)$. Ha $t \in \sigma_{\text{ess}}(T)$, akkor van olyan ortonormált f_n sorozat, amelyre $Tf_n - tf_n \rightarrow 0$. Mivel $f_n \xrightarrow{w} 0$, $Kf_n \rightarrow 0$, és $(T + K)f_n - tf_n \rightarrow 0$. Következésképpen $t \in \sigma_{\text{ess}}(T + K)$. $\square$

4.4. Önadjungált kiterjesztések

A következőkben a szimmetrikus operátorok önadjungált kiterjesztéseit vizsgáljuk. Legyen H egy szimmetrikus operátor. Ha $f \in \mathcal{D}(H)$, akkor

$$\|(H + i)f\|^2 = \|Hf\|^2 + \|f\|^2 = \|(H - i)f\|^2.$$

Ezért létezik egy izometrikus $U = (H - i)(H + i)^{-1}$ operátor $(H + i)$ képterén, ami ezt $H - i$ képterére képezi. U -t **H Cayley-transzformáltjának** nevezzük. Ha $\tilde{H}$ H -nak szimmetrikus kiterjesztése, akkor $\tilde{U}$ izometrikus kiterjesztése U -nak. Ennek a megfordítása is igaz.

Legyen $\tilde{U}$ izometrikus kiterjesztése U -nak, amely az $M^+ \supset \text{Ran}(H + i)$ alteret az $M^- \supset \text{Ran}(H - i)$ altérre képezi. Először megmutatjuk, hogy $\text{Ker}(\tilde{U} - 1) = \{0\}$.

Ha $f \in M^+$, $\tilde{U}f = f$, $h \in \mathcal{D}(H)$, $g = (H + i)h$, akkor

$$\begin{aligned} 2i \langle h, f \rangle &= \langle (H - i)h - (H + i)h, f \rangle = \langle Ug - g, f \rangle = \\ &= \langle \tilde{U}g, \tilde{U}f \rangle - \langle g, f \rangle = 0. \end{aligned}$$

Mivel $\mathcal{D}(H)$ sűrű, így arra következtethetünk, hogy $f = 0$, azaz $\text{Ker}(\tilde{U} - 1) = \{0\}$. Ez azért lényeges, mert így a $\mathcal{D} = (\tilde{U} - 1)M^+$ értelmezési tartományon vektorait egyértelmű módon írhatjuk $(\tilde{U} - 1)g$ alakban, $g \in M^+$. Legyen $\tilde{H}$ úgy definiálva, hogy

$$(\tilde{H} + i)^{-1} = \frac{1}{2}i(\tilde{U} - 1).$$

Más szóval, $\tilde{H}f = (\tilde{U} + 1)g$, ha $f = i(\tilde{U} - 1)g$ és $g \in M^+$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle f_1, \tilde{H}f_2 \rangle &= \langle i(\tilde{U} - 1)g_1, (\tilde{U} + 1)g_2 \rangle = \\ &= \langle (\tilde{U} + 1)g_1, i(\tilde{U} - 1)g_2 \rangle = \\ &= \langle \tilde{H}f_1, f_2 \rangle. \end{aligned}$$

Ezért $\tilde{H}$ szimmetrikus. Bebizonyítottuk tehát a következőt.

2. lemma: *Legyen H egy szimmetrikus operátor. Ekkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van H szimmetrikus kiterjesztése és Cayley-transzformáltjának izometrikus kiterjesztései között.*

Egy szimmetrikus operátort **lényegében önadjungáltnak** nevezzük, ha lezárása önadjungált. (Mivel egy önadjungált operátor zárt, a definíció szerint természetesen lényegében önadjungált is.)

A lemmából vezethető le a következő.

5. tétel: *Legyen H egy szimmetrikus operátor. H -nak akkor és csak akkor van önadjungált kiterjesztése, ha az*

$$L^\pm = \text{Ran}(H \pm i)^\perp$$

alterek dimenziója megegyezik. Továbbá az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) H lényegében önadjungált,

$$(2) \dim L^+ = \dim L^- = 0,$$

(3) H -nak csak egy önadjungált kiterjesztése van. $\square$

Az $L^\pm$ altereket **defekt altereknek** nevezik. Érdemes megjegyezni, hogy $L^\pm = \text{Ker}(H^* \mp i)$.

10. példa: Legyen $\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2(0,1) : f \text{ abszolút folytonos, } f' \in L^2(0,1) \text{ és } f(0) = f(1)\}$ és $Af = -if'$. Parciális integrálással megmutatható, hogy A szimmetrikus operátor.

Belátjuk, hogy $A \pm i$ ráképezés, ami azzal ekvivalens, hogy a

$$-i \frac{d}{dt} f \pm if = g \quad (4.4.8)$$

differenciálegyenletnek tetszőleges $g \in L^2(0,1)$ esetén van f megoldása a $\mathcal{D}(A)$ halmazban. Valóban, a megoldás explicit módon megadható

$$f(t) = \pm \left(i \int_0^t e^{-x} g(x) dx + c \right) e^t, \quad (4.4.9)$$

ami a

$$c = i \frac{e}{1-e} \int_0^1 e^{-x} g(x) dx$$

paraméterválasztás mellett $\mathcal{D}(A)$ -beli függvény.

Hivatkozással az előző tételre megállapíthatjuk, hogy A lényegében önadjungált. Alább bizonyítjuk, hogy A zárt operátor, ezért önadjungáltnak kell lennie.

A gondolatmenet általános, érdemes a példától függetlenül is megjegyezni. Azt állítjuk, hogy, ha T egy szimmetrikus operátor, és $\lambda + i\mu - T$ ráképezés valamely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számokra, $\mu \neq 0$, akkor T zárt. A 1. lemma alapján elég megmutatni, hogy $(\lambda + i\mu) \in \rho(T)$. A 3. fejezet 14. tételének számolása szerint

$$\|[(\lambda + i\mu) - T]f\|^2 \geq \mu^2 \|f\|^2,$$

ami azt mutatja, hogy $(\lambda + i\mu) - T$ korlátos inverzzel rendelkezik, tehát $(\lambda + i\mu) \in \rho(T)$.

Most vizsgáljuk meg ugyanezzel a módszerrel a 4. példa T_1 differenciáloperátorát. A fentiekhez hasonlóan $T_1 \pm i$ képterének vizsgálatához, a (4.4.8) differenciálegyenletet kell tekinteni, aminek általános megoldása (4.4.9). A $f(0) = f(1) = 0$ kezdetiérték-feltétel az olyan g -ekre elégíthető ki, amelyekre

$$\int_0^1 e^{-x} g(x) dx = 0.$$

Ezért a $\text{Ran}(T_1 \pm i)^\perp$ alteret az e^{-x} függvény feszíti ki, mindkét defekt altér egydimenziós, ezért T_1 nem lényegében önadjungált, de van önadjungált kiterjesztése. Ez önmagában nem meglepő, hiszen a fenti A éppen egy önadjungált kiterjesztése T_1 -nek. T_1 egy önadjungált kiterjesztésének Cayley-transzformáltja az e^{-x} vektort egy számszorosába kell, hogy vigye. Mivel a Cayley-transzformált izometria, létezik $\alpha \in \mathbb{T}$, egy abszolút értékű komplex szám, hogy $e^{-x} \mapsto \alpha e^{-x}$ a Cayley-transzformált hatása. Minden $\alpha \in \mathbb{T}$ -re van T_1 -nek egy $T_1^{(\alpha)}$ önadjungált kiterjesztése. $\square$

11. példa: Legyen $\mathcal{D}(P) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R})\}$. Meg fogjuk mutatni, hogy a

$$Pf = -i \frac{d}{dt} f$$

differentiáloperátor önadjungált az $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert-téren.

Ha $f, g \in \mathcal{D}(P)$, akkor van olyan végtelenhez tartó t_n sorozat, hogy $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f(t_n) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} g(t_n) = 0$, és

$$\begin{aligned} \langle f, Pg \rangle &= \int -\overline{f(s)} i g'(s) ds = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-t_n}^{t_n} -\overline{f(s)} i g'(s) ds = \\ &= -i \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f(s)} g(s) \Big|_{-t_n}^{t_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-t_n}^{t_n} -i f'(s) g(s) ds = \\ &= \int -i \overline{f'(s)} g(s) ds = \\ &= \langle Pf, g \rangle. \end{aligned}$$

Megállapíthatjuk, hogy P szimmetrikus.

Ezután belátjuk, hogy $P \pm i$ ráképezés. A $P - i$ esetet részletezzük, $P + i$ hasonlóan tárgyalható. Azt kell tehát látnunk, hogy a

$$-i f' - i f = g$$

differentiálegyenletnek bármilyen $h \in L^2(\mathbb{R})$ mellett van megoldása $\mathcal{D}(P)$ -ben. Az

$$y' + \alpha y = g$$

egyenlet általános megoldása

$$y(x) = ce^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt.$$

Esetünkben $\alpha = 1$ és a c konstansot alkalmasan kell választanunk.

$$y(x) = e^{-x} \left(c + \int_0^x e^t g(t) dt \right)$$

a $+\infty$ -ben 0-hoz tart (ha $y \in \mathcal{D}(P)$), így

$$c = \int_{-\infty}^0 e^t g(t) dt.$$

Következésképpen

$$f(x) = e^{-x} \left(c + \int_0^x e^t g(t) dt \right) = \int_{-\infty}^x e^{t-x} g(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^s g(s+x) ds.$$

Megmutatjuk, hogy $f \in L^2(\mathbb{R})$. A becslésben felhasználjuk a $(T_s g)(x) = g(x + s)$ eltoláscsoportot, amely unitér operátorokból áll.

$$\begin{aligned}
 |\langle f, h \rangle| &= \left| \iint_{-\infty}^0 e^s \overline{g(s+x)} h(x) ds dx \right| \leq \\
 &\leq \iint_{-\infty}^0 e^s |g(s+x)| |h(x)| ds dx = \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^s \int |g(s+x)| |h(x)| dx ds = \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^s \langle |T_s g|, |h| \rangle ds \leq \\
 &\leq \int_{-\infty}^0 e^s \|g\| \|h\| ds = \|g\| \|h\|.
 \end{aligned}$$

Tehát $|\langle f, h \rangle| \leq \|g\| \|h\|$ minden h függvényre, amiből $\|f\| \leq \|g\|$. $\square$

4.5. Lényegében önadjungált operátorok

Lényegében önadjungált operátorokkal azért kényelmes bánni, mert értelmezési tartományul egy jól kezelhető függvényosztályt választhatunk, és ugyanakkor tudjuk, hogy a lezárása az operátornak önadjungált.

Először példákat mutatunk be lényegében önadjungált operátorokra a differenciáloperátorok köréből.

12. példa: A Schwartz-téren értelmezett $P_0(f) := -i f'$ operátor lényegében önadjungált.

Az állítás belátására az egyik lehetőség megmutatni, hogy P_0 lezárása a 11. példában tárgyalt önadjungált P operátor. Most azonban P_0 -nak a 7. példa Q_0 operátorával való kapcsolatára szeretnénk építeni. Ha f végtelen sokszor differenciálható gyorsan csökkenő függvény, akkor

$$P_0 f = \mathcal{F} Q \mathcal{F}^{-1} f \quad (4.5.10)$$

az $\mathcal{F}$ Fourier-transzformáció (2.7.23) tulajdonsága szerint. $\mathcal{F} Q \mathcal{F}^{-1}$ önadjungált és $\mathcal{S}$ -re való megszorításának a lezárása. Ezért P_0 lezárása $\mathcal{F} Q \mathcal{F}^{-1}$. $\square$

13. példa: Az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ Schwartz-téren értelmezett Laplace-operátor lényegében önadjungált.

Most is a Fourier-transzformációt hívhatjuk segítségül. A (4.5.10) összefüggéshez hasonlóan

$$\Delta f = \mathcal{F}^{-1} M_g \mathcal{F} f \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)), \quad (4.5.11)$$

ahol M_g a $g(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ függvénnyel való szorzás operátora. A 7. példa szerint M_g lényegében önadjungált a kompakt tartójú végtelen sokszor differenciálható függvények terén, és ezért a Schwartz-téren is. $\mathcal{F}$ olyan unitér transzformáció, amely az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ teret önmagába viszi. Így $\mathcal{F} M_g \mathcal{F}^{-1}$ lényegében önadjungált. $\square$

A következő tétel számos fontos esetben alkalmazható elégséges feltételt biztosít annak eldöntésére, hogy egy szimmetrikus operátor lényegében önadjungált legyen.

6. tétel: Legyen H egy szimmetrikus operátor és $(f_i) \subset \mathcal{D}(H)$ egy sajátvektorokból álló bázis. Ekkor H lényegében önadjungált az értelmezési tartományán.

Bizonyítás: Legyen az f_i -hez tartozó sajátérték λ_i . (λ_i egyébként valós, mert szimmetrikus operátor sajátértékei mindig valósak.) Ha $f =: \sum \alpha_i f_i \in \mathcal{H}$ és $f \in \mathcal{D}(H)$, akkor $Hf = \sum \lambda_i \alpha_i f_i$ és

$$\sum_i |\alpha_i|^2 < +\infty, \quad \sum |\lambda_i \alpha_i|^2 < +\infty.$$

A

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ \sum \alpha_i f_i : \sum (1 + \lambda_i^2) |\alpha_i|^2 < +\infty \right\}$$

halmazon értelmezzünk egy T operátort a

$$T \left(\sum \alpha_i f_i \right) = \sum \alpha_i \lambda_i f_i$$

képlettel. Ekkor $H \subset T$. Legyen S a $\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ halmaz lezárása, és $z \notin S$. Értelmezzünk egy A operátort az

$$A \left(\sum \gamma_i f_i \right) := \sum \gamma_i (z - \lambda_i)^{-1} f_i$$

képlettel. A korlátos és injektív. $(z - T)Af = f$ minden $f \in \mathcal{H}$ vektorra. Ezért $z \notin \sigma(H)$.

Mivel T spektruma nem a teljes $\mathbb{C}$, T egy zárt operátor. Könnyű látni, hogy T lezárása H -nak. $\square$

14. példa: Tekintsük a $D : f \mapsto -i f'$ differenciálás operátort a $(0, 1)$ nyílt intervallumon kompakt tartójú sima függvények $\mathcal{D}(D)$ terén. Parciális integrálással

$$\langle f, -i g' \rangle = -i [f, g] + \langle i f', g \rangle,$$

ahol $[f, g] := \lim_{x \rightarrow 1-} \overline{f}(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} \overline{f}(x)g(x)$. Ez természetesen mutatja, hogy D szimmetrikus, de azt is kiolvashatjuk, hogy ha D értelmezési tartományát bővíteni akarjuk a szimmetrikusság megőrzése mellett, akkor az

$$[f, f] = |f(0)|^2 - |f(1)|^2 = 0$$

feltételre ügyelnünk kell. Ha $f(1) = \alpha f(0)$ valamilyen $\alpha \in \mathbb{T}$ számra, akkor ez teljesül.

Legyen $\mathcal{D}_\alpha = \{f \in L^2[0, 1] : f \in C^\infty, f(1) = \alpha f(0)\}$. Ha $e^{i\varphi} = \alpha \in \mathbb{T}$, akkor a $H_\alpha : f \mapsto -i f'$ operátor lényegében önadjungált a $\mathcal{D}_\alpha$ értelmezési tartományon. Valóban, az $f_n(x) = \alpha^x e^{2i\pi n x}$ függvények ($n \in \mathbb{Z}$) sajátvektorokból álló bázist alkotnak, és H_α szimmetrikus. Az előző tétel szerint H_α lényegében önadjungált.

H_α spektruma $\varphi + 2\pi\mathbb{Z}$, és minden sajátérték egy multiplicitású. A rezolvens operátor $(\lambda - H_\alpha)^{-1}$ kompakt minden $\lambda \notin \varphi + 2\pi\mathbb{Z}$ értékre.

A $\overline{H_\alpha}$ operátorok D -nek önadjungált kiterjesztései. A lehetséges önadjungált kiterjesztések $\mathbb{T}$ -vel vannak paraméterezve. $\square$

15. példa: Tekintsük az egységgömb felületén sima függvényeken értelmezett

$$(\Lambda g)(\theta, \varphi) := \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} \right) (\theta, \varphi)$$

differenciáloperátort, ami gömbi koordinátákban van megadva.

$L^2(S, d\Omega)$ -ban az Y_{lm} gömbfüggvények bázist alkotnak, $m \in \mathbb{Z}$, $l \geq |m|$, lásd a 3. fejezet 28. példáját. A (2.8.30) differenciálegyenletből levezethető, hogy

$$\Lambda Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm} \quad (4.5.12)$$

azaz a gömbfüggvények sajátfüggvényei a Λ operátornak.

Így Λ lényegében önadjungált, $\Lambda \leq 0$ és a $l(l+1)$ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója $2l+1$, tehát a spektrum erősen degenerált. $\square$

Az előző példa Λ operátora szoros kapcsolatban áll a Laplace-operátorral, ugyanis a **Laplace-operátor polárkoordinátákban** a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Lambda \quad (4.5.13)$$

alakot ölti. $r^l Y_{lm}$ megoldása $\Delta u = 0$ egyenletnek $r^l Y_{lm}$ Descartes-féle koordinátákba átírva az x_1, x_2, x_3 változók homogén l -edfokú polinomja. Ezek a polinomok természetesen lineárisan függetlenek, hiszen az egységgömbre megszorítva az $L^2(S, d\Omega)$ tér bázisát adják. **Harmonikus polinomoknak** nevezik ezeket.

Az $f \in \mathcal{H}$ vektort a $\mathcal{H}$ -n értelmezett A lineáris operátor **analitikus vektorának** nevezzük, ha $f \in \mathcal{D}(A^n)$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re és létezik olyan $t > 0$ szám, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n f\|}{n!} t^n < +\infty. \quad (4.5.14)$$

Az elnevezés indoklásául a következő példa szolgálhat.

16. példa: Ha f analitikus vektora az A operátornak, akkor

$$F_A : z \mapsto \exp(zA)f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n f}{n!} z^n$$

vektor értékű analitikus függvény a $|z| < t$ körön, mert az azt megadó hatványsor a feltevés szerint abszolút konvergens. Ha A önadjungált, akkor az F_A vektorértékű függvényt analitikusan tovább terjeszthetjük a $S_t = \{z \in \mathbb{C} : -t < \operatorname{Re} z < t\}$ végtelen sávra. Ugyanis $z \in S_t$ esetén van olyan $s \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$z = z_0 + i s \quad \text{és} \quad |z_0| < t.$$

Ekkor

$$F_A(z) = e^{isA} F_A(z_0)$$

analitikus függvényt ad meg z egy környezetében (s -et állandóan tartva). e^{isA} egy unitér operátor. $\square$

Az önadjungált operátorok analitikus vektorai sűrű halmazt alkotnak. Ezt analitikus vektorok megadásával mutatjuk meg.

Legyen A egy önadjungált operátor, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, és E az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó spektrális projekció. Ha f olyan vektor, amelyre $Ef = f$ és $c > |a|, |b|$, akkor

$$\|A^n f\| \leq c^n \|f\|$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n f\|}{n!} t^n \leq \|f\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n t^n}{n!} = \|f\| e^{ct}.$$

f tehát analitikus vektor, a definícióban szereplő t helyébe bármilyen pozitív számot választhatunk. Az is következik, hogy egy önadjungált operátor analitikus vektorai sűrű halmazt alkotnak, hiszen a véges intervallumokhoz tartozó spektrális alterek egyesítése sűrű a Hilbert-térben.

7. tétel: (Nelson-tétel). *Legyen A egy szimmetrikus operátor a $\mathcal{D}(A)$ értelmezési tartományon. Ha $\mathcal{D}(A)$ tartalmaz analitikus vektorokból álló teljes rendszert, akkor A lényegében önadjungált.*

Magát a tételt nem bizonyítjuk, de hasznát az alábbi példán demonstráljuk.

17. példa: Tekintsük a 3. fejezet 52. példájának T operátorát! T az $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ téren hat, $T\delta_i = b_{i+1}\delta_{i+1}$. A $b_i \in \mathbb{R}^+$ számokról tételezzük fel, hogy növény sorozatot alkotnak. Az adjungált definíciójából $T^*\delta_i = b_i\delta_{i-1}$. Ha A a T és T^* operátorokból képezett k tényező szorzata, akkor A a δ_i bázisvektort egy másik bázisvektor számszorosába viszi. Például $(T^*TT)\delta_i = T^*Tb_{i+1}\delta_{i+1} = T^*b_{i+2}b_{i+1}\delta_{i+2} = b_{i+2}b_{i+2}b_{i+1}\delta_{i+1}$. Mivel b_i növény sorozat

$$\|A\delta_i\| \leq \prod_{j=1}^k b_{i+j}.$$

Ha ezt az egyenlőtlenséget alkalmazzuk $(T + T^*)^k$ kifejtésének minden tagjára, akkor

$$\|(T + T^*)^k \delta_i\| \leq 2^k \prod_{j=1}^k b_{i+j}.$$

δ_i biztosan analitikus vektora lesz a $T + T^*$ operátornak, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \prod_{j=1}^k b_{i+j}}{k!} t^k$$

véges. Tételezzük fel, hogy $b_i \leq i$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \left(\frac{b_{i+j}}{j} \right) (2t)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k (2t)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (4t)^k,$$

ami konvergens $0 < t < 1/4$ esetén. Megállapíthatjuk, hogy az (3.13.38) mátrixszal adott operátornak így minden kanonikus bázisvektor analitikus vektora lesz. Nelson tétele értelmében az operátor lényegében önadjungált.

A Hermite-függvények alkotta bázisban a Q koordináta operátormátrixa a fenti alakú, így újabb bizonyítást kaptunk Q lényegében való önadjungáltságra. $\square$

4.6. Sturm–Liouville-féle operátorok

Ebben a részben másodrendű differenciáloperátoroknak egy olyan klasszikus osztályát mutatjuk be, amin a nemkorlátos operátorok elméletének alkalmazása differenciálegyenletek megoldásához vezet.

18. példa: Tekintsük a $C^2[-1, 1]$ tartományon értelmezett $(Lf)(x) = ((x^2 - 1)f')'$ másodrendű differenciáloperátort:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x)(p(x)f'(x))' dx &= [g(x)p(x)f'(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g'(x)p(x)f'(x) dx = \\ &= [g(x)p(x)f'(x)]_{-1}^1 - [g'(x)p(x)f(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (p(x)g'(x))' f(x) dx. \end{aligned}$$

Ha $p(x) = x^2 - 1$, akkor $p(\pm 1) = 0$, és számolásunk mutatja, hogy L szimmetrikus operátor. L sajátfüggvényei az

$$(1 - x^2)f'' - 2xf' + \lambda f = 0 \quad (4.6.15)$$

egyenlet megoldásai. Ezzel a differenciálegyenlettel már találkoztunk a **Legendre-polinomok** kapcsán, lásd (2.8.31). Nevezetesen $\lambda = n(n+1)$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén az n -edfokú Legendre-féle polinom egy megoldása az egyenletnek. Mivel a Legendre-féle polinomok bázist alkotnak, így L a $C^2[-1, 1]$ tartományon lényegében önadjungált. Az is következik, hogy a tekintettől különböző λ -kra a (4.6.15) differenciálegyenletnek nincsen megoldása. $\square$

Az $f \mapsto (pf')' + gf$ alakú differenciáloperátorokat **Sturm–Liouville-féle operátoroknak** nevezik. A fenti L is ilyen alakú, és a következő példa is egy ilyen operátort tartalmaz. A példa után térünk rá az általános Sturm–Liouville-operátorok spektrálméletére.

19. példa: Legyen $\mathcal{D}(H_D) = \{f \in C^2[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$ és $H_D(f) = -f''$. A H_D operátor a 5. példa alapján szimmetrikus az $L^2[0, \pi]$ téren. H_D sajátfüggvényei

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az ehhez a függvényhez tartozó sajátérték n^2 . Mivel a f_n függvények egy bázist alkotnak $L^2[0, \pi]$ -ben (lásd az 3. fejezet 26. példáját), a H_D operátor lényegében önadjungált.

$0 \notin \sigma(\overline{H_D})$, így a korlátos inverz: H_D^{-1} létezik, és egy kompakt operátor. Ha egy operátor inverzét vagy általánosabban véve rezolvensét integráloperátorként lehet előállítani, akkor annak magfüggvényét gyakran az operátor **Green-függvényének** nevezik. Ha

$$K(x, y) = \begin{cases} (1 - \pi^{-1}y)x, & \text{ha } 0 \leq x \leq y \leq \pi, \\ (1 - \pi^{-1}x)y, & \text{ha } 0 \leq y \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

és

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi K(x, y)g(y) dy = \int_0^x (1 - \pi^{-1}x)y g(y) dy + \int_x^\pi (1 - y\pi^{-1})x g(y) dy = \\ &= -x\pi^{-1} \int_0^\pi y g(y) dy + \int_0^x y g(y) dy + x \int_x^\pi g(y) dy, \end{aligned}$$

akkor világos, hogy $f(0) = f(\pi) = 0$. Továbbá

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\pi^{-1} \int_0^\pi y g(y) dy + x g(x) + \int_x^\pi g(y) dy - x g(x), \\ f''(x) &= -g(x). \end{aligned}$$

Tehát a $K(x, y)$ magfüggvénynek megfelelő integráloperátor H_D inverzét adja. $\square$

Legyen $0 < p \in C^1[a, b]$ és $q \in C[a, b]$ két valós függvény. Ezek adják meg az

$$Lf = (pf')' + qf \quad (4.6.16)$$

differenciáloperátort, amelynek $\mathcal{D}(L)$ értelmezési tartománya az olyan kétszer folytonosan differenciálható komplex értékű f függvényekből áll, amelyek eleget tesznek az

$$a_1 f(a) + a_2 f'(a) = 0, \quad (4.6.17)$$

$$b_1 f(b) + b_2 f'(b) = 0 \quad (4.6.18)$$

határfeltételnek. Az adott a_1, a_2, b_1 és b_2 valós számokról feltételezzük, hogy $|a_1| + |a_2| > 0$ és $|b_1| + |b_2| > 0$, más szóval az $a_1 = a_2 = 0$ és $b_1 = b_2 = 0$ eseteket kizárjuk. Ha az összes fenti feltétel teljesül, akkor L -et **reguláris Sturm–Liouville-féle operátornak** nevezzük $L^2[a, b]$ -n.

3. lemma: Ha $f, g \in \mathcal{D}(L)$, akkor

$$fLg - gLf = \frac{d}{dx} [p(fg' - gf')].$$

Valóban,

$$\begin{aligned} fLg - gLf &= f(pg')' + qfg - g(pf')' - qfg = \\ &= \frac{d}{dx} [p(fg' - gf')]. \end{aligned}$$

A lemmát annak belátására használjuk fel, hogy L szimmetrikus:

$$\begin{aligned} \langle f, Lg \rangle - \langle Lf, g \rangle &= \int_a^b \frac{d}{dx} [p(\bar{f}g' - g\bar{f}')] dx = \\ &= p(b) [\bar{f}(b)g'(b) - g(b)\bar{f}'(b)] - \\ &\quad - p(a) [\bar{f}(a)g'(a) - g(a)\bar{f}'(a)]. \end{aligned}$$

Ha $f, g \in \mathcal{D}(L)$, akkor

$$\begin{bmatrix} \bar{f}(a) & \overline{f'(a)} \\ g(a) & g'(a) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} \bar{f}(b) & \overline{f'(b)} \\ g(b) & g'(b) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$$

a peremfeltétel alapján. Itt a 2×2 -es mátrixokat nem 0 vektorokra alkalmazva kapjuk a 0-t, tehát a mátrixok nem invertálhatók, determinánsuk 0:

$$\begin{aligned} \bar{f}(a)g'(a) - g(a)\overline{f'(a)} &= 0, \\ \bar{f}(b)g'(b) - g(b)\overline{f'(b)} &= 0. \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy

$$\langle f, Lg \rangle - \langle Lf, g \rangle = 0$$

a fenti számolásban, vagyis az L operátor szimmetrikus.

A továbbiakban feltételezzük, hogy $\lambda = 0$ nem sajátértéke az L operátornak, és $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(L)$ lineárisan független megoldásai az $Lf = 0$ (homogén) egyenletnek az (4.6.17) és (4.6.18) kezdeti feltétellel. Az L operátor inverzét egy $K(x, t)$ magfüggvénnyel fogjuk megadni. Így az $Lf = g$ inhomogén egyenlet f megoldása

$$f(x) = L^{-1}g(x) = \int_a^b K(x, t)g(t) dt$$

alakban áll elő. A magfüggvény pontos alakja a következő:

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{f_2(x)f_1(t)}{p(t)w(t)}, & \text{ha } a \leq t < x, \\ \frac{f_1(x)f_2(t)}{p(t)w(t)}, & \text{ha } x < t \leq b, \end{cases} \quad (4.6.19)$$

ahol $w(t) = f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t)$ a homogén egyenlet megoldásaihoz kapcsolódó, ún. **Wronski-féle determináns**.

A leírt folytonos $K(x, t)$ magfüggvénnyel (4.6.19)-ben adott f függvényen kiszámolva az L operátor hatását g -t kapunk. Ezt nem nézzük meg részletesen, inkább azt mutatjuk meg, hogy hogyan juthatunk el a $K(x, t)$ magfüggvény fenti alakjához.

A differenciálegyenletek elméletében megszokott módon az $Lf = g$ egyenlet általános megoldását

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + f_p(x)$$

alakban keressük, ahol $f_p(x)$ az $Lf = g$ (inhomogén) egyenlet egy partikuláris megoldása és f_1, f_2 a homogén egyenlet lineárisan független megoldásai. A paraméterek variálása módszer alapján $f_p(x)$ -et

$$f_p(x) = v_1(x)f_1(x) + v_2(x)f_2(x)$$

alakban próbáljuk keresni. A $v_1(x)$ és $v_2(x)$ együttható függvényekre a

$$v_1'(x)f_1(x) + v_2'(x)f_2(x) = 0$$

pótlólagos feltevést tesszük. Ennek haszna a

$$f_p'(x) = v_1 f_1' + v_2 f_2'$$

tulajdonság, amiből

$$f_p'' = v_1 f_1'' + v_2 f_2'' + v_1' f_1' + v_2' f_2'.$$

Behelyettesítve az $Lf = h$ egyenletbe adódik, hogy

$$v_1(pf_1'' + p'f_1' + qf_1) + v_2(pf_2'' + p'f_2' + qf_2) + p(v_1'f_1' + v_2'f_2') = h.$$

Mivel f_1 és f_2 az $Lf = 0$ homogén egyenlet megoldásai, itt az első két tag eltűnik, és

$$v_1'f_1' + v_2'f_2' = \frac{h}{p}.$$

v_1' -re és v_2' -re egy lineáris egyenletrendszerünk van, amit megoldunk:

$$v_1'(x) = -\frac{h(x)f_2(x)}{p(x)w(x)} \quad \text{és} \quad v_2'(x) = \frac{h(x)f_1(x)}{p(x)w(x)}.$$

Az általános elméletből tudjuk, hogy $w(x)$ nem lehet 0 $[a, b]$ egyetlen pontjában sem. A konkrét esetben megmutatható, hogy

$$p(x)w(x)$$

állandó $[a, b]$ -n. Integrálunk:

$$v_1(x) = -\int c h(x)f_2(x) dx, \quad v_2(x) = \int c h(x)f_1(x) dx.$$

Végül

$$\begin{aligned} f_p(x) &= -c f_1(x) \int_b^x h(t)f_2(t) dt + c f_2(x) \int_a^x h(t)f_1(t) dt = \\ &= \int_a^x c f_2(x)f_1(t)h(t) dt + \int_x^b c f_1(x)f_2(t)h(t) dt. \end{aligned}$$

Ha a $K(x, t)$ **Green-függvényt** a

$$K(x, t) = \begin{cases} c f_2(x)f_1(t), & \text{ha } a \leq t < x, \\ c f_1(x)f_2(t), & \text{ha } x < t \leq b \end{cases}$$

képlettel értelmezzük, akkor

$$f_p(x) = \int_a^b K(x, t)h(t) dt.$$

8. tétel: A $K(x, t)$ Green-függvénnyel mint magfüggvénnyel adott T integráloperátor kompakt és önadjungált, sajátértékei egy multiplicitásúak.

Bizonyítás: T kompakt (ráadásul Hilbert–Schmidt-féle), hiszen a $K(x, t)$ magfüggvény folytonos, és ezért négyzetesen integrálható. $T = T^*$ következik a magfüggvény szimmetriájából.

T sajátfüggvényei helyett L sajátfüggvényeit is vizsgálhatjuk, ugyanazok, csak a megfelelő sajátértékek mások. Legyen $Lu = \lambda u$ és $Lv = \lambda v$ lineárisan független u -ra és v -re. A peremfeltételből

$$\begin{aligned} a_1 u(a) + a_2 u'(a) &= 0, \\ a_1 v(a) + a_2 v'(a) &= 0. \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0,$$

ami ellentmondana a lineáris függetlenségnek. □

A reguláris Sturm–Liouville-féle operátorhoz van sajátfüggvényekből álló bázis, ezért a 6. tétel alapján megállapíthatjuk, hogy L lényegében önadjungált.

4.7. A Laplace-operátor

A Laplace-operátor nagyon sok alkalmazásban előforduló differenciáloperátor. Általános formája

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Spektráleméleti szempontból nagy különbség van a teljes téren és a korlátos tartományon tekintett operátor között. A 19. példa az egydimenziós Laplace-operátorról szólt a Dirichlet-féle peremfeltétellel. Az operátor inverze kompakt. Korlátos tartományon a Laplace-operátor több dimenzióban is hasonlóan viselkedik.

9. tétel: *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sima határral rendelkező korlátos tartomány. A Δ_D Laplace-operátor a kétszer folytonosan differenciálható és a Dirichlet-féle peremfeltételnek eleget tevő függvények terén lényegében önadjungált operátor. Δ_D lényeges spektruma üres és rezolvense kompakt.*

A **Green-formulából** következik, hogy a tételben szereplő **Dirichlet-féle Δ_D Laplace-operátorra** $\langle f, \Delta_D f \rangle \leq 0$, ezért Δ_D sajátértékei negatívak. A sajátértékek explicit meghatározása csak néhány esetben lehetséges, a numerikus meghatározás sem könnyű. Például, ha Ω a kétdimenziós egységkör (lemez), akkor numerikusan a $\lambda_1 = -5,784$, $\lambda_2 = -14,684$, $\lambda_3 = -14,684$, $\lambda_4 = -26,378$, $\lambda_5 = -26,378$, $\lambda_6 = -30,470$ stb. értékek adódnak.¹²

A **Neumann-féle Laplace-operátorra** hasonló tétel igaz.

A Laplace-operátorok spektrálemélete bizonyos **parciális differenciálegyenletek** megoldására is használható. Tekintsük a

$$\Delta f = g \quad \text{és} \quad f|_{\partial\Omega} \equiv 0$$

feladatot egy adott g függvénnyel a korlátos sima határral rendelkező Ω tartományon, f az ismeretlen függvény. A peremfeltétel mutatja, hogy a feladat a Dirichlet-féle Δ_D Laplace-operátorra vonatkozik. Ha $K(x, y)$ a megfelelő Green-függvény, akkor

$$f(x) = \Delta_D^{-1} g = \int_{\Omega} K(x, y) g(y) dy. \quad (4.7.20)$$

Egy másik lehetőség a feladat megoldására a sajátfüggvények szerinti sorfejtés. Legyen h_n a Δ_D operátor sajátfüggvényeiből álló bázis $L^2(\Omega)$ -ban. Ekkor $g = \sum_n c_n h_n$ együtthatók valamely c_n sorozatára. Az f megoldást $f = \sum_n a_n h_n$ alakban keressük. Ha $\Delta_D h_n = \lambda_n h_n$, akkor, akkor az ismeretlen a_n együtthatókra a $\lambda_n a_n = c_n$ feltételeknek kell teljesülni, tehát $a_n = c_n / \lambda_n$.

20. példa: (A harmonikus oszcillátor) A kvantummechanikában az egy dimenziós harmonikus oszcillátor energia (vagy Schrödinger-) operátora

$$(Hf)(x) = -f''(x) + \omega^2 x^2 f(x)$$

alakú.¹³ (Értelmezési tartománynak az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ -teret vehetjük.) H maga egy Sturm–Liouville-féle operátor, *szingulárisnak* mondják, mert nem véges intervallumon van vége. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy H szimmetrikus. Sajátfüggvényeinek felderítéséhez a

$$Hf = \lambda f$$

differenciálegyenletet kell megoldani. Ez a változók transzformálásával (x helyébe $\sqrt{\omega}x$, λ helyébe $\omega\lambda$)

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f = \lambda f$$

alakot ölti, majd a $f(x) = e^{-x^2/2}g(x)$ helyettesítéssel a

$$g'' - 2xg' + (\lambda - 1)g = 0$$

Hermite-féle differenciálegyenlethez jutunk, amelynek megoldása $\lambda = 2n + 1$ esetén a $H_n(x)$ n -edfokú Hermite-polinom, lásd (2.8.37).

$$\varphi_n(x) = c_n H_n(\sqrt{\omega}x) \exp(-\omega x^2/2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

a c_n normálási konstansok alkalmas választásával egy sajátfüggvényekből álló bázis az $L^2(\mathbb{R})$ térben. Így a H operátor lényegében önadjungált (vesd össze a 6. tétellel). A $\varphi_n(x)$ függvényeket az $\omega = 1$ esetben *Hermite-függvényeknek* nevezik. (Néhány Hermite-függvény grafikonját a 3. fejezetben ábra is mutatja.)

A továbbiakban a $\omega = 1$ egyszerűsítéssel élünk. Annak ellenére, hogy H szinguláris Sturm–Liouville-féle operátor, a reguláris esethez hasonlóan létezik kezelhető Green-függvénye. H -nak a 0 nem sajátértéke, így a H^{-1} operátort előállíthatjuk magfüggvény segítségével. Legyen

$$g(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \Phi(x)\Phi(y), & \text{ha } x \leq y, \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \Phi(y)\Phi(x), & \text{ha } y < x, \end{cases}$$

ahol $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$ (lényegében egy Gauss-eloszlás eloszlásfüggvénye). Többkevesebb számolással adódik, hogy

$$H^{-1}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(y) dy,$$

pontosabban

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(y) dy \quad \text{esetén} \quad Hh = f$$

folytonos $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvényekre. Tehát a folytonos szimmetrikus $g(x, y)$ függvény a H operátor Green-függvénye. Megfelelő becslések segítségével közvetlenül igazolható, hogy

$$\iint |g(x, y)|^2 dx dy < +\infty.$$

Mivel H spektrális előállítását ismerjük, és tudjuk már, hogy $g(x, y)$ Green-függvény, egy másik utat is járhatunk:

$$\begin{aligned} \iint |g(x, y)|^2 dx dy &= \sum_{n, m} \left| \iint g(x, y) \varphi_n(x) \varphi_m(y) dx dy \right|^2 = \\ &= \sum_{n, m} |\langle \varphi_n, H^{-1} \varphi_m \rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

A kapott sor evidens módon konvergens (összege $\pi^2/8$).

A kétdimenziós harmonikus oszcillátor Schrödinger-operátora (a forgásszimmetrikus esetben)

$$(H_2 f)(x, y) = - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) f(x, y) + (x^2 + y^2) f(x, y).$$

A $\varphi_n(x)\varphi_m(y)$ alakú függvények bázisát adják $L^2(\mathbb{R}^2)$ -nek, ha $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Az egydimenziós oszcillátorról elmondottakat felhasználva

$$H_2 \varphi_n(x) \varphi_m(y) = (2n + 2m + 2) \varphi_n(x) \varphi_m(y).$$

Így H_2 sajátértékei $2, 4, 6, \dots$. A 2 sajátérték kivételével többszörös multiplicitásúak: $2k$ multiplicitása, annyi, ahányféleképpen $k - 1$ előáll nemnegatív egészek összegeként, ez éppen k .

A fizikai interpretációban a sajátértékek energiaszinteket jelentenek. A legkisebb 2 sajátértékhez egyetlen sajátfüggvény tartozik, ez adja a legkisebb energiájú, úgynevezett **alapállapotot**. A 4 sajátértékhez már két sajátfüggvény tartozik, $\varphi_1(x)\varphi_0(y)$ és $\varphi_0(x)\varphi_1(y)$. Ez az energiaszint már „degenerált”. Magasabb energiaszinteken a degeneráltság még nagyobb. $\square$

21. példa: (A hidrogénatom) A protonból és elektronból álló hidrogénatom energiaoperátora

$$Hf(x, y) = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_x f(x, y) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_y f(x, y) - \frac{e^2}{\|x - y\|} f(x, y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^3)$$

az $L^2(\mathbb{R}^6)$ Hilbert-téren. Fizikailag H első tagja az m_1 tömegű és e töltésű protonnak, a második az m_2 tömegű és $-e$ töltésű elektronnak, a harmadik pedig a Coulomb-kölcsönhatásnak felel meg.¹⁴ H értelmezési tartományának a gyorsan csökkenő függvények $\mathcal{S}(\mathbb{R}^6)$ terét tekinthetjük. Célunk az, hogy belássuk: H lényegében önadjungált.

Az

$$u = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}, \quad v = y - x$$

transzformációt hajtjuk végre. (u a tömegközéppont helye, v pedig az elektronnak a protonhoz viszonyított helyzete.) A transzformáció Jacobi-determinánsa 1, így $L^2(\mathbb{R}^6)$ -nak egy U unitér operátorát indukálja. (E tény részletesebb tárgyalása megtalálható az 3. fejezet 26. példájában.) U a Schwartz-teret önmagába képezi.

$$U^* H U g(u, v) = -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \Delta_u g(u, v) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_v g(u, v) - \frac{e^2}{\|v\|} g(u, v),$$

ahol $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. A transzformáció matematikai jelentősége az, hogy a vizsgált operátor egy olyan összegre bomlik, amelynek egyik tagja csak az u változóban, másik tagja (amely valójában a fenti második és harmadik tag összege) a v változóban hat. A változókat sikerült szétválasztani, ami azért előnyös, mert ha a $L^2(\mathbb{R}^6)$ teret az $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$ tenzorszorzattal azonosítjuk, akkor

$$U^* H U = H_1 \otimes \text{id}_2 + \text{id}_1 \otimes H_2,$$

ahol H_1 az u változóban ható Laplace-operátor konstansszorozója és

$$H_2 g(v) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta g(v) - \frac{e^2}{\|v\|} g(v).$$

A Laplace-operátorról tudjuk, hogy lényegében önadjungált $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ -on, és ki fogjuk mutatni, hogy H_2 is az. Ez elegendő ahhoz, hogy $U^* H U$ lényegében önadjungált legyen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ -on. Ezt a kijelentést itt bizonyítás nélkül elfogadjuk, valójában a következő eredményt használjuk. Ha $\mathcal{D}_1$ -en H_1 lényegében önadjungált, és $\mathcal{D}_2$ -en H_2 lényegében önadjungált, akkor $H_1 \otimes \text{id}_2 + \text{id}_1 \otimes H_2$ lényegében önadjungált lesz a

$$\{f \otimes g : f \in \mathcal{D}_1, g \in \mathcal{D}_2\}$$

vektorok által feszített altéren. Esetünkben $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, és az $f(u)g(v)$ függvények által feszített altér része $\mathcal{S}(\mathbb{R}^6)$ -nak. Ezen $U^* H U$ tehát lényegében önadjungált. Mivel U invariánsan hagyja $\mathcal{S}(\mathbb{R}^6)$ -ot, maga H is lényegében önadjungált lesz.

H_1 -ről tudjuk, hogy folytonos a spektruma. Fizikailag ez a tag adja az atom (azaz a proton és elektron tömegközéppontja) haladó szabad mozgásának a folytonos energiáját. H_2 a tömegközépponthoz viszonyított relatív mozgás energiája, amiben nem az elektron valódi m_2 tömege, hanem a tömegként megjelenő μ mennyiség szerepel, **redukált tömegként** is emlegetik. H_2 -ről ki fog derülni, hogy van olyan bázisa az $L^2(\mathbb{R}^3)$ térnek, amely sajátvektoraiból áll, sőt, ami jóval több H_2 kompakt.

Újabb koordináta-transzformációt hajtunk végre, áttérünk térbeli polárkoordinátákra. A transzformáció mögött most is egy unitér operátor áll, $V : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+ \times S^2, drd\Omega)$,

$$(Vf)(r, \theta, \varphi) = rf(x),$$

ahol $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$, $x_3 = r \cos \theta$ és $x = (x_1, x_2, x_3)$. $d\Omega$ a gömbfelületen a felszín szerinti integrálást jelöli.

$$V H_2 V^* \psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{e^2}{r} \psi, \quad (4.7.21)$$

amiben megjelenik a 4.5.12 példa Λ differenciáloperátora. Az egyszerűség kedvéért áttérünk olyan egységekre, hogy $\hbar = 1$, $e^2 = 2$ és $\mu = 1/2$ legyen. Ekkor:

$$K := V H_2 V^* = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{2}{r} - \frac{1}{r^2} \Lambda. \quad (4.7.22)$$

Az $L^2(\mathbb{R}^+ \times S^2, drd\Omega)$ tér szorzatra bontható, $L^2(\mathbb{R}^+) \otimes L^2(S^2, d\Omega)$. A $L^2(S^2, d\Omega)$ téren ható Λ operátor spektrális felbontása ismeretes: Minden l nemnegatív egész számhoz van egy $\mathcal{H}_l$ sajátaltér, amit az Y_{lm} gömbfüggvények feszítenek ki, $|m| \leq l$. Tehát $\mathcal{H}_l$ dimenziója $2l + 1$. Λ megszorítva $\mathcal{H}_l$ -re $-l(l + 1)$ -gyel való szorzásként viselkedik. Ha $\psi(r, \theta, \varphi) \in L^2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{H}_l$, akkor

$$K\psi = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi - \frac{2}{r} \psi + l(l + 1) \frac{1}{r^2} \psi.$$

Legyen $K_l := K|_{L^2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{H}_l}$. A $K_l \psi = E\psi$ sajátfüggvény egyenlet ψ megoldását $\psi = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ formában keressük. Ekkor a radiális R függvényre a

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) - \frac{2}{r} R(r) + l(l + 1) \frac{1}{r^2} R(r) = ER(r)$$

differenciálegyenletet kapjuk, amiben E egyelőre meghatározatlan valós szám. Az egyenlet egyszerűsödik az $u(r) = rR(r)$ változóban:

$$u''(r) + \left(E + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u(r) = 0, \quad (4.7.23)$$

ugyanis

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) = ru''(r).$$

Az (4.7.23) egyenlet analízisét nem részletezzük. Négyzetesen integrálható megoldása akkor van, ha az E szám $-1/n^2$ alakú, $n \in \mathbb{N}$, és $l < n$. Az egyenlet megoldása egy $v(r)$ függvény bevezetésével történik, legyen $u(r) = e^{-r/n} r^{l+1} v(r)$. Ekkor

$$t \frac{d^2 v}{dt^2} + (2l + 2 - t) \frac{dv}{dt} + (n - l - 1)v = 0,$$

ahol $t = 2r/n$. A kapott egyenletet összevethetjük a 3. fejezet (2.8.40) egyenletével. $\alpha = 2l + 1$ és $n - l - 1 \geq 0$ egész szám. A megoldás $L_{n-l-1}^{(2l+1)}(t)$ és a radiális sajátfüggvények

$$R_{nl}(r) = c_{nl} e^{-r/n} \left(\frac{2r}{n} \right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{n} \right) \quad (4.7.24)$$

c_{nl} a normalizáló konstans, értéke az

$$\int r^2 R_{nl}^2(r) dr = 1$$

feltételből számolható. (Ez az egyenlet sajnos különbözik (2.8.41)-től, de azért a Laguerre-polinomokra vonatkozó rekurzió segítségével arra visszavezethető.)

A K_l operátor sajátértékei hagyományos egységekben a

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2n^2 \hbar^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (4.7.25)$$

számok, $l < n$. A megfelelő sajátfüggvények teljes rendszert alkotnak, mert rögzített l -re $R_{n,l}$ teljes rendszer. (Utóbbi egy nem részletezett állítás.) Ezért K_l spektrális előállítását ismerjük. K_l egy kompakt önadjungált operátor. Sajátértékei véges multiplicitásúak, pontosabban $2l + 1$ mindegyiknek a multiplicitása, és a 0-hoz tartanak.

A K_l operátorokból összerakjuk magát a K operátort. Ez is egy kompakt önadjungált operátor (4.7.25) sajátértékekkel és

$$R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

sajátfüggvényekkel. Rögzített n -re l lehetséges értékei $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$, és $|m| \leq l$. Az E_n -hez tartozó sajátaltér dimenziója

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2l + 1 = n^2.$$

A sajátfüggvények mind

$$C e^{-r/n} p_1(r) p_2(x, y, z) r^{-l}$$

alakúak, alkalmas C állandóval, egyváltozós p_1 polinommal és háromváltozós p_2 polinommal. Ezért gyorsan csökkenő sima függvények.

Az n, l, m paramétereket a fizikában **főkvantumszámnak**, **mellékkvantumszámnak**, ill. **mágneses kvantumszámnak** nevezik. Az E_n értékek kiszámítása és a mért spektrummal való megegyezése a kvantumelmélet első győzelmei közé tartozott 1925–26-ban. $\square$

4.8. Egyparaméteres unitér csoportok

Egyparaméteres unitér csoportokkal már találkoztunk a 3. fejezetben. Láttuk, hogy adott korlátos önadjungált A operátorra $U(t) := \exp(itA)$ olyan egyparaméteres unitér csoport, amelyre a $t \mapsto U(t)$ megfeleltetés normában folytonos. Most ennél enyhébb folytonossági követelményt teszünk. A csoport **erős folytonossága** az so topológiában való folytonosságot jelenti, azaz

$$t \mapsto U(t)x$$

folytonos minden x Hilbert-tér vektorra. (Érdemes megjegyezni, hogy a 3. fejezet 24. példája szerint az erős folytonosság az összes $t \mapsto \langle y, U(t)x \rangle$ függvények folytonosságával egyenértékű.)

A **Stone-tétel** kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot állapít meg az önadjungált operátorok és a folytonos egyparaméteres unitér operátorcsoportok között.

10. tétel: (Stone-tétel) *Legyen $U(t) \in B(\mathcal{H})$ egy erősen folytonos egyparaméteres unitér csoport. Ekkor létezik egy $A = A^*$ önadjungált operátor, amelyre $U(t) = \exp(itA)$.*

Bizonyítás: Legyen

$$Ax := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(s) - I}{is} x \quad (4.8.26)$$

azon $x \in \mathcal{H}$ vektorokra, amelyekre a határérték (normában) létezik. Ezt az A lineáris operátort a csoport **generátorának** nevezzük. Először megmutatjuk, hogy a generátor $\mathcal{D}(A)$ értelmezési tartománya sűrű halmaz.

Legyen

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ x_f := \int f(t) U_t x \, dt : x \in \mathcal{H}, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \right\}.$$

Itt a folytonos (és kompakt tartójú) $t \mapsto f(t) U_t x$ vektorértékű függvény integrálját a következőképpen értjük. Rögzített $x \in \mathcal{H}$ -ra

$$F_x : y \longmapsto \int \langle f(t) U_t x, y \rangle \, dt$$

egy korlátos lineáris funkcionál, így a Riesz reprezentációs tétel szerint létezik egy $x_f \in \mathcal{H}$ vektor, amelyre

$$\langle x_f, y \rangle = \int \langle f(t) U_t x, y \rangle \, dt.$$

Mivel

$$|F_x(y)| \leq \int |\langle f(t) U_t x, y \rangle| \, dt \leq \|y\| \int \|f(t) U_t x\| \, dt,$$

azt kapjuk, hogy

$$\|x_f\| \leq \int \|f(t)U_t x\| dt = \|x\| \int |f(t)| dt.$$

Legyen j_ε az approximatív egység az 3. fejezet 5. példájából. Ekkor

$$\begin{aligned} \|x - x_{j_\varepsilon}\| &= \left\| \int j_\varepsilon(t)(U_t - I)x dt \right\| \leq \int j_\varepsilon(t)\|(U_t - I)x\| dt \leq \\ &\leq \int j_\varepsilon(t) dt \times \sup\{\|(U_t - I)x\| : -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon\} = \\ &= \sup\{\|(U_t - I)x\| : -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon\} \end{aligned}$$

bármilyen $x \in \mathcal{H}$ vektorra. A jobb oldal tart 0-hoz $U(t)$ feltételezett folytonossága alapján, így $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén $x_{j_\varepsilon} \rightarrow x$. Ez mutatja, hogy a $\mathcal{D}_0$ halmaz sűrű.

$$\frac{U_s - I}{i s} x_f = \frac{1}{i s} \int f(t)[U(s+t) - U(t)]x dt = \int \frac{f(t-s) - f(t)}{i s} U(t)x dt.$$

(Az integrandus normájának van integrálható majoránsa, hiszen f kompakt tartójú.) Az $s \rightarrow 0$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$Ax_f = i \int f'(t)U_t x dt = x_{i f'}.$$

Nevezetesen, $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(A)$. Ráadásul a $\mathcal{D}_0$ halmazon pontosan ismerjük az A generátor hatását.

Legyen $A_0 := A \upharpoonright \mathcal{D}_0$. Célunk most az, hogy bebizonyítsuk, hogy A_0 lényegében önadjungált.

Ha T_t az eltolás csoport $L^2(\mathbb{R})$ -en, lásd a 32. példát a 3. fejezetben, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$U(s)x_f = x_{T(-s)f} \quad \text{és} \quad A_0 U(s)z = U(s)A_0 z,$$

minden $z \in \mathcal{D}_0$ -ra.

Kiszámolható, hogy

$$\langle A_0 x_f, x_g \rangle = \langle x_f, A_0 x_g \rangle$$

minden $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ esetén (parciális integrálás). Tehát A_0 szimmetrikus. A lényegében önadjungált tulajdonság igazolásához a 5. tételt használjuk fel.

Legyen $y \in \mathcal{D}(A_0^*)$ és tételezzük fel, hogy $A_0^* y = i y$. Ekkor

$$\frac{d}{ds} \langle y, U(s)z \rangle = \left\langle y, \frac{dU(s)}{ds} z \right\rangle = -i \langle A_0^* y, U(s)z \rangle = \langle y, U(s)z \rangle$$

érvényes minden $z \in \mathcal{D}_0$ vektorra. Ez egy differenciálegyenlet, aminek megoldása

$$\langle y, U(s)z \rangle = \langle y, z \rangle e^s$$

az $U(0) = I$ -ből adódó kezdeti érték miatt. Mivel ez s -nek korlátos függvénye kell, hogy legyen, $\langle y, z \rangle = 0$ kell, hogy teljesüljön. Mivel $z \in \mathcal{D}_0$ tetszőleges volt, $y = 0$. Hasonlóan látható, hogy $A_0^* y = -i y$ ugyancsak az $y = 0$ esetben lehetséges. Az idézett tétel szerint A_0 lényegében önadjungált.

Jelölje B A_0 önadjungált kiterjesztését, azaz $B = \overline{A_0}$. Be kell látnunk, hogy $U(s) = e^{isB}$, amit abban a formában érünk el, hogy $y(s) := U(s)z - e^{isB}z$ azonosan 0 minden $z \in \mathcal{D}_0$ -ra. $y(s)$ első tagja differenciálható

$$\frac{d}{ds}U(s)z = i A_0 U(s)z .$$

$e^{isB}z$ differenciálhatóságához $z \in \mathcal{D}(B)$ -ra és a Lebesgue-féle konvergenciatételre van szükségünk:

$$\left\| \frac{(e^{isB} - I)z}{is} - Bz \right\|^2 = \int \left| \frac{e^{is\lambda} - 1}{is} - \lambda \right|^2 d\langle z, E(\cdot)z \rangle$$

az integrandus 0-hoz tart, ha $s \rightarrow 0$ és

$$\left| \frac{e^{is\lambda} - 1}{is} - \lambda \right| \leq 2|\lambda|$$

biztosít integrálható majoráló függvényt, ugyanis

$$\int |\lambda|^2 d\langle z, E(\cdot)z \rangle < +\infty$$

a spektráltétel szerint ekvivalens $z \in \mathcal{D}(B)$ -val, ami feltevésünk szerint fennáll.

$e^{isB}z$ differenciálható a 0-ban, és így mindenütt

$$\frac{d}{ds}e^{isB}z = i B e^{isB}z .$$

Most differenciáljuk az $\|y(s)\|^2$ függvényt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\|y(s)\|^2 &= \frac{d}{ds}\langle y(s), y(s) \rangle = \left\langle \frac{d}{ds}y(s), y(s) \right\rangle + \left\langle y(s), \frac{d}{ds}y(s) \right\rangle = \\ &= 2\operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{ds}y(s), y(s) \right\rangle = \\ &= 2\operatorname{Re} \langle i A_0(U(s) - e^{isB})z, (U(s) - e^{isB})z \rangle , \end{aligned}$$

ami 0, mivel A_0 szimmetrikus. Ez az $y(0) = 0$ kezdeti érték miatt azt jelenti, hogy $y(s) \equiv 0$.

Hátra van még B egyértelműségének igazolása. Induljunk ki az $U(s) = e^{isB}$ és $B = \int \lambda dE(\lambda)$ összefüggésekből! Kiszámoltuk, hogy $x \in \mathcal{D}(B)$ esetén $e^{itB}x$ differenciálható, ezért $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(B)$. A fordított tartalmazáshoz legyen $x \in \mathcal{D}(A)$ és

$$f_s(t) := \frac{e^{ist} - 1}{is} .$$

$\lim_{s \rightarrow 0} f_s(B)x := y$ létezik, ez csupán átfogalmazása a $x \in \mathcal{D}(A)$ -nek. Az integrál

$$\int |f_s(\lambda)|^2 d\langle x, E(\cdot)x \rangle(\lambda)$$

véges kis s -re, például $\leq \|y\|^2 + 1$, $|f_s(\lambda)|^2 \rightarrow |\lambda|^2$ amint $s \rightarrow 0$. A Fatou-lemma szerint

$$\int |\lambda|^2 d\langle x, E(\cdot)x \rangle(\lambda) \leq \|y\|^2 + 1 ,$$

tehát $x \in \mathcal{D}(B)$. Az $A = B$ konklúzió természetesen B egyértelműségét mutatja, és azt is, hogy B a generátor. $\square$

A Stone-tétel bizonyításából kiolvasható egy hasznos észrevétel, amit lemmaként fogalmazunk meg:

4. lemma: *Legyen $\mathcal{D}_1$ olyan sűrű halmaz az $U_s = e^{isA}$ erősen folytonos egyparaméteres csoport A generátorának értelmezési tartományában, amely invariáns minden U_s unitérre. Ekkor A lényegében önadjungált a $\mathcal{D}_1$ értelmezési tartományon.* $\square$

Alkalmazzuk ezt a T_a eltolás csoportra a $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ téren. Az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-tér sűrű $L^2(\mathbb{R})$ -ben, és invariáns az eltolásokra. Ezért a P generátor, ami az $f \mapsto if'$ differenciáloperátor, lényegében önadjungált $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ -en.

22. példa: $f \in L^2(\mathbb{R})$ esetén legyen

$$(D_t f)(x) = e^{t/2} f(e^t x) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (4.8.27)$$

Ekkor egyszerű helyettesítéses integrálás mutatja, hogy a lineáris D_t operátor unitér:

$$\begin{aligned} \langle D_t f, D_t g \rangle &= \int e^{t/2} \bar{f}(e^t x) e^{t/2} g(e^t x) dx = \\ &= \int \bar{f}(y) g(y) dy = \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $D_t D_s = D_{t+s}$, tehát D_t egyparaméteres unitér csoport. Folytonossága azt jelenti, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle f, D_t g \rangle = \langle f, g \rangle,$$

amit elegendő abban az esetben belátni, ha f és g egy teljes rendszerből van, például legyen f és g kompakt tartójú folytonos függvény. Ilyenkor

$$\int \bar{f}(x) e^{t/2} g(e^t x) dx \rightarrow \int \bar{f}(x) g(x) dx,$$

hiszen az integrálás véges intervallumon történik, és alkalmas konstans függvény majorálja az $\bar{f}(x) e^{t/2} g(e^t x)$ integrandust. Megállapíthatjuk, hogy D_t folytonos egyparaméteres csoport, és célul tűzzük ki generátorának meghatározását.

D_t önmagába viszi a kompakt tartójú sima függvények halmazát, ami ezért magja az A generátornak. Legyen f és g most ilyen függvény.

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \langle f, D_t g \rangle \Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \langle f, \frac{1}{2} g(x) + g'(x)x \rangle.$$

Tehát $(Ag)(x) = -\frac{i}{2}g(x) - ig'(x)x$ a generátor. Mint ilyen szimmetrikus, és a kompakt tartójú sima függvények invarianciája miatt lényegében önadjungált.

Érdekes megjegyezni, hogy a 6. példa Q és a 11. példa P differenciáloperátorával kifejezve

$$Af = \frac{1}{2}(PQ + QP)f. \quad (4.8.28)$$

$\square$

23. példa: (A diffúzió félcsoporth) Az $L^2(\mathbb{R}^n)$ Hilbert-téren a

$$(T_t f)(x) = \frac{1}{(2t)^{n/2}} \int \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right) f(y) dy \quad (4.8.29)$$

képlet egy T_t operátort ad meg, $t > 0$. T_t egy integrál operátor, amelynek magfüggvénye $F_t(x-y)$, ahol

$$F_t(z) = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{\|z\|^2}{4t}}.$$

F_t egyébként egy n -től függő konstans szorzótól eltekintve egy 0 várható értékű és $2tI_n$ kovariancia mátrixú normális eloszlás sűrűségfüggvénye. $T_t f$ -et konvolúcióként is írhatjuk:

$$T_t f = F_t * f.$$

Ennek előnye, hogy a normális eloszlások $F_t * F_s = F_{t+s}$ tulajdonságát használva arra jutunk, hogy

$$T_t \cdot T_s = T_{t+s} \quad (t, s > 0),$$

tehát T_t egy operátor félcsoporth.

A Fourier-transzformációt használjuk fel annak megmutatására, hogy $\|T_t\| \leq 1$ és T_t so-folytonos (t -ben).

$$\mathcal{F}(T_t f) = \mathcal{F}(F_t * f) = \mathcal{F}(F_t) \cdot \mathcal{F}(f).$$

A $\mathcal{F}T_t\mathcal{F}^{-1}$ operátor nem más, mint az

$$\mathcal{F}(F_t)(x) = e^{-t\|x\|^2}$$

függvénnyel való szorzás operátor. Ebből látszik, hogy $\|T_t\| \leq 1$ és az so-folytonosság is következik.

Miután az $-\|x\|^2$ függvénnyel való szorzás operátor a Laplace-operátor Fourier-transzformáltja,

$$T_t = e^{t\Delta}. \quad (4.8.30)$$

A T_t félcsoporthot **hővezetési** vagy **diffúziós félcsoporthnak** is szokták nevezni. Ennek oka a hasonló elnevezésű parciális differenciálegyenlettel való kapcsolat. Ha

$$f(x, t) = (T_t g)(x),$$

akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) &= (\Delta e^{t\Delta} g)(x) = \Delta f(x, t), \\ f(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

$T_t g$ a $g(x)$ kezdeti értékhez tartozó diffúziós feladat megoldását szolgáltatja. $\square$

4.9. Gyakorlófeladatok

- 1.* Legyen A_n korlátos önadjungált operátoroknak olyan sorozata, hogy $A_n x \rightarrow Ax$ a Hilbert-tér minden x vektorán. Legyen P_n (ill. P) az A_n (ill. A) gráfjára mint zárt lineáris altérre vetítő projekció. Igazoljuk, hogy $P_n \xrightarrow{so} P$.

- 2.^M Legyen T egy sűrűn értelmezett zárt operátor! Igazolja, hogy $\lambda \in \sigma(T)$ akkor és csak akkor, ha $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.
- 3.^M Igazolja, hogy UT zárt operátor, ha U unitér és T zárt.
- 4.^M Igazolja, hogy a 4. példa T_2 operátorának spektruma a teljes komplex sík.
- 5.^M Legyen U egy unitér és T egy lezárható operátor. Igazolja, hogy UTU^* lezárható.
- 6.^M Legyen A olyan önadjungált operátor, amelynek spektruma $\mathbb{R}^+$ -ban van. Milyen kapcsolat van A, A^2 és $A^{1/2}$ értelmezési tartománya között?
- 7.^M Legyen A önadjungált operátor és B korlátos önadjungált operátor. Igazolja, hogy $A + B$ önadjungált.
- 8.^M Igaz-e, hogy lényegében önadjungált operátorok összege is ilyen?
- 9.^M Keresse a (4.6.15) Legendre-féle differenciálegyenlet megoldását $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ alakban, és mutassa meg, hogy csak abban az esetben van polinom alakú megoldás, ha $\lambda = k(k+1)$ valamely k természetes számra.
- 10.^M Legyen $\mathcal{D}(A) = \{f \in C^2[0, 1] : f(1) = e^{i\theta}f(0)\}$, ahol $\theta \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám. Igazolja, hogy az $Af = if'$ operátor lényegében önadjungált.
11. Legyen $\mathcal{D}(A) = \{f \in C^2(\mathbb{R}^+) : f' \in L^2(\mathbb{R}^+)\}$. Igazolja, hogy az $Af = if'$ operátor szimmetrikus és nincs önadjungált kiterjesztése.
12. A kétdimenziós anharmonikus oszcillátor Schrödinger-operátora

$$(H_2f)(x, y) = -\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\right)f(x, y) + \omega_1^2 x^2 f(x, y) + \omega_2^2 y^2 f(x, y)$$

alakú. Értelmezési tartománynak a $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ -teret választjuk. Igazolja, hogy H_2 lényegében önadjungált. (Útmutatás: Vezesse vissza a problémát az egy dimenziós esetre.)

13. Számolja meg, hogy a háromdimenziós gömbszimmetrikus harmonikus oszcillátor negyedik sajátértékének mennyi a multiplicitása.
- 14.^M Igazolja, hogy ha A pozitív önadjungált operátor, akkor $\bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}(A^n)$ sűrű altér.
- 15.^M Igazolja, hogy minden szimmetrikus operátor lezárható.
16. Legyen Δ az egységnyezeten vett Dirichlet-féle Laplace-operátor, amelyet a kétszer folytonosan differenciálható és a peremfeltételnek eleget tevő függvényeken értelmezünk. Igazolja, hogy Δ lényegében önadjungált. Mi Δ lényeges spektruma?
17. Mi az előző feladat Δ operátorának Green-függvénye?
- 18.^M Adja meg a c_n sorozatot úgy, hogy a $\ell^2(\mathbb{N})$ téren a $\delta_n \mapsto c_n \delta_n$ utasítással értelmezett szorzásoperátornak 3 a lényeges spektrumában legyen, de ne legyen sajátérték.

- 19.^M Van-e olyan c_n sorozatot, hogy a $\ell^2(\mathbb{N})$ téren a $\delta_n \mapsto c_n \delta_n$ utasítással értelmezett szorzásoperátor lényeges spektruma a $[0, 1]$ intervallum legyen?
20. Igazolja, hogy egy önadjungált operátor lényeges spektruma zárt halmaz.
- 21.^M Igaz-e, hogy egy kompakt önadjungált operátor lényeges spektruma üres?
- 22.^M Legyen A egy pozitív önadjungált operátor és $x \in \mathcal{D}(A)$. Mutassa meg, hogy $x \in \mathcal{D}(A^z)$, ha z olyan komplex szám, amelynek valós része $(0, 1)$ -ben van. Igazolja, hogy a $z \mapsto \langle x, A^z x \rangle$ függvény analitikus az előbbi z számok tartományán.
- 23.^M Az $L^2(-\pi, \pi)$ Hilbert-térben sűrűn értelmezzük a $H(f) = -f''$ operátort a kétszer folytonosa differenciálható és az $f(-\pi) = f(\pi)$ és $f'(-\pi) = f'(\pi)$ peremfeltételnek eleget tevő függvényeken. Igazoljuk, hogy H lényegében önadjungált. Mi H spektruma?

24. Legyen H az $L^2(\mathbb{R})$ tér elegendően sima függvényein értelmezett olyan operátor, amelyre

$$Hf = -a \frac{\partial^2}{\partial x^2} f - 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f - c \frac{\partial^2}{\partial y^2} f.$$

Adjon meg szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a H operátor a változók alkalmas lineáris transzformációjával $\tilde{H} = -\Delta$ alakúvá legyen.

- 25.^M Legyen $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_2(\Omega) \geq \lambda_3(\Omega) \dots$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományhoz tartozó Dirichlet-féle Laplace-operátor sajátértékeinek a sorozata. Ismeretes, hogy $\Omega \subset \Omega'$ esetén $\lambda_n(\Omega) \leq \lambda_n(\Omega')$.¹⁵ Használja fel ezt a tényt az egységgömbhöz tartozó operátor sajátértékeinek becslésére, és mutassa meg, hogy rezolvense Hilbert–Schmidt-operátor.
26. Igaz-e, hogy az $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert-tér kompakt tartójú végtelen sokszor differenciálható függvényein értelmezett $T := -d^2/dx^2$ operátor lényegében önadjungált?
- 27.^M Mutassa meg, hogy a (4.1.1) exponenciális vektorok lineárisan függetlenek.
- 28.^M Legyen $A \geq 0$ egy önadjungált operátor. Igazolja, hogy ha A lényeges spektruma üres, akkor $(I + A)^{-1}$ kompakt operátor. Igaz a megfordítás is?
29. Mutassa meg, hogy a $T := -d^2/dx^2$ operátor $L^2[0, 1]$ -en az $f(0) = 0$ és $f(1) = 2f'(1)$ peremfeltételekkel szimmetrikus. Ellenőrizze, hogy az operátor Green-függvénye a következő:
- $$G(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{2} + \frac{xy^3}{2} - \frac{9xy}{5} + x, & \text{ha } 0 \leq x \leq y, \\ \frac{y^3 x}{2} + \frac{yx^3}{2} - \frac{9yx}{5} + y, & \text{ha } 0 \leq y \leq x. \end{cases}$$
- 30.^M Keresse meg $L^2[0, 1]$ -en az $f(0) = 0$ és $f'(1) = 0$ peremfeltételekkel vett $T := -d^2/dx^2$ operátor Green-függvényét.
31. Adjon elemi bizonyítást a Stone-tételre, ha a Hilbert-tér egydimenziós.

- 32.^M Legyen $U(t)$ erősen folytonos egyparaméteres unitér csoport a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Keresünk olyan $f \in \mathcal{H}$ vektorokat, amelyekre a $t \mapsto U(t)f$ vektorértékű függvénynek van analitikus kiterjesztése a teljes komplex síkra. (Útmutatás: Induljunk ki az infinitezimális generátor spektrális előállításából.)
33. Mutassa meg az $L^2(\mathbb{R})$ szokásos P operátorának mátrixát a Hermite-függvények ortonormált bázisára vonatkozóan.

5. A kvantummechanika axiómái

A kvantummechanika ma is általánosan elfogadott axiómáit a XX. század 20-as éveiben **Neumann János** fogalmazta meg.¹⁶ Az axiómák szerepe nem olyan, mint a matematikában általában, hanem annál „puhább”. Kiindulópontként szolgálnak, de bonyolultabb modellekben csak korlátozottan érvényesülnek.



Neumann János (1903–1957)

Neumann János, aki az Egyesült Államokban való letelepedése után John von Neumann néven publikált. Nem csupán a számítógép úttörője, hanem a kvantummechanika matematikai megalapozója és nagyon sok matematikai elmélet megalkotója. Érettségi után Zürichben kémiát tanult, és vegyészhallgatóként többször megtartotta az akkor már világhírű Hermann Weyl matematika előadásait, amikor ő külföldre utazott.

5.1. Állapotok és dinamikai változók

Az **állapot** a rendszeren végrehajtott manipulációk, más rendszerekkel való kölcsönhatás és önfejlődés eredménye. Egy fizikai állapotot létrehozó manipulációk folyamatát az állapot preparálásának mondjuk. Két állapot azonos, ha létrejöttük lényeges körülményei megegyeznek. Ha a mérőkészülék kölcsönhatásba kerül a rendszerrel, és egy számot leolvassunk a készülék skáláján, akkor egy **dinamikai változót** mérünk. Dinamikai változó helyett az **obszervábilis** vagy mérhető fizikai mennyiség kifejezéseket is használják. Utóbbi félrevezető lehet, mert például a hőmérséklet nem mérhető mennyiség, azaz nem dinamikai változó ebben az értelemben. Ugyanakkor dinamikai változók a részecske helye, sebessége, spinje, energiája stb. Az állapot, a dinamikai változó és a mérés az axiomatikus felépítésben alapfogalmak, tehát formálisan definiálva nincsenek. A fenti magyarázatok csak érzékeltetésre szolgálnak.

A tradicionális kvantummechanika első posztulátuma a következő:

- (A1): Minden kvantummechanikai rendszerhez tartozik egy komplex szeparábilis Hilbert-tér, a rendszer állapotai a Hilbert-tér sugarainak feleltethetők meg.

Sugár alatt egydimenziós alteret értünk, ami egy vektorral adható meg. A vektor hossza nem lényeges, de általában egységvektorral dolgozunk, amit **állapotvektornak** is neveznek. Két konstans szorzóban különböző állapotvektor, ugyanazt a sugarat határozza meg. Az $e^{i\varphi}$ konstans szorzót **fázisnak** is szokták nevezni.

Egy (legegyszerűbb) dinamikai változóhoz tartozik állapotoknak egy $\{\phi_i\}$ halmaza. Ezek a változó **sajátállapotai**. Amikor a ϕ állapotban lévő rendszeren mérést hajtunk végre, akkor az a mérendő obszervábilis valamely sajátállapotába ugrik. Ez a változás sztochasztikus, a ϕ állapotból a ϕ_i állapotba ugrásnak csak egy $P(\phi, \phi_i)$ valószínűségéről beszélhetünk. Ha a kezdeti preparált állapot történetesen sajátállapot, akkor ugrás nem következik be, azaz

$$P(\phi_i, \phi_j) = 0 \quad \text{ha} \quad i \neq j \quad \text{és} \quad P(\phi_i, \phi_i) = 1 : .$$

A kvantummechanika szerint általánosan

$$P(\phi, \psi) = |\langle \phi | \psi \rangle|^2. \quad (5.1.1)$$

Amennyiben $\{\phi_i\}$ egy ortonormált bázis, akkor

$$\sum_i P(\phi, \phi_i) = \sum_i |\langle \phi, \phi_i \rangle|^2 = 1$$

a valószínűségi értelmezéssel összhangban. (Teljes eseményrendszert alkotó események valószínűségének összege 1.)

- (A2): Minden dinamikai változó egy önadjungált operátorral adható meg. Az $\sum_i \lambda_i P_i$ spektrálfelbontású A dinamikai változót a ϕ állapotban megmérve a mérés eredménye $\langle \phi, P_i \phi \rangle$ valószínűséggel lesz λ_i . (P_i -k páronként ortogonális projekciók, összegük az identitás.) A mérés várható értéke

$$\sum_i \lambda_i \langle \phi, P_i \phi \rangle = \langle \phi, A \phi \rangle.$$

Az általános esetben az A önadjungált operátor spektrális előállítása

$$A = \int \lambda dE_\lambda,$$

ahol E az ún. spektrálmérték, egy projekció értékű mérték, $\mathbb{R}$ részhalmazain. E tartója A spektruma, a $\Delta \subset \mathbb{R}$ halmazhoz tartozó spektrális projekcióra az $E_A(\Delta)$ jelölést használjuk. Annak a valószínűsége, hogy a ϕ állapotban az A obszervábilist megmérve a mért érték a $\Delta \subset \mathbb{R}$ halmazba esik

$$\int_{\Delta} 1 d\langle \phi, E_\lambda \phi \rangle = \langle \phi, E_A(\Delta) \phi \rangle.$$

Érdemes megjegyezni, hogy az A obszervábilis $\langle \phi, A \phi \rangle$ várható értéke $\text{Tr} A |\phi\rangle \langle \phi|$ alakban is felírható. $|\phi\rangle \langle \phi|$ a fizikában kedvelt jelölés a ϕ vektor által kifeszített altérre vetítő projekcióra. Ez egy nyomú pozitív operátor.

Egy véges és két végtelen dimenziós példát tekintünk.

1. példa: A kétdimenziós $\mathbb{C}^2$ Hilbert-tér egy elektron spinjének leírására használható a **Pauli-mátrixok** segítségével:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ helyett néha a $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ jelölést használjuk.) A Pauli-mátrixok unitér ekvivalensek, például

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

tehát sajátértékeik ugyanazok. σ_3 diagonális, így sajátértékei ± 1 . (Egyébként természetesen egyszerű számolással közvetlenül is látható, hogy σ_1 és σ_2 sajátértékei ugyancsak ± 1 .)

Az i irányú spin operátora $S_i := \frac{1}{2} \hbar \sigma_i$. Sajátértékei $\pm 1/2$, ha $\hbar = 1$ egységeket választunk. $\pm 1/2$ lehet az i irányú spinnek a két lehetséges mért értéke. S_i spektrális előállítása

$$S_i = \frac{1}{2} E_i^{(+)} - \frac{1}{2} E_i^{(-)},$$

ahol $E_i^\pm := \frac{1}{2}(I \pm \sigma_i)$. (Számolással ellenőrizhetjük, hogy $E_i^\pm$ egy projekció, azaz $(E_i^\pm)^2 = (E_i^\pm)^* = E_i^\pm$.) Szokásos jelölések:

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ezek a vektorok S_3 sajátállapot-vektorai. Ha a spin állapotvektora ϕ , akkor a 3. irányú spint mérve

$$\langle \phi, E_3^+ \phi \rangle = |\langle \phi | \uparrow \rangle|^2$$

valószínűséggel kapunk $+1/2$ értéket. Az i irányú spin mérésének átlagértéke

$$\langle S_i \rangle_\phi := \frac{1}{2} \langle \phi, E_i^+ \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi, E_i^- \phi \rangle = \langle \phi, S_i \phi \rangle.$$

□

2. példa: A számegyenesen mozgó spin nélküli részecske Hilbert-tere $L^2(\mathbb{R})$. Ebben az esetben az állapotvektorok függvények, és szokásosan **hullámfüggvénynek** nevezik őket. A részecske helyének operátora a változóval való szorzás:

$$(Qf)(x) = xf(x), \quad D(Q) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

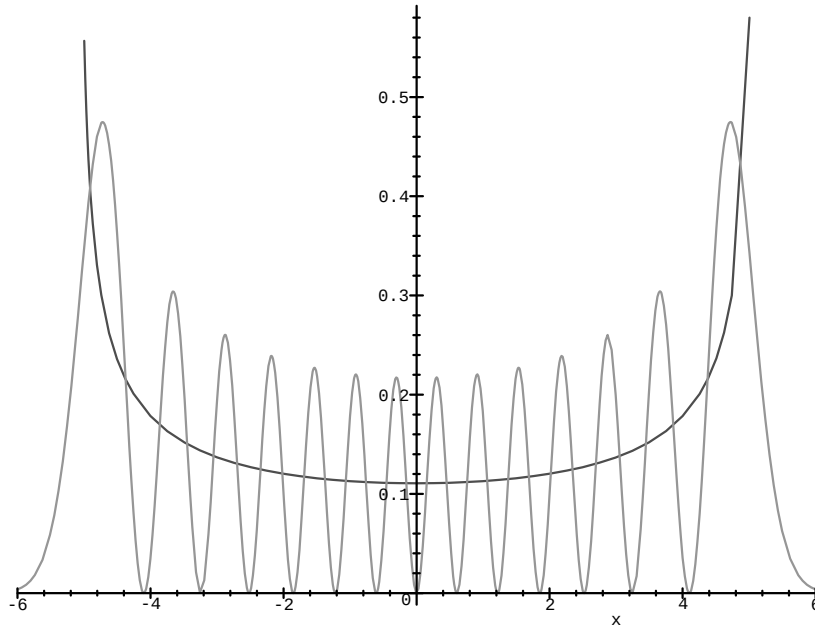
Q egy szorzás operátor, így spektrális projekciói is azok:

$$(E_Q(\Delta)f)(x) = (\mathbf{1}_\Delta f)(x), \quad (5.1.2)$$

ahol $\mathbf{1}_\Delta$ a $\Delta \subset \mathbb{R}$ halmaz karakterisztikus függvénye. Annak a valószínűsége, hogy a részecske a Δ intervallumban van

$$\langle \phi, E_Q(\Delta)\phi \rangle = \int_\Delta |\phi(x)|^2 dx.$$

Ez volt talán az a formula, amiből az 1920-as évek elején a kvantummechanikai formalizmus sztochasztikus interpretációja kifejlődött. A részecske koordinátájának, mint valószínűségi változónak, a sűrűségfüggvénye $|\phi(x)|^2$.



Az ábrán a $|\varphi_{13}(x)|^2$ valószínűség-sűrűség az erősen oszcilláló görbe. Ez a harmonikus oszcillátor $n = 13$ kvantumszámának megfelelő sajátállapotban a koordináta sűrűségfüggvénye. A konvex görbe a klasszikus harmonikus oszcillátor tartózkodási helyének valószínűsége, $\textit{konstans}/\sqrt{26 - x^2}$

A három szabadsági fokú spin nélküli (nem relativisztikus) részecske leírása hasonlóan történik. Ekkor a Hilbert-tér $L^2(\mathbb{R}^3)$. Ebben az esetben a részecskének három **koordináta-operátora** van:

$$(Q_i f)(x) = x_i f(x), \quad \mathcal{D}(Q_i) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : x_i f(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

($i = 1, 2, 3$). Q_i is szorzás operátor, például Q_1 spektrális projekciói:

$$(E_{Q_1}(\Delta)f)(x) = (\mathbf{1}_{\Delta \times \mathbb{R}^2}f)(x). \quad (5.1.3)$$

A három koordináta iránynak megfelelő **impulzusoperátorok**:

$$(P_i f)(x) = -i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x), \quad \mathcal{D}(P_i) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \partial_{x_i} f(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

($i = 1, 2, 3$). Ezek spektrális projekcióit a Fourier-transzformáció segítségével lehet megadni.

A különböző irányokhoz tartozó koordináta- és impulzusoperátorok **felcserélhető** egymással. $\square$

3. példa: (a spinnel rendelkező részecske) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2s+1}) = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes M_{2s+1}(\mathbb{C})$. Legyen $(\chi_m)_{m=-s}^s$ egy ortonormált bázis $\mathbb{C}^{2s+1}$ -ben, ennek segítségével definiáljuk az S_1, S_2, S_3 spinoperátorokat.

$$(S_1 \pm i S_2)\chi_m = \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)}\chi_{m \pm 1}, \quad S_3\chi_m = m\chi_m$$

s lehetséges értékei $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Például $s = \frac{1}{2}$ esetén $m = \pm \frac{1}{2}$

$$S_1 + i S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

és a jól ismert Pauli-mátrixokhoz jutunk. Ha $s = 1$, akkor $m = -1, 0, +1$, és

$$S_1 + i S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kiszámoljuk S_1 és S_2 konkrét alakját is:

$$S_1 = \frac{1}{2}(S_1 + i S_1) + \frac{1}{2}(S_1 + i S_1)^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Valamennyi spin operátor spektruma $\{-s, -s+1, \dots, s\}$.

Kiszámolható, hogy

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = s(s+1)I. \quad (5.1.4)$$

(Útmutatás: $S_1^2 + S_2^2 = (S_1 + i S_2)(S_1 - i S_2)$.) $\square$

5.2. Összetett rendszerek

Az (A1) axióma szerint minden kvantummechanikai rendszerhez tartozik egy Hilbert-tér. Tételezzük fel, hogy egy összetett rendszer az (1) és (2) részrendszerekből épül fel, amelyek leírása a $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ Hilbert-tereken történik.

(A3) Az összetett rendszer leírására a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert-tér szolgál.

Összetett rendszerre már valójában láttunk példát. A spinnel rendelkező részecske olyan összetett rendszerként fogható fel, amelynek egyik komponense egy spin nélküli részecske, a másik komponens pedig egy absztrakt, részecske nélküli, spin. A 3. példában láttuk, hogy a releváns Hilbert-tér $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, ha $1/2$ spinű részecskéről van szó.

Az összetett rendszer axiómájába belefér az a lehetőség, hogy esetleg $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ne minden vektora adjon meg állapotot. Ha például $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ olyan részecskék Hilbert-terei, amelyek az összetett rendszerben megkülönböztethetetlenek, akkor bizonyos állapotvektorok nem megengedettek. (A szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus alteret kell vennünk a Bose-, illetve Fermi-statisztikának megfelelően.)

4. példa: Két feles spinből álló rendszer Hilbert-tere $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, amiben $|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$ vektorok alkotnak bázist. A

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \quad (5.2.5)$$

állapotvektorban¹⁷ kiszámoljuk a $\sigma_z \otimes \sigma_z$ obszervábilis, a két spin z irányú komponensei, mérésekor adódó valószínűségeloszlást. $\sigma_z \otimes \sigma_z$ sajátvektorai pontosan a bázisvektorok rendre $1, -1, -1, 1$ sajátértékekkel. Annak a valószínűsége, hogy mind a két spin felfelé áll $|\langle \phi, |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \rangle|^2 = 0$. Hasonlóan 0 annak a valószínűsége, hogy mind a két spin lefelé áll. Annak a valószínűsége, hogy az egyik lefelé, a másik felfelé mutat

$$|\langle \phi, |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \rangle|^2 = |\langle \phi, |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

Számításunk szerint a ϕ állapotban a spinek (z irányú komponensei) között erős (anti)korreláció van. $\square$

Tekintsük a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert-térrel leírt összetett rendszert, amely a $\phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vektorral megadott állapotban van. Legyen $A \in B(\mathcal{H}_1)$ az (1) részrendszerre lokalizálható obszervábilis. Ha ezt az összetett rendszer obszervábilisének akarjuk tekinteni, akkor ki kell terjeszteni a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert-térre, amit az $A \otimes I$ formában tehetünk meg. (I a $\mathcal{H}_2$ Hilbert-tér identitás operátora.) Tehát A várható értéke a ϕ állapotban $\langle \phi, (A \otimes I)\phi \rangle$. Ezt a várható értéket szeretnénk kifejezni a $\mathcal{H}_2$ Hilbert-térhez tartozó mennyiségekkel. Ki fog derülni, hogy általában nem létezik olyan $\phi_1 \in \mathcal{H}_1$ állapotvektor, amelyre

$$\langle \phi, (A \otimes I)\phi \rangle = \langle \phi_1, A\phi_1 \rangle$$

teljesül minden (1) rendszerhez tartozó A obszervábilisre.

1. lemma: Legyen $\{\xi_j : j \in J\}$ bázis $\mathcal{H}_1$ -ben és $\{\eta_i : i \in I\}$ bázis $\mathcal{H}_2$ -ben. Tételezzük fel, hogy

$$\phi = \sum_{i,j} w_{ij} \xi_j \otimes \eta_i$$

a $\phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vektor sorfejtése a $(\xi_j \otimes \eta_i)$ bázisban! Ekkor

$$\langle \phi, (A \otimes I)\phi \rangle = \text{Tr} AD_1$$

egy olyan $D_1 \in B(\mathcal{H}_1)$ operátorra, amelyre $D_1 \geq 0$ és $\text{Tr} D_1 = 1$.

Bizonyítás: Legyen e_{kl} a $\mathcal{H}_1$ tér ξ_j bázisra vonatkozó mátrixegység, azaz $e_{kl}\xi_j = \delta_{lj}\xi_k$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle \phi, (e_{kl} \otimes I)\phi \rangle &= \left\langle \sum_{i,j} w_{ij} \xi_j \otimes \eta_i, (e_{kl} \otimes I) \sum_{t,u} w_{tu} \xi_u \otimes \eta_t \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j} \sum_{t,u} \bar{b}_{ij} w_{tu} \langle \xi_j, e_{kl} \xi_u \rangle \langle \eta_i, \eta_t \rangle = \\ &= \sum_{i,j} \sum_{t,u} \bar{b}_{ij} w_{tu} \delta_{lu} \delta_{jk} \delta_{it} = \sum_i \bar{b}_{ik} w_{il}. \end{aligned}$$

Ha W -vel jelöljük azt az esetleg végtelen mátrixot, amelynek (k, l) eleme w_{kl} , akkor az eredmény W^*W (k, l) eleme, vagy másképpen írva

$$\langle \phi, (e_{kl} \otimes I)\phi \rangle = \text{Tr}_{kl}(W^*W).$$

A $\mathcal{H}_1$ -tér tetszőleges lineáris A operátora $A = \sum a_{kl} e_{kl}$ alakban írható fel. Így az előző formából azt kapjuk, hogy

$$\langle \phi, (A \otimes I)\phi \rangle = \text{Tr} A(W^*W).$$

A W^*W operátor nemnegatív és

$$\text{Tr} W^*W = \sum_{i,j} |w_{ij}|^2 = \|\phi\|^2 = 1. \quad \square$$

Az olyan $D \geq 0$ operátorokat, amelyekre $\text{Tr} D = 1$, **statisztikus operátornak** vagy véges dimenziós térben **sűrűségi mátrixnak** nevezzük. (Érdemes megjegyezni, hogy egy statisztikus operátor automatikusan kompakt.) Ha a teljes rendszer egy ϕ állapotban van, akkor az (1) rész A obszervábilisének várható értéke $\text{Tr} AD_1$ alakban adható meg, valamely D_1 statisztikus operátorral, amely az (1) részrendszer **redukált statisztikus operátora**. Természetesen a (2) részrendszerhez is tartozik egy redukált D_2 statisztikus operátor, amelyet a

$$\langle \phi, (I \otimes B)\phi \rangle = \text{Tr} BD_2$$

összefüggés jellemez. A lemma számolásához hasonlóan kapjuk, hogy $D_2 = (DD^*)^t$, ahol t a transzponáltat jelenti. Az összetett rendszer állapota a (1) részrendszerben általában nem adható meg $\phi_1 \in \mathcal{H}_1$ vektorral. Ezért az eddigi axiómákat ki kell terjesztenünk.

- (A1') Minden kvantummechanikai rendszerhez tartozik egy komplex szeparábilis Hilbert-tér, a rendszer állapotai a Hilbert-tér statisztikus operátorainak feleltethetők meg.
- (A2') Annak a valószínűsége, hogy az A önadjungált operátorral adott dinamikai változót a D statisztikus operátorral leírt állapotban megmérve a $\Delta \subset \mathbb{R}$ halmazba eső értéket kapunk $\text{Tr} E_A(\Delta)D$, ahol $E_A(\Delta)$ a Δ halmazhoz tartozó spektrális projekció. Ebből következik, hogy A várható értéke $\text{Tr} AD$.

Érdemes hangsúlyozni, hogy statisztikus operátorral az állapotvektorral megadott állapotok is leírhatók. A ϕ vektorral adott állapot statisztikus operátora $|\phi\rangle\langle\phi|$:

$$(|\phi\rangle\langle\phi|)|\eta\rangle = \langle\phi, \eta\rangle |\phi\rangle = \langle\phi, \eta\rangle \phi, \quad \text{Tr } |\phi\rangle\langle\phi|A = \langle\phi|A|\phi\rangle = \langle\phi, A\phi\rangle.$$

(Az összefüggések jól mutatják a Dirac-féle jelölésmód előnyét.)

1. tétel: Ha a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert-térrel leírt összetett rendszer egy $\phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vektorral adott állapotban van, akkor a D_1 és D_2 redukált statisztikus operátorok nem nulla sajátértékei multiplicitással megegyeznek.

Bizonyítás: Az előző lemma bizonyításában láttuk, hogy $D_1 = W^*W$ és hasonlóan $D_2 = (WW^*)^t$. Mivel $(WW^*)^t$ és WW^* sajátértékei megegyeznek, elegendő arra hivatkozni, hogy W^*W és WW^* spektrumának 0-tól különböző része ugyanaz. $\square$

Ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy egy állapot vektorral adható meg, akkor tiszta állapotnak nevezzük, ellentétben a többi **kevert állapottal**. A kvantumelmélet sajátossága az a tény, hogy a részrendszer esetleg kevert állapotban van még abban az esetben is, ha a teljes összetett rendszer tiszta állapotú.

5. példa: Legyen $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$ és

$$D_{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A \otimes I = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\text{Tr } A \otimes D_{12} = \frac{1}{2}(A_{22} + A_{11}) = \text{Tr } A(I/2);$$

azaz a redukált statisztikus operátor $I/2$, ugyanakkor D_{12} tiszta állapotot ad meg. (D_{12} nem más, mint a 4. példában szereplő EPR vektorállapot statisztikus operátora.) $\square$

6. példa: Legyen $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$ és $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^n$. Ekkor a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert-tér D_{12} statisztikus operátora 2×2 -es mátrixként írható a

$$D_{12} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

formában, ahol a mátrixelemek $n \times n$ -es mátrixok. Ekkor a redukált statisztikus operátorok

$$D_1 = \begin{bmatrix} \text{Tr } X_{11} & \text{Tr } X_{12} \\ \text{Tr } X_{21} & \text{Tr } X_{22} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D_2 = X_{11} + X_{22}. \quad \square$$

7. példa: Legyen $D = \sum \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ egy tetszőleges statisztikus operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, amely spektrális felbontásával van adva (azaz $|\varphi_i\rangle$ a $\mathcal{H}$ -tér bázisa). Ekkor $\Phi := \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle$ egységvektor $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ -ban és így megad egy tiszta állapotot. (1) részrendszer bármely A obszervábilisának várható értéke Φ -ben éppen $\text{Tr } AD$:

$$\begin{aligned} \langle (A \otimes I)\Phi, \Phi \rangle &= \langle \sum \sqrt{\lambda_i} A |\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle, \sum \sqrt{\lambda_j} |\varphi_j\rangle \otimes |\varphi_j\rangle \rangle = \\ &= \sum \lambda_i \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle = \text{Tr } AD. \end{aligned}$$

A konstrukció azt adja, hogy egy rendszer tetszőleges kevert állapota előáll egy nagyobb, „kétszer akkora”, rendszer tiszta állapotának redukciójaként. $\square$

Ha D egy statisztikus operátor, akkor az

$$S(D) = -\text{Tr } D \log D \quad (5.2.6)$$

mennyiséget D **Neumann-féle entrópiájának**¹⁸ nevezzük. Ha D sajátértékei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, akkor $S(D) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i$, ami nemnegatív, esetleg $+\infty$. A Neumann-féle entrópiának termodinamikai, statisztikai és információelméleti jelentése egyaránt van.

8. példa: A 2×2 -es önadjungált 1 nyomú mátrixok általános alakja

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(I + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3). \quad (5.2.7)$$

Ez a mátrix pontosan akkor ad egy statisztikus operátort, ha $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Azok az $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pontok adnak tiszta állapotot, amelyekre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Ilyenkor a mátrix rangja 1 mert determinánsa 0.) $\square$

9. példa: Legyen $H = H^*$ egy $n \times n$ -es önadjungált mátrix, és tekintsük a sűrűségi mátrixok terén az

$$f(D) = \text{Tr } HD - \frac{1}{\beta} S(D) \quad (\beta > 0)$$

funkcionált. $f(D)$ minimalizálásához kiszámoljuk a Gateaux-differenciált:

$$df(D, X) = \text{Tr } HX + \frac{1}{\beta} \text{Tr } \log DX$$

egy invertálható D pontban. Ha D -ben minimum van, akkor $df(D, X) = 0$ minden olyan X mátrixra, amelyre $\text{Tr } X = 0$. A $df(D, X) = 0$ feltétel maga után vonja, hogy

$$H + \frac{1}{\beta} \log D = cI$$

valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstansra. Ebből

$$D = e^{-\beta H + \beta c I}$$

c értékét a $\text{Tr } D = 1$ feltételből határozzuk meg, és így jutunk az úgynevezett **Gibbs-állapothoz**:

$$D = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}}.$$

Ez valóban minimalizálja az $f(D)$ funkcionált, amelynek fizikai interpretációja **szabad energia**. (A belső energiából és az entrópiából tevődik össze, β az inverz hőmérséklet.) A szabad energiát minimalizáló állapot a rendszer **egyensúlyi állapota**. $\square$

A következő példa egyike a kvantummechanika sztochasztikus interpretációja kapcsán felmerülő paradoxonoknak, neve **három spin paradoxon**.

10. példa: Tekintsünk egy olyan rendszert, aminek Hilbert tere $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, és építsünk fel dinamikai változókat a Pauli-mátrixokból:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, & B_1 &:= I \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, \\ A_2 &:= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2, & B_2 &:= \sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_2, \\ A_3 &:= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1, & B_3 &:= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes I. \end{aligned}$$

Ekkor A_i, B_i önadjungált mátrixok. A_i -k egymás között páronként felcserélhetők, mert $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1$ és B_i -k egymás között páronként felcserélhetők, mert $\sigma_2^2 = I$. Ugyanezért $B_1B_2B_3 = I$. A_i -k és B_i -k spektruma egyaránt $\{\pm 1\}$.

A képzeletbeli (de fizikailag azért realizálható és mérhető) rendszert a

$$\phi := \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle)$$

állapotban tekintjük. Egyszerű számolással jön ki, hogy $\langle \phi, A_i \phi \rangle = 1$, $i = 1, 2, 3$. A_i -t valószínűségi változónak tekintve egy olyan véletlen mennyiség, ami ± 1 értékeket vesz fel, és várható értéke 1. Ez azt jelenti, hogy -1 értéket nem is vesz fel pozitív valószínűséggel. Ugyancsak számolással győződünk meg arról, hogy $C := -A_1A_2A_3$ várható értéke -1 .

Most jön az ellentmondáshoz vezető okoskodás.

Mivel

$$A_i = \sigma_1^{(i)} B_i \quad (\sigma_1^{(1)} = \sigma_1 \otimes I \otimes I, \sigma_2^{(2)} = I \otimes \sigma_2 \otimes I, \sigma_1^{(3)} = I \otimes I \otimes \sigma_1),$$

mind a három változó ± 1 értéket vesz fel, és A_i mindig 1, ezért $\sigma_i^{(i)}$ és B_i mindig ugyanazt a ± 1 értéket kell hogy adja. Ezért $\sigma_1^{(1)} \cdot \sigma_1^{(2)} \sigma_1^{(3)}$ és $B_1B_2 \cdot B_3$ várható értéke azonos kell, hogy legyen. Előbbi éppen C definíció szerint, és tudjuk, hogy -1 várható értékű. Utóbbi viszont az identitás, ami természetesen 1 várható értékkel bír. Mi az ellentmondás oka? Az, hogy az A_i, B_i és $\sigma_1^{(1)}$ dinamikai változókra a ϕ állapotban a Kolmogorov-féle valószínűségi modellt¹⁹ használtuk, és abban gondolkodtunk.

A paradoxon azért ügyes, mert minden egyes lépésben csak felcserélhető operátorok fordulnak elő, ezért egy-egy lépés erejéig a kolmogorovi modell használható lenne. Nevezetesen, $A_i, \sigma_1^{(i)}$ és B_i egy rögzített i -re felcserélhető operátorok, de A_1 és B_2 már nem. $\square$

5.3. A mérés

Az következő posztulátum a mérésről szól.

- (A4): A különböző $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ lehetséges értékeket felvevő mérés olyan $V_1, V_2, \dots, V_n$ operátorokkal írható le, amelyekre $\sum_{i=1}^n V_i^* V_i = I$. Ha a rendszer a D statisztikus operátorral adott állapotban van, akkor a mérés végrehajtása után a rendszer statisztikus operátora $\sum_{i=1}^n V_i D V_i^*$. A λ_i kimenet valószínűsége $\text{Tr} V_i D V_i^*$. Továbbá, ha tudjuk, hogy a λ_i kimenetele valósul meg a mérésnek, akkor a rendszer statisztikus operátora a mérés végrehajtása után

$$\frac{V_i D V_i^*}{\text{Tr} V_i D V_i^*}.$$

A $\text{Tr} V_i D V_i^*$ valószínűségek összege 1, hiszen

$$\sum_{i=1}^n \text{Tr} V_i D V_i^* = \sum_{i=1}^n \text{Tr} D V_i^* V_i = \text{Tr} D = 1.$$

A teljes valószínűség tételére emlékezve

$$\sum_i \text{Tr} V_i D V_i^* \frac{V_i D V_i^*}{\text{Tr} V_i D V_i^*}$$

a nem feltételes statisztikus operátor, éppen az, amit az axióma állít.

Ha a V_i operátorok páronként ortogonális P_i projekciók, akkor ugyanazt a mérést másodszor végrehajtva a rendszeren a statisztikus operátora már nem változik meg:

$$\sum_j P_j \left(\sum_i P_i D P_i \right) P_j = \sum_{i,j} P_j P_i D P_i P_j = \sum_i P_i D P_i.$$

Az ilyen mérést **ismételhető** vagy **Neumann-féle mérésnek** nevezzük. Minden diszkrét spektrumú és $A = \sum \lambda_i P_i$ spektrális felbontású obszervábilishez tartozik egy Neumann-féle mérés, amelyet a $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ páronként ortogonális (spektrális) projekciók adnak meg. Az (A4) axióma összhangban van (A2)-vel. Folytonos obszervábilishez nem tartozik mérés kanonikus módon, viszont adott $\Delta \subset \mathbb{R}$ intervallumot választva végrehajthatjuk azt a mérést, amely eldönti, hogy az obszervábilis értéke Δ -ba esik-e. Ennek a mérésnek két kimenetele van 1, ami azt jelenti, hogy beleesik, és 0, ami annak felel meg, hogy nem esik bele. Az 1 kimenet valószínűsége $\text{Tr} E_A(\Delta) D E_A(\Delta)$ és a 0 valószínűsége $1 - \text{Tr} E_A(\Delta) D E_A(\Delta) = 1 - \text{Tr} D E_A(\Delta) = \text{Tr} D E_A(\mathbb{R} \setminus \Delta)$. Így az A obszervábilis spektrális projekciói is megfigyelhető mennyiségként viselkednek. A projekció operátorokat obszervábilisnek tekintve a rendszerhez intézett **0–1 kérdéseként** interpretálhatjuk.

2. tétel: Ha az (1) és (2) részrendszerekből álló összetett rendszer (1) részében mérést hajtunk végre, akkor a (2) részrendszer obszervábiliseinek várható értéke változatlan marad.

Bizonyítás: Legyen D_{12} a teljes rendszer statisztikus operátora, $V_1, V_2, \dots, V_n$ az (1) részben végrehajtott méréshez tartozó operátorok és A egy obszervábilis a (2) részben. Azt kell igazolni, hogy

$$\text{Tr} D_{12}(I \otimes A) = \text{Tr} \left(\sum_i (V_i \otimes I) D_{12}(V_i^* \otimes I) (I \otimes A) \right).$$

(Valóban, a bal oldal A várható értéke a mérés előtt, amikor D_{12} a statisztikus operátor, és a jobb oldal A várható értéke a mérés utáni állapotban. Ekkor $\sum (V_i \otimes I) D_{12}(V_i \otimes I)$ a statisztikus operátor.) Az egyenlőség egyszerűen adódik az $I \otimes A$ és a $V_i \otimes I$ operátorok felcserélhetősége alapján. $\square$

11. példa: Az előző tétel kizárólag a várható értékre vonatkozik, és egyáltalán nem jelenti azt, hogy az összetett rendszer egyik komponensében végrehajtott mérés nem befolyásolja a másik komponensben történő mérés kimenetelét.

Tételezzük fel, hogy a két spinből álló rendszer az 5. példa EPR állapotában van. Mérjük meg az első részecske z irányú spinjét, és legyen a mérés eredménye $+1$, azaz a

spin felfelé áll. Ekkor a mérés után a statisztikus operátort az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D_{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix nyomának egyre normálásával kapjuk. Az eredmény

$$D'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egyébként ennek első redukált mátrixa

$$D'_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

második redukált mátrixa pedig

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Egyébként D'_1 a

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1 sajátértékéhez tartozó sajátprojekciónak kell lenni, és így is van. A D'_2 redukált sűrűségű mátrix éppen $\sigma_2 - 1$ sajátértékhez tartozó projekciója. Ezért a 2. részecske z irányú spinjét mérve mindig -1 értéket kapunk. Hasonlóan ha az első részecskét megnézve azt kapjuk, hogy a spin lefelé áll, akkor ezután a 2. részecske spinje biztosan felfelé áll. Ezt a tényt úgy szokás kifejezni, hogy az EPR állapotban a spinek antikorreáláltak. $\square$

12. példa: (Kvantummechanikai „teleportálás”, távátvitel) A feles spin kétállapotú kvantumrendszer, ezért **kvantum bitnek** is nevezik, különösen, ha az információelméleti vonatkozásokat hangsúlyozzák. Az alábbi gondolkísérlet arról szól, hogy az Aliz birtokában lévő $\psi = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ kvantum bit, hogyan küldhető el Bobnak.

A teleportálásnak van egy hagyományos módja: Aliz „megméri” a nála lévő spin állapotát, azaz meghatározza a (mondjuk pozitív) a valós számot és a komplex b számot. Ezek, ha pontosan akarjuk őket közelíteni, akkor nagyon hosszú bináris sorozatokkal adhatók meg. Ezután a bináris sorozatokat Aliz Bobnak továbbítja valamilyen módon. Bob a és b ismeretében preparálja a megfelelő állapotot, és jó közelítéssel olyan spinje van, amilyen Aliznak volt. Az eljárásban könnyű gyenge pontot találni, de ha Aliz mégis meg tudná mérésével a -t és b -t határozni, akkor rengeteg sok bináris információt kellene Bobnak elküldenie. Ezzel szemben az alábbi eljárás két bit információ továbbítását kívánja.

A

$$\begin{aligned} \psi^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle), \\ \psi^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle), \\ \phi^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle), \\ \phi^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \end{aligned}$$

állapotvektorok bázist alkotnak a $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -térben. (Az EPR állapot ψ^- már szerepelt a 4. példában. A $\psi^+, \psi^-, \phi^+, \phi^-$ bázist **Bell-féle bázisnak** is mondják.) Ahhoz, hogy a Bell-féle vektorokat egymásba vigyük, elegendő lokálisan egy egyik bitet transzformálni.

$$\begin{aligned} U_{00} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & U_{01} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ U_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & U_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

unitér mátrixok. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} (U_{00} \otimes I)\psi^- &= \psi^-, \\ (U_{01} \otimes I)\psi^- &= \psi^+, \\ (U_{10} \otimes I)\psi^- &= \phi^-, \\ (U_{11} \otimes I)\psi^- &= \phi^+. \end{aligned}$$

A távátvitelhez (vagy teleportáláshoz)²⁰ két további kvantum bitre is szükség van. Aliz a birtokában lévő X kvantum bitet másik két spinnel kapcsolja össze: Az A spin Aliznál, a B spin pedig a távolban elhelyezkedő Bobnál van. Az X, A, B spineket egy összetett rendszerként fogjuk fel. A és B a ψ_{AB}^- **kapcsolt**, EPR állapotban van úgy, hogy a három bit állapotvektora $\psi_X \otimes \psi_{AB}^-$.

Minden bázis meghatároz egy mérést, a bázisvektorokra vett ortogonális projekciókra teljesül az (A4) axióma feltétele. (Az mérés értékeire most nincs szükségünk, de úgy gondoljuk, hogy bázisvektoronként különböző értéket adnak.) Ha Aliz végrehajtja a Bell-féle bázisnak megfelelő mérést az X és A biteken, akkor mind a négy lehetőséget $1/4$ valószínűséggel kapja meg, tehát fogalma sincsen arról, hogy mi X ψ állapota. Bob, akinek a ψ állapotot, illetve az általa hordozott információt továbbítani kell, a B bitet transzformálja (nem méri!), méghozzá Aliz mérése után. Ahhoz, hogy Aliz mérési eredményeit összehasonlítsuk a Bobnál lévő bit állapotával, a három spin állapotvektorát más formában írjuk fel:

$$\begin{aligned} \psi \otimes \psi^- &= \frac{1}{2} [\psi_{XA}^- \otimes (-a|\uparrow\rangle - b|\downarrow\rangle) + \psi_{XA}^+ \otimes (-a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) + \\ &\quad + \phi_{XA}^- \otimes (b|\uparrow\rangle + a|\downarrow\rangle) + \phi_{XA}^+ \otimes (-b|\uparrow\rangle + a|\downarrow\rangle)] . \end{aligned}$$

Ebből a felírásból jól látszik, hogy Aliz a $\psi_{XA}^-, \psi_{XA}^+, \phi_{XA}^-, \phi_{XA}^+$ állapotokat egyaránt $1/4$ valószínűséggel kapja, és Aliz mérése után a rendszer állapotvektora rendre

$$\begin{aligned} \psi_{XA}^- \otimes (-a|\uparrow\rangle - b|\downarrow\rangle) &= \psi_{XA}^- \otimes (-U_{00})\psi, \\ \psi_{XA}^+ \otimes (-a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) &= \psi_{XA}^+ \otimes (-U_{01})\psi, \\ \phi_{XA}^- \otimes (b|\uparrow\rangle + a|\downarrow\rangle) &= \phi_{XA}^- \otimes (-U_{10})\psi, \\ \phi_{XA}^+ \otimes (-b|\uparrow\rangle + a|\downarrow\rangle) &= \phi_{XA}^+ \otimes (U_{11})\psi. \end{aligned}$$

Így Bob kvantum bitje rendre $U_{00}\psi, U_{01}\psi, U_{10}\psi, U_{11}\psi$ állapotban van. (Az előjeleket elhagyhatjuk, mert azok nincsenek hatással az állapotra.) Bob rekonstruálni tudja Aliz X kvantum bitjének állapotát, ha az $U_{ij}\psi$ állapotvektorra az U_{ij}^{-1} unitér transzformációt alkalmazza. Ehhez az kell, hogy Aliz a mérése végrehajtása után annak eredményét, amely

a négy lehetőségnek megfelelően 00, 01, 10, 11 (klasszikus) két bit információmennyiség, Bobnak továbbítsa, valamilyen megbízható módon. Ekkor Bob realizálja az U_{ij}^{-1} transzformációt, és Aliz kvantum bitjének tökéletes másolatával rendelkezik.

Tanulságos végigmenni a teleportálási folyamaton a statisztikus operátorokat követve. A ψ állapot statisztikus operátora

$$\begin{bmatrix} |a|^2 & a\bar{b} \\ \bar{a}b & |b|^2 \end{bmatrix},$$

de ehelyett számoljunk egy általános

$$D_X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{bmatrix}$$

statisztikus operátorral. Az AB spinek ψ^- állapotának statisztikus operátora

$$D_{AB} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az egyszerűbb kezelhetőség kedvéért ezt a mátrixot a 2×2 -es $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ mátrixegységek segítségével blokkmátrix alakban használjuk:

$$D_{AB} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_{22} & -e_{21} \\ -e_{12} & e_{11} \end{bmatrix}.$$

Így 8×8 -as helyett csupán 4×4 -es lesz a $D_X \otimes D_{AB}$ statisztikus operátor:

$$D_X \otimes D_{AB} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha e_{22} & -\alpha e_{21} & \beta e_{22} & -\beta e_{21} \\ -\alpha e_{12} & \alpha e_{11} & -\beta e_{12} & \beta e_{11} \\ \bar{\beta} e_{22} & -\bar{\beta} e_{21} & \gamma e_{22} & -\gamma e_{21} \\ -\bar{\beta} e_{12} & \bar{\beta} e_{11} & -\gamma e_{12} & \gamma e_{11} \end{bmatrix}$$

Aliz mérése négy darab projekciót jelent. Az XA spinek terében a ψ_{XA}^- vektorra vetítő projekció mátrixa

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

hiszen ez ugyanaz, mint az AB spinek ψ^- állapotának sűrűségi mátrixa. A ψ_{XA}^- vektornak megfelelő projekció

$$P(\psi^-) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & 0 \\ 0 & -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol az utolsó 4×4 -es mátrix blokkmátrix, benne a 0 2×2 -es 0 mátrixot és I 2×2 egység mátrixot jelent. Ezután némi számolás szükséges:

$$(D_X \otimes D_{AB})P(\psi^-) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & (-\alpha e_{21} - \beta e_{22}) & (-\alpha e_{21} - \beta e_{22}) & 0 \\ 0 & (\alpha e_{11} + \beta e_{12}) & (-\alpha e_{11} - \beta e_{12}) & 0 \\ 0 & (-\bar{\beta} e_{21} - \gamma e_{22}) & (\bar{\beta} e_{21} + \gamma e_{22}) & 0 \\ 0 & (\bar{\beta} e_{11} + \gamma e_{12}) & (-\bar{\beta} e_{11} - \gamma e_{12}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Továbbá

$$P(\psi^-)(D_X \otimes D_{AB})P(\psi^-) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_X & -D_X & 0 \\ 0 & -D_X & D_X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a blokkmátrix írásmóddal felhasználva, hogy

$$\alpha e_{11} + \beta e_{12} + \bar{\beta} e_{21} + \gamma e_{22} = D_0.$$

Mivel $\text{Tr } P(\psi^-)(D_X \otimes D_{AB})P(\psi^-) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, valóban $\frac{1}{4}$ a valószínűsége a mérés ψ^- kimentelésének. Ha ez a mérés eredménye, akkor az XAB spinek statisztikus operátora

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & -D & 0 \\ 0 & -D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből kell megállapítanunk a Bobnál levő B spin redukált statisztikus operátorát. Mivel

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & -D & 0 \\ 0 & -D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes D$$

a redukált statisztikus operátor éppen D . A hosszú számolás eredménye egy sorban is összefoglalható:

$$4P(\psi^-)(D \otimes D_{AB})P(\psi^-) = D_{XA} \otimes D.$$

Azt kaptuk, hogy ha a $P(\psi^-), P(\psi^+), P(\phi^-), P(\phi^+)$ projekciókkal leírt (Neumann-féle) mérés az első eredményt adja, akkor a B spin statisztikus operátora D . Bobnak tehát semmilyen transzformációt nem kell végrehajtania, U_{00} valóban az identitás.

Mi van akkor, ha a mérés a második eredményt adja? El kell végezni egy hasonló számolást? Nem feltétlenül. $\psi^- = (U_{01} \otimes I)\psi^+$, ezért

$$P(\psi^+) = (U_{01} \otimes I \otimes I)P(\psi)(U_{01} \otimes I \otimes I)^*.$$

Ezért

$$\begin{aligned} 4P(\psi^+) [U_{01}^* D U_{01}^* \otimes D_{AB}] P(\psi^+) &= 4(U_{01} \otimes I \otimes I)P(\psi^-) (U_{01}^* \otimes I \otimes I) \times \\ &\times (U_{01} \otimes I \otimes I)D \otimes D_{AB} (U_{01}^* \otimes I \otimes I) (U_{01} \otimes I \otimes I)P(\psi^-) (U_{01}^* \otimes I \otimes I) = \\ &= 4U_{01} \otimes I \otimes I [P(\psi^-)(D \otimes D_{AB})P(\psi^-)] U_{01}^* \otimes I \otimes I = \\ &= U_{01} \otimes I \otimes I [D_{XA} \otimes D] U_{01}^* \otimes I \otimes I = \\ &= [(U_{01} \otimes I)D_{XA}(U_{01}^* \otimes I)] \otimes D. \end{aligned}$$

Ha most a D helyébe $U_{01}^* D U_{01}$ -et írunk, akkor

$$4P(\psi^+)[D \otimes D_{AB}]P(\psi^+) = [(U_{01} \otimes I)D_{XA}(U_{01}^* \otimes I)] \otimes U_{01}^* D U_{01}.$$

Minket csak a jobb oldal második komponense érdekel, ez $U_{01}^* D U_{01}$, a Bobnál lévő spin statisztikus operátora, ha a mérés a második eredményt adta. Ilyenkor Bobnak az U_{01}^* unitér transzformációt kell használni az X spin statisztikus operátorának rekonstrukciójához.

A $\phi^\pm$ esetek hasonlóan tárgyalhatók.

Érdemes megjegyezni, hogy az X kvantum bit a távítviteli eljárás során „tönkremegy”, statisztikus operátora az eredeti D -től függetlenül $I/2$ lesz. Ezért valóban távítvitelről, nem pedig a bit lemásolásáról kell beszélnünk. $\square$

Az A és B dinamikai változókat **kompatibilisnak** mondjuk, ha a rendszer bármely állapotában először A -t megmérve majd B -t megmérve ugyanarra az eredményre jutunk, mint ha a két mérést a fordított sorrendben hajtjuk végre. Ha $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}$ tetszőleges és $E_1 = E_A(\Delta_1)$, $E_2 = E_B(\Delta_2)$, akkor a kompatibilitás a

$$E_2 E_1 D E_1 E_2 = E_1 E_2 D E_2 E_1$$

teljesülését jelenti bármilyen statisztikus operátorra.

3. tétel: Ha A és B olyan dinamikai változók, hogy spektrális projekcióik felcserélhetők, akkor A és B kompatibilis.

A kompatibilitás fogalmát kiterjeszthetjük akárhány változó esetére is.

Az S_1, S_2, S_3 spin operátorok nem kompatibilisak, de S_i kompatibilis bármelyik irányú helykoordináta operátorával, hiszen

$$I \otimes S_i, \quad Q_j \otimes I$$

felcserélhető operátorok. Szintén kompatibilis az x irányú helykoordináta és az y irányú sebesség, mint dinamikai változók.

5.4. Szuperszelekció

Az (A1) axióma azt mondta, hogy minden állapothoz tartozik egy állapotvektor a Hilbert-térben, ennek megfordításáról azonban nem beszélt. A proton és a neutron egy részecske (nukleon) két állapotának tekinthető, a megfelelő Hilbert-tér $\mathbb{C}^2$. Ha egységnyiinek vesszük a proton töltését, akkor $Q = \frac{1}{2}(\sigma_3 + I)$ a töltés operátora, sajátértékei 0 és 1: $Q\psi_p = \psi_p$, $Q\psi_n = 0$. A tapasztalat szerint nemtriviális szuperpozíciója a proton és a neutron állapotnak nem létezik, nincs olyan állapotvektor, hogy $\lambda\psi_p + \mu\psi_n$ ($\lambda \cdot \mu \neq 0$). Bizonyos vektorok tehát nem lehetnek állapotvektorok, és bizonyos önadjungált operátorok nem lehetnek dinamikai változók.

Legyen F azoknak a vektoroknak az összessége, amelyekhez tartozik fizikai állapot. Az (A4) posztulátum szerint $E_A(\Delta)F \subset F$ bármilyen A dinamikai változóra és $\Delta \subset \mathbb{R}$ -re. Az a $\mathcal{H}_F$ zárt altér, amelyet F generál invariáns minden $E_A(\Delta)$ projekcióra. Ezért $\mathcal{H}_F$ bármelyik obszervábilisnak invariáns altere.

$M \subset F$ koherens, ha nem bomlik két merőleges részre. Egy maximális koherens halmaz által kifeszített alteret koherens altérnek nevezünk.

4. tétel: Az állapot Hilbert-tér páronként ortogonális koherens alterek összege, a dinamikai változók a koherens altereket invariánsan hagyják.

Szuperszelekciós szabálynak nevezik azt a megszorítást, ami korlátozza azt, hogy bizonyos vektorai az állapot Hilbert-térnek állapotvektorok legyenek.

5.5. A projekciók alkotta logika

A dinamikai változók között vannak olyanok, amelyeket sajátállapotukban megmérve csak 0 vagy 1 értéket kaphatunk. Ezeket **0–1 kérdésnek** nevezzük. Egy 0–1 kérdés tehát a $P = P^* = P^2$ algebrai tulajdonságokkal jellemzett lineáris operátor a Hilbert-téren.

Ha egy P lineáris operátorra $P = P^2$ teljesül, akkor az képterének vektorait helyben hagyja, így a teljes teret a képterére vetíti, P egy projekció. A $P = P^*$ feltétel maga után vonja, hogy P képtere és magtere egymásra merőlegesek. Így a $P = P^2 = P^*$ az ortogonális projekciókat jellemzi, amik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben vannak a szóban forgó Hilbert-tér zárt altereivel. A továbbiakban projekción mindig ortogonális projekciót értünk.

A projekciókon, mint dinamikai változókon, értelmezhetünk egy parciális rendezést a mérések szempontjából. $P_1 \leq P_2$, ha minden olyan állapotban, ahol P_1 a határozott 1 értéket veszi fel, ott P_2 is egy értéket vesz fel. Másként $\langle \phi, P_1 \phi \rangle = 1$ esetén $\langle \phi, P_2 \phi \rangle = 1$. Ez a parciális rendezés több ekvivalens módon is megadható:

- (i) $P_1 \leq P_2$ akkor és csak akkor, ha $P_2 - P_1$ pozitív szemidefinit, azaz $\langle \phi, (P_2 - P_1) \phi \rangle \geq 0$ minden ϕ állapotvektorra.
- (ii) $P_1 \leq P_2$ akkor és csak akkor, ha P_1 képtere benne van P_2 képterében.
- (iii) $P_1 \leq P_2$ akkor és csak akkor, ha $P_1 P_2 = P_1$.

A harmadik feltétel érdekessége, hogy algebrai jellegű, és nem hivatkozik a Hilbert-térre. Egy Hilbert-tér összes projekciói az imént értelmezett parciális rendezéssel olyan halmazt alkotnak, amelynek van legnagyobb és legkisebb eleme, nevezetesen az identitás és a 0 operátor. Ez a halmaz egy teljes háló is, ami azt jelenti, hogy bármilyen véges vagy végtelen részhalmazának van legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja. A $\{P_i : i \in I\}$ projekciók legkisebb felső korlátjára a $\vee \{P_i : i \in I\}$, a legnagyobb alsó korlátra a $\wedge \{P_i : i \in I\}$ jelölést használjuk. $\wedge \{P_i : i \in I\}$ a P_i operátorok képterének metszetére vetítő projekció, míg $\vee \{P_i : i \in I\}$ a P_i -k képtere által generált zárt alterre vetít. Használjuk a $P_1 \wedge P_2$ és $P_1 \vee P_2$ jelöléseket is. Egy Hilbert-tér összes projekciói a $\leq$ rendezéssel egy Hilbert-hálót alkotnak. A Hilbert-háló egy olyan kvantummechanikai rendszer 0–1 kérdéseit tartalmazza, amelyben nincsenek szuperszelekciós szabályok, bármely vektor lehet állapotvektor.

A kvantummechanika hálóelméleti megalapozása Neumanntól és Birkhofftól származik. Kiindulópontja a 0–1 kérdések hálója. Ez lehet a fent leírt Hilbert-háló, vagy annál általánosabb, egy Hilbert-háló részhálója, abban az esetben, amikor bizonyos projekciók nem dinamikai változók.

Legyen $\mathcal{H}$ egy szeparábilis Hilbert-tér. Az $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ halmazt **Neumann-algebrának** mondjuk, ha $I \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ adjungálásra, összeadásra, szorzásra és lineáris kombinációra zárt, továbbá eleget tesz a következő ekvivalens feltételeknek

- (i) $\mathcal{M}$ zárt $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -ban a gyenge operátor topológiára,
- (ii) $\mathcal{M}$ zárt $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -ban az erős operátor topológiára,
- (iii) Ha $AX = XA$ minden $A \in \mathcal{M}$ -re, akkor $X \in \mathcal{M}$,
- (iv) $\mathcal{M}$ zárt a norma topológiára és valamennyi önadjungált elemének spektrális projekcióit is tartalmazza.

Az (i)–(iv) feltételek ekvivalenciája több tételt foglal magába, de ezekkel itt nem foglalkozunk. Ha $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy Neumann-algebra, akkor $\mathcal{M}$ projekciói egy teljes részhálót képeznek az összes projekciók hálójában. Az ilyen részhálókat Neumann-hálóknak nevezzük. Ha $P \in \mathcal{M}$ egy projekció, akkor az $I - P$ projekció is $\mathcal{M}$ -ben van. $P^\perp := I - P$ egy egyváltozós művelet a Neumann-hálóban, amit ortogonális komplementumnak nevezünk. Nyilván $P \wedge P^\perp = 0$ és $P \vee P^\perp = I$. Az „és”, „vagy” és „ortogonális komplementum” műveleteket kapcsolja össze a következő tulajdonság:

$$\text{Ha } P \leq Q, \text{ akkor } Q = P \vee (P^\perp \wedge Q).$$

Ennek neve: ortomodularitás. Azt szokták mondani, hogy a **Neumann-hálók** ortokomplementáris ortomoduláris hálók. Egy olyan struktúrában, ahol a $\vee$ művelet disztributív az $\wedge$ -re nézve

$$A \vee (A^\perp \wedge B) = (A \vee A^\perp) \vee (A \vee B),$$

ha $A \vee A^\perp = I$ és $I \vee C = C$, akkor ez $A \vee B$ -t ad. Az ortomoduláris tulajdonság tehát egyfajta korlátozott disztributivitást jelent. A kvantummechanikai eseménytér egy **nem disztributív háló**. Ha $P \leq Q$, akkor a P és Q projekciók által generált részháló disztributív. Utóbbi akkor is teljesül, ha P és Q felcserélhetők, azaz kompatibilisak.

A hálóelméleti megközelítésben a kvantummechanika és a klasszikus mechanika közötti alapvető különbség abban van, hogy az események hálója a kvantummechanikában nem disztributív, míg a klasszikus esetben az.²¹

A valószínűségelmélet Kolmogorov-féle felépítése egy $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ valószínűségi mezővel indul, amiben Ω egy halmaz, $\mathcal{B}$ és Ω részhalmazainak σ -algebrája és P az ún. valószínűségi mérték $\mathcal{B}$ -n:

- (i) $P : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$,
- (ii) $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$,
- (iii) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$).

$\mathcal{B}$ elemei az események, és $P(A)$ az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége. A $\mathcal{B}$ eseménytér egy disztributív háló. Valószínűségi mérték általánosabb hálókon is értelmezhető.

Legyen $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy Neumann-algebra és $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ $\mathcal{M}$ projekcióinak hálója. A $P : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rightarrow [0, 1]$ hozzárendelést valószínűségi mértéknek nevezzük, ha

- (i) $P(0) = 0, P(I) = 1$,
- (ii) $P(\bigvee_{i=1}^{\infty} Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Q_i)$ ha $Q_i Q_j = 0$ ($i \neq j$).

Amennyiben $\varphi \in \mathcal{H}$ egy állapotvektor, akkor a $P(Q) = \langle \varphi | Q | \varphi \rangle$ várható érték egy valószínűségi mérték értelmez a projekciókon. Általánosabban, ha D egy statisztikus operátor $\mathcal{H}$ -n, akkor

$$P(Q) = \text{Tr } QD \quad (5.5.8)$$

egy valószínűségi mérték. Szuperszelekciós szabály hiányában a valószínűségi mértékek és az állapotok teljesen azonosíthatók.

5. tétel: (Gleason-tétel) *Legyen $\mathcal{H}$ egy szeparábilis Hilbert-tér és $\dim \mathcal{H} \geq 3$. Ekkor minden P valószínűségi mérték egyértelműen előáll az (5.5.8) formulával egy D statisztikus operátorból.*

A tétel 1957-ből származik, és kiterjeszthető Neumann-hálókra is. Egy lehetséges megfogalmazás a következő:

6. tétel: *Legyen $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy Neumann-algebra a szeparábilis $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Tételezzük fel, hogy nincsen olyan $v \in \mathcal{M}$ operátor, hogy vv^* és v^*v egymásra merőleges projekciók és $vv^* + v^*v$ felcserélhető $\mathcal{M}$ bármely elemével! Ha $P : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rightarrow [0, 1]$ egy valószínűségi mérték, akkor létezik egy $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ erősen folytonos reprezentációja $\mathcal{M}$ -nek egy $\mathcal{K}$ Hilbert-téren és egy $\phi \in \mathcal{K}$ állapotvektor, amelyre*

$$P(Q) = \langle \phi | \pi(Q) \phi \rangle$$

teljesül bármely $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ -re.

A Gleason-tétel eredeti megfogalmazása és annak kiterjesztése egyaránt kizárja a túlságosan „szűk” kétdimenziós Hilbert-teret. A kétdimenziós tér altérhálója triviális: végtelen sok nem összehasonlítható egydimenziós alteret tartalmaz, továbbá a 0 és 2 dimenziós altereket. Az egyszerű háló nagyon sok patológikus valószínűségi mértéket enged meg.

A Gleason-tétel jelentősége abban áll, hogy ha ismert a 0–1 kérdések várható értéke egy állapotban, akkor bármilyen dinamikai változó várható értéke egyértelműen meg van határozva.

5.6. Időfejlődés

A magára hagyott kvantummechanikai rendszer időfejlődését unitér operátorokkal adhatjuk meg. Ha a $I \subset \mathbb{R}$ időintervallumban nem végzünk mérést a rendszeren, és D_t jelöli a t idő ponthoz tartozó statisztikus operátort, akkor

$$(A5) \quad D_t = U(t, s) D_s U(t, s)^* \quad (t, s \in I),$$

ahol az $U(t, s)$ **unitér propagátor** unitér operátorok olyan családja, hogy

- (i) $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$,
- (ii) $(s, t) \mapsto U(s, t) \in B(\mathcal{H})$ erősen folytonos.

Az (A5) posztulátumból mindjárt következik, hogy a tiszta állapotban levő rendszer tiszta állapotban is marad. Másrészt az időfejlődés során az átmenetvalószínűségek változatlanok. Ha ψ_t és ϕ_t egy-egy tiszta állapot időfejlődése, akkor a

$$P(\psi_t, \phi_t) = |\langle \psi_t, \phi_t \rangle|^2$$

átmenetvalószínűség t -től független.

A rendszert **konzervatívnak** mondjuk, ha propagátorára $U(t + \tau, s + \tau) = U(t, s)$ teljesül. Ekkor $U(t) := U(t + \tau, \tau)$ egy folytonos unitér csoport, és a Stone-tétel szerint létezik önadjungált generátora, A . A következő posztulátum azt mondja, hogy $-A$ a rendszer Hamilton-operátora.

(A6) A H Hamilton-operátorú konzervatív rendszer unitér propagátora $U(t) = e^{-iHt}$.

7. tétel: Ha $D_s \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ valamilyen $s \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $t \mapsto D_t \phi$ differenciálható bármilyen $\phi \in \mathcal{D}(H)$ -ra, és

$$i \frac{d}{dt} D_t \phi = [H, D_t] \phi. \quad (5.6.9)$$

Továbbá, ha $\psi_s \in \mathcal{D}(H)$ valamilyen $s \in \mathbb{R}$ -re, akkor $t \in \psi_t$ differenciálható, és

$$i \frac{d}{dt} \psi_t = H \psi_t. \quad (5.6.10)$$

Bizonyítás: Az (A6) posztulátum szerint

$$D_t \mathcal{D}(H) = U(t - s) D_s U(s - t) \mathcal{D}(H),$$

ami $\mathcal{D}(H)$ -ban van, hiszen az e^{iHt} unitér csoport $\mathcal{D}(H)$ -t önmagába viszi.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_t \phi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [U(\varepsilon) D_t \frac{U(-\varepsilon) - I}{-\varepsilon} \phi - \frac{U(\varepsilon) - I}{\varepsilon} D_t \phi] = \\ &= i D_t H \phi - i H D_t \phi = -i [H, D_t] \phi. \end{aligned}$$

A tiszta állapotra vonatkozó állítás bizonyítása hasonló. $\square$

(5.6.9)-et és (5.6.10)-t **Schrödinger-egyenletnek** nevezik, és H -t gyakran **Schrödinger-operátornak** mondjuk. Egy $\phi_0 \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H}$ kezdeti feltétel esetén a Schrödinger-egyenlet egyértelmű megoldása $\phi_t = e^{-iHt} \phi_0$.

13. példa: (Egydimenziós **harmonikus oszcillátor**) A klasszikus mechanikában a harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye $H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{K}{2} q^2$, ami a változók átskálázásával

$$H = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2) \quad (5.6.11)$$

alakot ölt. A kvantummechanikában Q a koordinátaoperátor, P pedig az impulzus operátor lesz, maga H az energia vagy Schrödinger-operátor.

A Schrödinger-féle reprezentációban H egy differenciáloperátorrá válik:

$$(Hf)(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \frac{1}{2} x^2 f(x). \quad (5.6.12)$$

Ahhoz, hogy összhangba legyünk a posztulátumokkal be kell látni, hogy H önadjungált operátorként értelmezhető, lásd a 4. fejezet 20. példáját. $\square$

A hidrogénatom Schrödinger-operátorát tartalmazza a 4. fejezet 21. példája.

Ha a rendszer Hamilton-operátora időfüggő, akkor az előző tétel képleteit posztulátumnak tekintjük.

(A7) Az időtől függő Hamilton-operátorú rendszer statisztikus operátorának, illetve hullámfüggvényének fejlődését az

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} W_t \phi &= [H(t), W_t] \phi, \\ i \frac{d}{dt} \psi_t &= H(t) \psi_t \end{aligned}$$

egyenletek adják.

Az A dinamikai változó várható értékére a t időpontban

$$\langle A \rangle_{W_t} = \text{Tr } A e^{-iH(t-s)} W_s e^{iH(t-s)}$$

képletet írhatjuk fel. Ez az ún. **Schrödinger-képet** adja, amelyben az állapotot, ill. a statisztikus operátort tekintjük időben változó mennyiségnek. Az

$$A_H(t) = e^{iH(t-s)} A e^{-iH(t-s)}$$

jelöléssel

$$\langle A \rangle_{W_t} = \text{Tr } A_H(t) W_s = \langle A_H(t) \rangle_{W_s}$$

adja a **Heisenberg-képpel** való ekvivalenciát. A Heisenberg-képben a dinamikai változók transzformálódnak időben.

5.7. Gyakorlófeladatok

1.^M Legyen ϕ_1 és ϕ_2 egy Hilbert-tér két egységvektora, és értelmezzünk a projektorokon egy P_i valószínűséget a

$$P_i(Q) = \langle \phi_i | Q | \phi_i \rangle \quad (i = 1, 2)$$

képlettel! Mutassa meg, hogy $P_1 = P_2$ esetén ϕ_1 és ϕ_2 egy abszolút értékű komplex fázisban különböznek!

2.^M Számolja ki a $|\uparrow\rangle \in \mathbb{C}^2$ állapotban a σ_1 dinamikai változó várható értékét!

3.^M Milyen értékeket ad a $|\downarrow\rangle$ állapotban a σ_y dinamikai változó mérése, és milyen valószínűségekkel?

4.^M Mutassa meg, hogy a két feles spinből álló összetett rendszer sűrűségi mátrixa 15 valós paraméter segítségével

$$\frac{1}{4} \left[I \otimes I + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j + \sum_{i=1}^3 b_i \sigma_i \otimes I + \sum_{j=1}^3 c_j I \otimes \sigma_j \right]$$

alakban írható! (I jelöli a 2×2 -es egységmátrixot, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ a Pauli-mátrixok.) Számolja ki a redukált sűrűségi mátrixokat!

5. Adja meg az $a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ állapot időfejlődését, ha az egy darab feles spinből álló rendszer Hamilton-operátora σ_z ! (A spin kölcsönhat a külső térrel.)

6. Milyen értékeket ad

$$\psi(\theta, \varphi) := e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle$$

állapotban a σ_z dinamikai változó mérése, és milyen valószínűségekkel? Adja meg az állapothoz tartozó sűrűségi mátrixot! Mi a θ és φ paraméterek jelentése?

7. Mutassa meg, hogy az E és F projekciók pontosan akkor felcserélhetők, ha $EF = E \wedge F$!
8. Mutassa meg, hogy az E és F projekciók pontosan akkor felcserélhetők, ha $E \vee F = E + F - EF$!
- 9.^M Igazolja, hogy $E \wedge F = \lim_n (EF)^n$ az erős operátor topológiában, ha E és F projekciók!
10. Legyen E egy projektormérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain! Igazolja, hogy $E((a, b)) \wedge E((c, d)) = E((a, b) \cap (c, d))$!
11. Adjon meg $\mathbb{C}^3$ -ban olyan e_1, e_2, e_3 és f_1, f_2, f_3 bázisokat, hogy az $|\langle e_i, f_j \rangle|^2$ átmenetvalószínűség i -től és j -től független legyen!
- 12.^M Legyen D egy statisztikus operátor! Mutassa meg, hogy D akkor és csak akkor ad meg tiszta állapotot, ha $\text{Tr} D^2 = 1$!
13. Legyen E egy projektormérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain! Igazolja, hogy $E((a, b) \cap (c, d)) = E((a, b)) \times E((c, d))$!
14. Számolja ki a (5.1.4) formulát a spin operátorok értelmezéséből!
- 15.* Mutassa meg, hogy a Neumann-féle entrópia konkáv funkcionál a sűrűségi mátrixok terén!
16. Számolja ki a 2×2 -es (5.2.7) sűrűségi mátrix Neumann-féle entrópiáját!
17. Hogyan módosul a 12. példa távítvitei eljárása, ha $\psi \otimes \psi^+$ a három spin kiindulási állapota?

6. A feladatok megoldása

1. fejezet

7. **Első megoldás:** Bizonyítsuk a mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval. Minden 1×1 -es mátrix alsó háromszög mátrix, és determinánsa megegyezik az egyetlen (főátlóban álló) elemével. Ha $n \times n$ -es mátrixokra már beláttuk az állítást, akkor vegyünk egy A_{n+1} $(n+1) \times (n+1)$ -es alsó háromszög mátrixot, és fejtsük ki a determinánsát az utolsó oszlop szerint. Itt $k \leq n$ esetén $a_{k,n+1} = 0$, így $\det(A_{n+1}) = a_{n+1,n+1} \cdot \det(A_n)$, ahol A_n az A_{n+1} mátrix $n \times n$ -es főmátrixa, ami szintén alsó háromszög mátrix, tehát az indukciós feltevés alapján determinánsa megegyezik a főátlóban álló elemek szorzatával. Így

$$\det(A_{n+1}) = a_{n+1,n+1} \det(A_n) = a_{n+1,n+1} \prod_{i=1}^n a_{ii} = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}.$$

Második megoldás: A determináns az összes olyan szorzat előjeles összege, amelyben minden sorból és minden oszlopból pontosan egy tényező van. Egy alsó háromszög mátrix esetében a fődiagonálisban levő elemek szorzata kivételével minden ilyen szorzat tartalmaz legalább egy 0-t, és ezért maga is 0. $\square$

10. Ha A pozitív szemidefinit, akkor minden z (oszlop)vektorra $z^* A z \geq 0$, speciálisan $z = X^* y$ vektorra is, tehát

$$y^* X A X^* y = (X^* y)^* A X^* y \geq 0. \quad \square$$

11. Olyan A mátrixot keresünk, hogy minden x vektorra teljesüljön, hogy

$$x^* \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} x \geq 0.$$

Particionáljuk x -et

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

alakra, ekkor

$$x^* \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} x = [x_1^*, x_2^*] \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1 + x_2)^* A (x_1 + x_2).$$

Ez pontosan akkor lesz nemnegatív, ha A pozitív szemidefinit. $\square$

14. Elég megnézni, hogy mi lesz az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, illetve $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisvektorok képe.

Mivel az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorok az xy síkban vannak, így a vetítés helyben

hagyja őket. A $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor képének utolsó koordinátája 0 lesz (hiszen pontosan

ekkor kerül rá az xy síkra), és mivel a vetítés iránya az $(1, 1, 1)$ vektorral párhuzamos, így a másik két koordinátának is 1-gyel kell csökkennie. Tehát a vetítés mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

19. Jelölje A^2 elemeit c_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$)! Ekkor $c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}a_{lj}$. Egyenként megnézzük az $i > j$, $i = j$ és $i < j$ eseteket.

Ha $i > j$, akkor az összeg minden tagjának legalább az egyik tényezője 0, így $c_{ij} = 0$.

Ha $i = j$, akkor az összegben pontosan egy nem 0 tag van, tehát $c_{ii} = a_{ii}^2 = (-1)^{2i-2} = 1$.

Ha $i < j$, akkor

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{l=1}^n a_{il}a_{lj} = \sum_{l=i}^j a_{il}a_{lj} = \sum_{l=i}^j (-1)^{l+j} \binom{l-1}{i-1} \binom{j-1}{l-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{j-i} (-1)^{k+i+j} \binom{k+i-1}{i-1} \binom{j-1}{k+i-1} = \\ &= (-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} \sum_{k=0}^{j-i} (-1)^k \binom{j-i}{k} = \\ &= (-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} (1 + (-1))^{j-i} = 0. \end{aligned}$$

$\square$

21. Ha az adott determináns 0, akkor létezik olyan x vektor, amelyre

$$0 = x^*(\lambda^2 A + \lambda B + C)x = \lambda^2 x^* A x + \lambda x^* B x + x^* C x.$$

A feladat feltételei miatt az $a := x^* A x \geq 0$, $b := x^* B x \geq 0$ és $c := x^* C x > 0$. Ha $a = b = 0$, akkor az egyenletből $C = 0$ következne, ami ellentmond C invertálhatóságának. Ha λ valós, akkor $\lambda^2 a + \lambda b + c = 0$ csak akkor teljesülhet, ha $\lambda b < 0$, hiszen a másik két tag összege pozitív, így $b \geq 0$ miatt $\lambda < 0$.

Legyen most $\lambda = u + iv$, $v \neq 0$, ekkor

$$0 = \lambda^2 a + \lambda b + c = (u^2 - v^2)a + i2uva + ub + ivb + c,$$

azaz a valós és képzetes rész is 0. $2uva + vb = 0$, így $v \neq 0$ miatt $2ua = -b$. Itt a és b nem lehet egyszerre 0, és $a \geq 0$, $b \geq 0$, tehát $u \leq 0$. $\square$

22. Első megoldás: A determináns

$$\sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} \prod_{i=1}^n (a_{i,\pi(i)} + tb_{i,\pi(i)})$$

alakú (π az $1, 2, \dots, n$ számok permutációin fut végig, és $\sigma(\pi)$ a π permutáció paritása), így az összeg egy tagjában t együtthatója

$$\sum_{i=1}^n b_{i,\pi(i)} \prod_{i \neq j} a_{j,\pi(j)}.$$

Összegezzük most ezeket a tagokat aszerint, hogy B melyik eleme szerepel bennük, így t együtthatója

$$\sum_{i,j} b_{ij} \sum_{\substack{\pi(i)=j \\ \pi}} (-1)^{\sigma(\pi)} \prod_{i \neq j} a_{j,\pi(j)}.$$

Itt

$$\sum_{\substack{\pi(i)=j \\ \pi}} (-1)^{\sigma(\pi)} \prod_{i \neq j} a_{j,\pi(j)}$$

éppen az az aldetermináns, amit az i -edik sor és j -edik oszlop elhagyásával kapunk A -ból, azaz az inverz mátrix konstrukciója alapján A^{-1} elemeit a'_{ij} -vel jelölve

$$\sum_{\substack{\pi(i)=j \\ \pi}} (-1)^{\sigma(\pi)} \prod_{i \neq j} a_{j,\pi(j)} = \det(A) a'_{ji}.$$

Így összegezve i -re és j -re t együtthatója:

$$\det(A) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} a'_{ji} = \text{Tr}(BA^{-1}) \det A.$$

Második megoldás:

$$\det(A + tB) = \det(B^{-1}) \cdot \det(AB^{-1} + tI),$$

így $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ -nel jelölve az AB^{-1} mátrix sajátértékeit t együtthatója $\det(A + tB)$ -ben megegyezik az AB^{-1} mátrix $\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_j)$ karakterisztikus polinomjában λ együtthatójának $(-1)^{n-1} \det(B)$ -szeresével. A karakterisztikus polinomban λ együtthatója

$$(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \prod_{i \neq j} \lambda_j = (-1)^{n-1} \det(AB^{-1}) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i},$$

mert a sajátértékek szorzata a determináns, és A , B invertálhatósága miatt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$. Másrészt az inverz mátrix sajátértékei megegyeznek a sajátértékek inverzével, továbbá a sajátértékek összege éppen a mátrix nyoma, így t együtthatója

$$(-1)^{n-1} \cdot \det B \cdot (-1)^{n-1} \cdot \det(AB^{-1}) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} = \det(A) \text{Tr}(BA^{-1}).$$

Harmadik megoldás: Mivel $\det(A+tB)$ a t változónak polinomja, t együtthatója a $t = 0$ -ban vett derivált. Használjuk, hogy

$$\det X = \exp \operatorname{Tr} \log X \quad \text{és} \quad \frac{d}{dt} \operatorname{Tr} f(A+tB) \Big|_{t=0} = \operatorname{Tr} f'(A)B.$$

Ezért

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp \operatorname{Tr} \log(A+tB) \Big|_{t=0} &= \exp \operatorname{Tr} \log A \times \frac{d}{dt} \operatorname{Tr} \log(A+tB) \Big|_{t=0} = \\ &= \det A \times \operatorname{Tr} A^{-1}B. \end{aligned}$$

□

23. Legyen $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ és x nem-nulla vektor, amire $ABx = \lambda x$. Ekkor $Bx \neq 0$ és

$$BA(Bx) = \lambda(Bx),$$

tehát Bx sajátvektora BA -nak λ sajátértékkel.

□

2. fejezet

2. Csak a háromszög-egyenlőtlenséget mutatjuk meg, a norma többi tulajdonsága triviálisan teljesül.

$$\begin{aligned} p(x+y) &= p_1(x+y) + p_2(x+y) \leq p_1(x) + p_1(y) + p_2(x) + p_2(y) = \\ &= p(x) + p(y) \end{aligned}$$

A q -ra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségben a $q(x+y) = p_1(x+y)$ és $q(x+y) = p_2(x+y)$ eseteket külön vizsgáljuk, csak az első nézzük meg, a második ugyanúgy megy.

$$q(x+y) = p_1(x+y) \leq p_1(x) + p_1(y) \leq q(x) + q(y).$$

□

3. Az $\|(x+y) - (x_n+y_n)\|$ normát kell felülről becsülni.

$$\|(x+y) - (x_n+y_n)\| \leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\|$$

a háromszög-egyenlőtlenség szerint. A jobb oldal a feltevés alapján 0-hoz tart. □

5. Válasszuk $\varepsilon > 0$ -t tetszőlegesen! Ekkor $\|x_n - x\| < \varepsilon$, ha $n > N_0$ valamilyen N_0 küszöbre. Ekkor $n > N_0$ esetén

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) - x \right\| &= \frac{1}{n} \|(x_1 - x) + (x_2 - x) + \dots + \\ &\quad + (x_N - x) + (x_{N+1} - x) + \dots + (x_n - x)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \|x_k - x\| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \|x_k - x\| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \|x_k - x\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mivel $\|x_k - x\|$ egy korlátos sorozat, valamilyen K felső korláttal, és

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \|x_k - x\| \leq \frac{N}{n} K,$$

ha n -et elég nagyra válasszuk, akkor $NK/n < \varepsilon$, és azt kapjuk, hogy ilyenkor

$$\left\| \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) - x \right\| < 2\varepsilon. \quad \square$$

6. Ha f_n Cauchy-sorozat, akkor egyenletesen konvergál egy $C[0, 1]$ -beli függvényhez. Ugyanakkor $f_n(x)$ pontonkénti határértéke az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

függvény, ami nem folytonos. Az ellentmondás mutatja, hogy f_n nem lehet Cauchy-sorozat. $\square$

10. Belátjuk, hogy $x_n \rightarrow 0$ egyenletesen, vagyis a $C[0, 1]$ tér normájában:

$$|x_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

Ha $x_n \rightarrow 0$ a $C^1[0, 1]$ tér normájában is, akkor $x'_n \rightarrow 0$ egyenletesen. De

$$x'_n(t) = t^n - \frac{2n+2}{n+2} t^{2n+1}$$

és

$$|x'_n(1)| = \frac{2n+2}{n+2} - 1 = \frac{n}{n+2},$$

ami nem tart 0-hoz, ha $n \rightarrow \infty$. Ezért x'_n nem tart a 0-hoz egyenletesen (de még pontonként sem), és x_n nem konvergál a $C^1[0, 1]$ térben. $\square$

15. **a.** A számegyenesen a konvex halmazok az intervallumok, és két intervallum egyesítése általában nem intervallum. Tehát $A \cup B$ nem mindig konvex.

b. $A \cap B$ konvex közvetlenül a definíció alapján.

c. Legyen $x, y \in A + B$ és $0 < \lambda < 1$. Ekkor $x = x_A + x_B$ és $y = y_A + y_B$ valamilyen $x_A, y_A \in A$ és $x_B, y_B \in B$ vektorokra. $\lambda x + (1 - \lambda)y = [\lambda(x_A + (1 - \lambda)y_A)] + [\lambda x_B + (1 - \lambda)y_B]$. Mivel $\lambda x_A + (1 - \lambda)y_A \in A$ és $\lambda x_B + (1 - \lambda)y_B \in B$, látjuk, hogy az összegük $A + B$ -ben van. Ezért $A + B$ konvex. $\square$

18. A feltételek mellett $A - B$ folytonos lineáris leképezés és a kérdéses altér $\text{Ker}(A - B)$, ami zárt. $\square$

20. Legyen H egy valódi részhalmaz és válasszunk $x \in H$, valamint $y \notin H$ pontokat. Tekintsük az őket összekötő szakaszt: $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Legyen $\lambda_0 = \sup\{0 \leq \lambda \leq 1 : \lambda x + (1 - \lambda)y \notin H\}$ és $z := \lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y$. Ha H nyílt, akkor komplementuma zárt és ezért $z \notin H$. Ha H zárt, akkor $z \in H$. Ez mutatja, hogy H nem lehet egyidejűleg zárt és nyílt. $\square$

21.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(t) dt \right| &\leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \sup\{|f(s)| : s \in [0, 1]\} dt = \\ &= x \|f\| \leq \|f\|. \end{aligned}$$

Ezért

$$\|L(f)\| = \sup\{|L(f)(x)| : x \in [0, 1]\} \leq \|f\|,$$

és ebből adódóan $\|L\| \leq 1$. L tehát korlátos, ami ekvivalens a folytonossággal. $\square$

22. Nagyon sok ilyen funkcionál van. Legyen X az olyan ℓ^∞ -beli sorozatok tere, amelyeknek páros indexű és páratlan indexű tagjai egyaránt konvergálnak, esetleg különböző határértékekhez. $(1, -1, 1, -1, \dots) \in X$. Legyen

$$\varphi(a) = \frac{t+1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} + \frac{1-t}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n},$$

ha $a \in X$. Ez a funkcionál konvergens sorozatokhoz a határértéküket rendeli, az $(1, -1, 1, -1, \dots)$ sorozathoz pedig t -t.

$$\|\varphi\| \leq \frac{|t+1|}{2} + \frac{|1-t|}{2},$$

tehát φ folytonos. A Hahn–Banach-tétel alapján φ kiterjeszthető a teljes ℓ^∞ -térre. $\square$

30. Egyrészt

$$\|(x, y)\|_1 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \leq \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|_1,$$

másrészt

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2} = \sqrt{2}\|(x, y)\|_1. \quad \square$$

33. Ha f folytonos, akkor $\ker f$ zárt, hiszen a zárt $\{0\}$ halmaz ősképe a folytonos leképezésnél. A megfordításhoz feltehető, hogy f nem azonosan 0. Ekkor van olyan $x \in E$ vektor, amelyre $f(x) = 1$. Tételezzük fel, hogy $\ker f$ zárt, de f nem folytonos! Ekkor létezik egységvektoroknak egy z_n sorozata, amelyre $|f(z_n)| \rightarrow \infty$.

$$\frac{z_n}{f(z_n)} - x \in \ker f.$$

Ugyanakkor

$$\frac{z_n}{f(z_n)} - x \rightarrow -x,$$

és $\ker f$ zártsága alapján $-x \in \ker f$. Viszont ez ellentmond a $f(x) = 1$ kiindulásnak. $\square$

35. Legyen $f_m \in C_0(\mathbb{R}^n)$ egy Cauchy-sorozat. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^n$ pontra $f_m(x)$ konvergál egy $f(x)$ számhoz. A norma definíciója alapján f_m egyenletesen konvergál az f függvényhez, ezért f egy folytonos függvény. Azt kell megmutatni, hogy f eltűnik a végtelenben. Ha nem így lenne, akkor van olyan $x_k \in \mathbb{R}^m$ pontsorozat és $\varepsilon > 0$ szám, hogy $x_k \rightarrow \infty$ és $|f(x_k)| > \varepsilon$. Mivel $f_m \rightarrow f$ egyenletesen egy nagy m -re $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ és ebből $|f_m(x_k)| > \varepsilon/2$. Ez azt mutatná, hogy a feltevással ellentétben $f_m \in C_0(\mathbb{R}^m)$ nem teljesül. Végeredményben tehát $f \in C_0(\mathbb{R}^m)$ igaz kell, hogy legyen és $C_0(\mathbb{R}^m)$ Banach-tér. $\square$

38. Nincsenek. Az integrál folytonos funkcionál. Ha a 0 integrálú függvények sűrűn lennének, akkor az integrál funkcionál az egész téren 0 lenne.

45.

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{A^m B^n}{m! n!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m+n=k} \binom{k}{m} A^m B^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \\ &= e^{A+B}. \end{aligned}$$

$\square$

50. Azt kell megmutatni, hogy

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2)$$

bármilyen x_1 és x_2 vektorra és $0 \leq \lambda \leq 1$ számra. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor léteznek olyan $y_1, y_2 \in S$ pontok, amelyekre

$$F(x_1) \geq \|x_1 - y_1\| - \varepsilon \quad \text{és} \quad F(x_2) \geq \|x_2 - y_2\| - \varepsilon.$$

Mivel S konvex, a $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ pont is S -ben van, és

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \|(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\|.$$

A jobb oldal becslése a háromszög-egyenlőtlenség alapján:

$$\begin{aligned} \|(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\| &\leq \\ &\leq \|\lambda(x_1 - y_1) + (1-\lambda)(x_2 - y_2)\| \leq \\ &\leq \lambda\|x_1 - y_1\| + (1-\lambda)\|x_2 - y_2\| \leq \\ &\leq \lambda F(x_1) + \lambda\varepsilon + (1-\lambda)F(x_2) + (1-\lambda)\varepsilon. \end{aligned}$$

Végeredményben az

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) + \varepsilon$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami $\varepsilon > 0$ tetszőleges volta miatt a konvexitást jelenti. $\square$

3. fejezet

1. Nem, meg tudunk adni olyan $f \in L^2(\mathbb{T})$ függvényt, amely minden z^n függvényre merőleges ($n = 0, 1, 2, \dots$). Legyen $f(z) = \bar{z}$. Ekkor

$$\langle f(z), z^n \rangle = \int_{\mathbb{T}} \overline{f(z)} z^n dz = \int_{\mathbb{T}} z^{n+1} dz = \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = 0. \quad \square$$

2. Ha $\mathcal{H}$ véges dimenziós, akkor (1) és (2) egyaránt teljesül, csak a végtelen dimenziós esetet tekintjük. Legyen $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ megszámlálható bázisa $\mathcal{H}$ -nak. Mivel a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható, a

$$H := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n : \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 < \infty, t_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\}$$

részhalmaza $\mathcal{H}$ -nak megszámlálható, és megmutatjuk, hogy H sűrű. Felhasználjuk, hogy $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{C}$ -ben. Legyen $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér tetszőleges eleme. $\varepsilon > 0$ -hoz válasszunk olyan $t_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ számot, hogy

$$|t_n - x_n| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2^n}}.$$

Ekkor

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n - x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

tehát H valóban sűrű.

Amennyiben $\{e_i : i \in I\}$ nem megszámlálható bázisa $\mathcal{H}$ -nak, $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ minden $i \neq j$ esetén. Legyen G_i az e_i körül írt $\sqrt{2}/2$ sugarú nyílt gömb. A $\{G_i : i \in I\}$ halmazrendszer nem megszámlálható és páronként diszjunkt nyílt halmazokból áll. $\mathcal{H}$ -ban nem lehet megszámlálható sűrű halmaz, mert annak minden G_i nyílt gömbbe bele kéne metszeni. Megmutattuk tehát, hogy ha $\mathcal{H}$ -nak nincs megszámlálható bázisa, akkor nem lehet benne megszámlálható sűrű halmaz.

Az (1) $\Rightarrow$ (2) következtetést másként is igazolhatjuk. Ha $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ megszámlálható sűrű halmaz, akkor a belőle Gram–Schmidt-ortogonalizációval kapott $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ vektorrendszer páronként merőleges vektorokból áll, és ugyanazt a lineáris alteret feszíti ki, mint az eredeti $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ rendszer. Ezért nem lehet olyan egységvektor, amely minden e_i vektorra merőleges. Tehát $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ bázis. $\square$

5. Kiszámoljuk az $\langle f_n, f_m \rangle$ belső szorzatot:

$$\begin{aligned} \langle f_n, f_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f_n(x)} f_m(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx = \delta_{n,m} + 0. \end{aligned}$$

Ez mutatja, hogy $f_n(x)$ egy ortonormált rendszer. Nem bázis, mert $f(x) \equiv 1$ merőleges minden $f_n(x)$ vektorra:

$$\langle f, f_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0. \quad \square$$

8. A Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

ezért $\|x\| \geq \sup\{|\langle x, y \rangle| : \|y\| = 1\}$. Ha $x = 0$, akkor nyilvánvalóan egyenlőség van. Ha $x \neq 0$, akkor az $y = x/\|x\|$ választás mutatja az egyenlőséget. $\square$

9. Legyen

$$(Pf)(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)).$$

Ekkor P az $L^2(\mathbb{R})$ tér korlátos lineáris transzformációja, két unitér operátor konvex kombinációja. Evidens módon $Pf = f$ pontosan akkor, ha f páros és $Pf = 0$ pontosan akkor, ha f páratlan. Belátjuk, hogy $P = P^*$. Ebből már következik az, amit akarunk:

$$\{\text{páros függvények}\}^\perp = (\text{Rng } P)^\perp = \text{Ker } P^* = \{\text{páratlan függvények}\}.$$

Az önadjungáltság igazolása:

$$\begin{aligned} 2\langle g, Pf \rangle &= \int \overline{g(x)}(f(x) + f(-x)) dx = \\ &= \int \overline{g(x)}f(x) dx + \int \overline{g(x)}f(-x) dx = \\ &= \int \overline{g(x)}f(x) dx + \int \overline{g(-x)}f(x) dx = \\ &= \int (\overline{g(x)} + \overline{g(-x)})f(x) dx = \\ &= 2\langle Pg, f \rangle. \end{aligned}$$

Egyébként $P = P^2$ is teljesül, tehát P a páros függvények alterére vetítő projekció. $\square$

11. Először integrálással igazoljuk, hogy az $f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ függvényrendszer ortonormált $L^2[0, \pi]$ -ben:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx \sin mx = \delta_{n,m}.$$

Legyen $f \in L^2[0, \pi]$ tetszőleges függvény, amit kiterjeszthetünk a $[-\pi, \pi]$ intervallumra egyértelműen egy F páros függvénné.

$$\int_{-\pi}^\pi |F(x)|^2 dx = 2 \int_0^\pi |F(x)|^2 dx = 2\|f\|^2,$$

ezért $F \in L^2[-\pi, \pi]$. Most felhasználjuk, hogy $L^2[-\pi, \pi]$ -ben a trigonometrikus rendszer teljes, tehát

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin mx + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos mx$$

L^2 -normában (Fourier-sor). F párossága miatt $b_m = 0$. Az $F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin mx$ sorfejtés az $L^2[0, \pi]$ térben is érvényes, ahol az összegfüggvény az előre adott f . Ez adja az $f_n(x)$ függvényrendszer teljességét. $\square$

16. Hilbert-térben érvényes az

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

paralelogramma azonosság. Ha $f = \mathbf{1}_{[0, 1/2]}$, $g = \mathbf{1}_{[1/2, 1]}$, akkor a sup normára $\|f\| = \|g\| = \|f + g\| = \|f - g\| = 1$, és az azonosság nem teljesül, így nem létezik olyan belső szorzat, amely a sup normát adja. $\square$

47. Tetszőleges x vektor $x = x_1 + x_2$ alakban írható úgy, hogy $Ex_1 = x_1$, és $Ex_2 = 0$.

$$(E - F)x = (x_1 - Fx_1) + Fx_2.$$

Mivel

$$\langle x_1 - Fx_1, Fx_2 \rangle = \langle x_1, Fx_2 \rangle - \langle x_1, F^*Fx_2 \rangle = 0,$$

az $x_1 - Fx_1$ és Fx_2 vektorok merőlegesek. Ezért a Pitagorasz-tétel szerint

$$\|(E - F)x\|^2 = \|x_1 - Fx_1\|^2 + \|Fx_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2.$$

Tehát megmutattuk, hogy $\|(E - F)x\| \leq \|x\|$. $\square$

49. Következik abból, hogy az $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ Schwarz-egyenlőtlenségben $x \neq 0$ esetén csak $y = \lambda x$ esetén teljesül az egyenlőség. $\square$

50. $(P + Q)^2 = P + Q$ alapján $PQ + QP = 0$. Ebből P -vel való balról és jobbról szorzással $PQP + QP = 0$ és $PQ + PQP = 0$, ami azt mutatja, hogy $PQ = QP$. $\square$

56. Nem igaz. Tételezzük fel, hogy $0 < a_n < a$, és az E projektormérték olyan, hogy $E(\{a\}) = I$! Ekkor $E([0, a_n]) = 0$ és $E([0, a]) = I$. A konvergencia semmilyen topológiában nem állhat fenn. $\square$

80. Jelölje $\mathcal{F}$ a Fourier-transzformációt és P_n a $\{h \in L^2(\mathbb{R}) : h(x) = 0, \text{ ha } |x| \geq n\}$ altérre való ortogonális projekciót! P_n konvergál az identitáshoz az so -topológiában. Mivel

$$g_n = \mathcal{F}P_nf,$$

g_n konvergál $\mathcal{F}f$ -hez. $\square$

89. Ha $Uy = y$, akkor $y \perp \mathcal{H}_0$, ugyanis

$$\begin{aligned} \langle (x + Ux + \dots + U^{n-1}x) - nx, y \rangle &= \langle x, y \rangle + \\ &+ \langle x, U^*y \rangle + \dots + \langle x, (U^*)^{n-1}y \rangle - n\langle x, y \rangle = 0, \end{aligned}$$

hiszen $U^*y = y$. Másrészt, ha $y \perp (Ux - x)$ minden x vektorra, akkor

$$0 = \langle y, Ux - x \rangle = \langle U^*y - y, x \rangle,$$

és $U^*y = y$. Utóbbi ekvivalens $Uy = y$ -nal. $\square$

95. $L(A)$ pozitív operátor:

$$\begin{aligned}\langle A, L(A) \rangle &= \int_0^1 \text{Tr} A^* D^t A D^{1-t} dt = \\ &= \int_0^1 \text{Tr} (D^{(1-t)/2} A^* D^t A D^{(1-t)/2}) dt \geq 0,\end{aligned}$$

hiszen $\text{Tr} X^* X \geq 0$ ($X = D^{t/2} A D^{(1-t)/2}$).

Bázistranszformációval D diagonális alakra hozható, és feltételezhetjük, hogy $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Kiszámoljuk az $L(E_{ij})$ mátrixot. (E_{ij} azt a mátrixot jelenti, amelynek ij -eleme 1 és a többi 0.) Az egyszerűbb írás érdekében legyen $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

$$\begin{aligned}L(E_{12}) &= \int_0^1 \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{1-t} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1-t} \end{bmatrix} dt = \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1^t \lambda_2^{1-t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dt = E_{12} \int_0^1 \lambda_1^t \lambda_2^{1-t} dt = \\ &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\log \lambda_1 - \log \lambda_2} E_{12}.\end{aligned}$$

A számolás eredményeit úgy foglalhatjuk össze, hogy L sajátértékei a

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\log \lambda_i - \log \lambda_j}, & \lambda_i \neq \lambda_j, \\ \lambda_i, & \lambda_i = \lambda_j, \end{cases}$$

számok a hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig az E_{ij} mátrixegységek. $\square$

98. Legyen $A \in B(\mathcal{H})$. Az A operátor gráfja

$$\{(x, Ax) : x \in \mathcal{H}\}.$$

$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ tetszőleges (x_0, y_0) pontjának a gráfon vett vetülete (z, Az) alakú és

$$(z, Az) - (x_0, y_0) \perp (x, Ax)$$

minden x vektorra. A merőlegességet skalárszorzattal felírva a

$$\langle z - x_0, x \rangle + \langle Az - y_0, Ax \rangle = 0$$

egyenlethez jutunk, ami átrendezve

$$\langle (I + A^* A)z - x_0 - A^* y_0, x \rangle = 0.$$

Mivel ez minden x vektorra teljesül

$$(I + A^* A)z = x_0 + A^* y_0$$

és

$$z = (I + A^*A)^{-1}(x_0 + A^*y_0).$$

Tehát (x_0, y_0) képe a gráfon

$$((I + A^*A)^{-1}(x_0 + A^*y_0), A(I + A^*A)^{-1}(x_0 + A^*y_0)).$$

□

99. Az $AB - BA = cI$ egyenletből levezethetjük, hogy $A^2B - BA^2 = 2cA$. Ezt az eljárást iterálva kaphatjuk az $A^nB - BA^n = (n-1)A^{n-1}$ formulát, amiből $e^A B e^{-A} = cI + B$ is következik. A baloldal és a jobboldal spektrumát összehasonlítva kapjuk, hogy $c = 0$. □

4. fejezet

2. Legyen T sűrűn értelmezett zárt operátor. Ekkor $\lambda - T$ is ilyen. Tételezzük fel, hogy A a $\lambda - T$ operátor korlátos inverze! A^*y benne van $(\lambda - T)^*$ értelmezési tartományában, hiszen

$$|\langle A^*y, (\lambda - T)x \rangle| = |\langle y, A(\lambda - T)x \rangle| = |\langle y, x \rangle| \leq C\|x\|.$$

Ezért $(\lambda - T)^*$ mindenütt értelmezve van. Most kiszámoljuk az $A^*(\lambda - T)^*$ operátor hatását:

$$\langle x, A^*(\lambda - T)^*y \rangle = \langle Ax, (\lambda - T)^*y \rangle = \langle (\lambda - T)Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Ez azt mutatja, hogy A^* a $(\lambda - T)^* = \bar{\lambda} - T^*$ operátor inverze. □

3. Tételezzük fel, hogy $x_n \in \mathcal{D}(UT) = \mathcal{D}(T)$, továbbá $x_n \rightarrow x$ és $(UT)x_n \rightarrow y$! Ekkor $Tx_n \rightarrow U^{-1}y$. Most hivatkozunk arra, hogy T zárt, és megállapítjuk, hogy $Tx = U^{-1}y$, amiből $(UT)x = y$ következik. □

4. Elég megmutatni, hogy minden $\lambda \in \mathbb{C}$ komplex szám sajátértéke a T_2 operátornak:

$$T_2 e^{i\lambda x} = \lambda e^{i\lambda x}.$$

□

5. Azt kell megmutatni, hogy $(0, y) \in \overline{\Gamma(UTU^*)}$ esetén $y = 0$. Tételezzük fel, hogy $x_n \in \mathcal{D}(UTU^*) = U\mathcal{D}(T)$, $x_n \rightarrow 0$ és $UTU^*x_n \rightarrow y$! Ekkor $U^*x_n \rightarrow 0$ és $TU^*x_n \rightarrow U^{-1}y$. Mivel T lezárható, arra következtethetünk, hogy $U^{-1}y = 0$, de ekkor $y = 0$.

Második megoldás: $U\overline{T}U^*$ zárt kiterjesztése UTU^* -nak, ezért az előbbi lezárható. □

6. Legyen E az A operátor spektrálmértéke, és egy x vektorra $\mu_x(H) := \langle x, E(H)x \rangle$ az x -hez tartozó mérték $\mathbb{R}$ -en, valójában $\mathbb{R}^+$ -on A feltételezett pozitivitása miatt.

Legyen $\alpha > 0$. Ekkor $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$ ekvivalens az

$$\int_0^\infty \lambda^{2\alpha} d\mu_x(\lambda)$$

integrál végeességével. Mivel a 0-tól 1-ig vett integrál mindig véges, a feltétel valójában

$$\int_1^\infty \lambda^{2\alpha} d\mu_x(\lambda) < +\infty.$$

Ha $\alpha < \beta$, akkor $\lambda^{2\alpha} < \lambda^{2\beta}$ a $\lambda > 1$ esetben. Ezért $\mathcal{D}(A^\beta) \subset \mathcal{D}(A^\alpha)$. Nevezetesen $\mathcal{D}(A^2) \subset \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$. $\square$

7. Az állítás nyomban következik abból a tényből, hogy egy korlátos A operátorra és egy nem feltétlenül korlátos T operátorra $(A + T)^* = A^* + T^*$. $\square$
8. Nem igaz. Legyen $\mathcal{D}(H_D) := \{f \in C^2[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$ és $H_D f := -f''$, továbbá $\mathcal{D}(H_N) := \{f \in C^2[0, 1] : f'(0) = f'(1) = 0\}$ és $H_N f := -f''$. Ezek lényegében önadjungált operátorok, hiszen létezik sajátfüggvényekből álló bázis mindkettőhöz. Ha $A := H_D/2$ és $B := H_N/2$, akkor A és B nyilván lényegében önadjungáltak, de az összegük nem az, hiszen $\overline{H_D}$ és $\overline{H_N}$ különböző önadjungált kiterjesztései. $\square$
9. A $(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f = 0$ differenciálegyenlet $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ alakú megoldását keressük. Mivel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (k+1) x^k, \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^n a_k k(k-1) x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+2} (k+2)(k+1) x^k, \end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve a

$$\begin{aligned} &x^n [-a_n n(n+1) + \lambda a_n] + x^{n-1} [-a_{n-1} n(n-1) + \lambda a_{n-1}] + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-2} x^k [a_{k+2} (k+2)(k+1) - a_k k(k+1) + \lambda a_k] - \\ &- 2x [6a_3 + (\lambda - 2)a_1] + [2a_2 + \lambda a_0] = 0 \end{aligned}$$

összefüggéshez jutunk. Amennyiben f megoldás, minden együtthatónak 0-nak kell lenni. A főegyütthatóból kapjuk, hogy $\lambda = n(n+1)$. $\square$

10. Az $\mathcal{D}(A) := \{f \in C^2[0, 1] : f(1) = e^{-i\theta} f(0)\}$ értelmezési tartomány tartalmazza az

$$f_n(x) = e^{i(\theta+2\pi n)x} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

függvényeket, amelyek egyrészt teljes ortonormált rendszert alkotnak, másrészt sajátfüggvényei az A operátornak: $Af_n = -(\theta + 2\pi n)f_n$. A könnyen ellenőrizhetően szimmetrikus, ezért lényegében önadjungált. $\square$

14. Legyen E az A operátorhoz tartozó projektormérték. Ha $0 < a < +\infty$, akkor az $E([0, a])$ projekció képterében levő vektorok $\mathcal{D}(A^n)$ -ben vannak bármilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén. Valóban, legyen $\mu_x(H) = \langle x, E(H)x \rangle$ az x vektorhoz tartozó mérték. Ha

$E([0, a])x = x$, akkor $E([b, c])x = 0$ minden $a < b < c$ esetén, és a μ_x mérték tartója $[0, a]$ -ban van. Ez maga után vonja, hogy az

$$\int_0^\infty \lambda^{2\alpha} d\mu_x(\lambda)$$

integrál bármilyen $\alpha > 0$ esetén véges, és ezért $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$.

Egyesítve az $E([0, a])$ projekciók képterét a $0 < a < +\infty$ értékekre olyan sűrű halmazt kapunk, amely $\mathcal{D}(A^\alpha)$ -ban van bármilyen $\alpha > 0$ számra. $\square$

15. Ha S szimmetrikus, akkor $S \subset S^*$. S^* mindig zárt operátor és annak részei lezárhatók. $\square$

18. A sok lehetőség egyike egy olyan szigorúan növvő c_n sorozat, amely 3-hoz konvergál. $\square$

19. Legyen például c_n a $(0, 1)$ -beli racionális számok sorozatba rendezése. $\square$

21. Csak véges dimenziós térben igaz. Végtelen dimenziós térben a 0 mindig a lényeges spektrumhoz tartozik, ugyanis a sajátértékek torlódási pontja. $\square$

22. Legyen $E(\cdot)$ az A operátor spektrálmértéke és $\mu_x(H) = \langle x, E(H)x \rangle$ az ebből származó valószínűségi mérték $\mathbb{R}^+$ -on. $x \in \mathcal{D}(A^2)$ feltétele, hogy $\int |\lambda^z|^2 d\mu_x(\lambda)$ véges legyen. Felhasználva, hogy $|\lambda^{a+ib}| = \lambda^a$ ($a, b \in \mathbb{R}$) a következőképpen becsülhetünk:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\lambda^z|^2 d\mu_x(\lambda) &= \int_0^1 |\lambda^z|^2 d\mu_x(\lambda) + \int_1^\infty |\lambda^z|^2 d\mu_x(\lambda) \leq \\ &\leq \int_0^1 1 d\mu_x(\lambda) + \int_1^\infty \lambda^2 d\mu_x(\lambda). \end{aligned}$$

Itt mindkét integrál véges, a második $x \in \mathcal{D}(A)$ miatt. Tehát $x \in \mathcal{D}(A^z)$, ha $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

$$\langle x, A^z x \rangle = \int_0^\infty \lambda^z d\mu_x(\lambda)$$

differenciálható a paraméteres integrál differenciálhatóságára vonatkozó tétel alapján. $\square$

23. A szimmetrikusságot parciális integrálással mutatjuk meg:

$$\begin{aligned} \langle g, Hf \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}(x)(-f''(x)) dx = \\ &= -[\overline{g}(x)f'(x)]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}'(x)f'(x) dx = \\ &= 0 + [\overline{g}'(x)f(x)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}''(x)f(x) dx = \\ &= \langle Hg, f \rangle. \end{aligned}$$

Az $f_n(x) = e^{-inx}$ függvények $n \in \mathbf{Z}$ -re az értelmezési tartományban vannak, teljes ortogonális rendszert alkotnak és sajátfüggvények; hiszen $-(e^{inx})'' = n^2 e^{inx}$. Következésképpen H lényegében önadjungált és tisztán pontspektruma $\{n^2 : n = 0, 1, 2, \dots\}$. $\square$

25. Jelölje σ az N dimenziós egységgömböt, K_1 , ill. K_2 az egységgömbbe írható legnagyobb, ill. az egységgömb köré írható legkisebb kockát, amelynek élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, H_σ , H_1 ill. H_2 pedig a Dirichlet-féle Laplace-operátort a megfelelő tartományokon, és legyen $\lambda_n(H)$ a H operátor n -edik sajátértéke, $\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \dots$ (a többszörös multiplicitású sajátértékeket többször felsorolva)!

$L^2(K_1)$ -nek létezik H_1 sajátvektoraiból álló bázisa:

$$\left\{ c(n_1, \dots, n_N) \prod_{i=1}^N \sin \left(n_i \frac{\pi}{2} \sqrt{N} \left(x_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) \right) : n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

($c(n_1, \dots, n_N)$ normálási tényező), és mivel H_2 könnyen ellenőrizhetően szimmetrikus, ezért lényegében önadjungált, és

$$\sigma(H_2) = \sigma_p(H_2) = \left\{ -\frac{N\pi^2}{4}(n_1^2 + \dots + n_N^2) : n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}_+ \right\}.$$

Hasonlóan látható, hogy H_2 lényegében önadjungált, és

$$\sigma(H_2) = \sigma_p(H_2) = \left\{ -\frac{\pi^2}{4}(n_1^2 + \dots + n_N^2) : n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N} \right\}.$$

H_i sajátértékei mind véges multiplicitásúak, és $0 > \lambda_1(H_i) \geq \lambda_2(H_i) \geq \dots \geq \lambda_n(H_i) \dots \rightarrow -\infty$; $i = 1, 2$. Mivel H_1 sajátértékei alulról, H_2 sajátértékei pedig felülről becsülik H_σ sajátértékeit, ezért H_σ sajátértékei is véges multiplicitásúak, és $0 > \lambda_1(H_\sigma) \geq \lambda_2(H_\sigma) \geq \dots \geq \lambda_n(H_\sigma) \dots \rightarrow -\infty$. Mivel létezik H_σ sajátvektoraiból álló bázis $L^2(\sigma)$ -ban (lásd gömbfüggvények), ezért H_σ lényegében önadjungált, és $\sigma(\overline{H}_\sigma) = \sigma_p(\overline{H}_\sigma) = \sigma_p(H_\sigma)$. Mivel $0 \notin \sigma(\overline{H}_\sigma)$, $(\overline{H}_\sigma)^{-1} \in \mathcal{B}(L^2(\sigma))$, és

$$\sigma((\overline{H}_\sigma)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_i(H_\sigma)} : i = 1, 2, \dots \right\}.$$

$\overline{H}_\sigma^{-1}$ tehát olyan korlátos önadjungált operátor, amelynek spektruma véges multiplicitású sajátértékekből áll, melyek egyetlen torlódási pontja a 0, $(\overline{H}_\sigma)^{-1}$ tehát kompakt. Az az állítás, hogy $(\overline{H}_\sigma)^{-1}$ Hilbert–Schmidt típusú, ekvivalens azzal, hogy sajátértékeinek négyzetösszege véges, vagyis hogy

$$t := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i(H_\sigma)^2} < +\infty.$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i(H_\sigma)^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i(H_1)^2} = \sum_{n_1, \dots, n_N=1}^{\infty} \frac{4}{N\pi^2(n_1^2 + \dots + n_N^2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{N^2\pi^2} \sum_{n_1, \dots, n_N=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{N}n_1^2 + \dots + \frac{1}{N}n_N^2} \leq \\
&\leq \frac{4}{N^2\pi^2} \sum_{n_1, \dots, n_N=1}^N \frac{1}{N} \left(\frac{1}{n_1^2} + \dots + \frac{1}{n_N^2} \right)
\end{aligned}$$

az $x \mapsto x^{-1}$ függvény konvexitása miatt, így

$$t \leq \frac{4}{N^3\pi^2} \cdot N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

tehát $(\overline{H}_\sigma)^{-1}$ valóban Hilbert–Schmidt típusú. $\square$

27. Válasszunk különböző $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ számokat, és tételezzük fel, hogy $\sum_{i=1}^n \lambda_i e(z_i) = 0$ valamilyen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ együtthatókkal! Kiírva a komponenseket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= 0, \\
\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_n z_n &= 0, \\
&\vdots \\
\lambda_1 \frac{z_1^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} + \lambda_2 \frac{z_2^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} + \dots + \lambda_n \frac{z_n^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} &= 0. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Az első $(n-1)$ komponensre vonatkozó egyenlet ekvivalens az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = 0$$

mátrix-vektor formában felírt lineáris egyenletrendszerrel. Az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nem 0, hiszen ún. Vandermonde-féle determináns, amely $\prod_{i < j} (z_i - z_j)$. Az egyenletrendszernek ezért csak a triviális $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ megoldása van. $\square$

28. A véges dimenziós eset triviális, csak a végtelen dimenzióval foglalkozunk. Ha A lényeges spektruma üres, akkor spektruma véges multiplicitású sajátértékekből áll, amelyek seholsem torlódnak. Így a sajátértékek $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ formában írhatók, és $\lambda_n \rightarrow +\infty$. Az $(I+A)^{-1}$ operátor sajátértékei $(1+\lambda_1)^{-1}, (1+\lambda_2)^{-1}, \dots$ és sajátvektorai ugyanazok. Az $(I+A)^{-1}$ operátor sajátértékei véges multiplicitásúak, és a 0-hoz konvergálnak. Ezért $(I+A)^{-1}$ kompakt önadjungált operátor.

A megfordítás ugyanezt a gondolatmenetet használhatja a fordított irányban. $\square$

30. A megoldáshoz a (4.6.19) képletet használjuk. A $Tf = 0$ egyenlet lineárisan független megoldásainak az $f_1(x) = x$ és $f_2(x) = 1$ függvényeket választhatjuk. Ekkor $p(x)(f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)) = 1$, és megkapjuk a Green-függvényt:

$$G(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ y, & \text{ha } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

32. Olyan f vektorokat keresünk, hogy bármilyen g vektorra a $t \mapsto \langle g, U(t)f \rangle$ $\mathbb{R}$ -en értelmezett függvénynek van analitikus kiterjesztése a teljes komplex síkra. Legyen A az $U(t)$ csoport infinitezimális generátora, E az $A = A^*$ operátor spektrálmértéke és $P = E([a, b])$ egy kompakt $[a, b]$ intervallumhoz tartozó spektrális projekció. Azt állítjuk, hogy $Pf = f$ esetén a fent leírt analitikus kiterjesztés létezik. $f \in \mathcal{D}(e^{izA})$ minden z komplex számra ugyanis

$$\int |e^{iz\lambda}|^2 d\langle f, E(\cdot)f \rangle = \int_a^b |e^{iz\lambda}|^2 d\langle f, E(\cdot)f \rangle,$$

mivel a $\mu_f(\cdot) := \langle f, E(\cdot)f \rangle$ véges mérték, és tartója $[a, b]$ -ben van. Továbbá a $z \mapsto \langle g, e^{izA}f \rangle$ függvény analitikus, hiszen

$$\langle g, e^{izA}f \rangle = \int_a^b e^{iz\lambda} d\langle g, E(\cdot)f \rangle,$$

és a deriválhatóságot a paraméteres integrálok differenciálására vonatkozó tétel biztosítja. $\square$

5. fejezet

1. Fel fogjuk használni, hogy az $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ egyenlőtlenségben pontosan akkor áll fenn az egyenlőség, ha x és y egy skalár szorzóban különbözik.

Az

$$\langle \phi_1 | Q | \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 | Q | \phi_2 \rangle$$

egyenlőségben tegyük Q helyébe az $|\phi_1\rangle\langle\phi_1|$ projekciót. Ekkor az

$$1 = |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2$$

egyenlőséghez jutunk, ami a fentiek miatt csak akkor állhat fenn, ha ϕ_1 számszorosa ϕ_2 -nek. Mivel mindkettő egységvektor, a szám egy abszolút értékű lehet csak. $\square$

2.

$$[1, 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad \square$$

3. σ_y sajátértékei $+1$ és -1 , a hozzá tartozó sajátvektorok pedig

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ezért σ_y -t bármilyen állapotban mérve ± 1 értékeket kapunk. A $|\downarrow\rangle$ állapotban a $+1$ kimenet valószínűsége

$$|\langle e_1, |\downarrow\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \quad \square$$

4. A 2×2 -es mátrixok terében $\sigma_0 = I$, σ_1 , σ_2 , σ_3 egy teljes ortogonális rendszer, alkalmas normálással bázis lenne. Ezért $\{\sigma_i \otimes \sigma_j : 0 \leq i, j \leq 3\}$ 16 darab vektorból álló teljes ortogonális rendszer 4×4 -es mátrixok terében. Így minden 4×4 -es mátrix $\sum_{i,j} A_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$ alakú. $\sigma_i \otimes \sigma_j$ mátrixok $\sigma_0 \otimes \sigma_0$ kivételével 0 nyomúak, ezért

$$\text{Tr} \left(\sum_{i,j=0}^3 A_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) = A_{00} \text{Tr}(\sigma_0 \otimes \sigma_0) = 4A_{00}.$$

Ha 1 nyomú mátrixunk van, pl. sűrűségi mátrix, akkor $A_{00} = 1/4$. $\square$

9. Először igazoljuk, hogy $(EFE)^n$ az erős operátor topológiában egy P projekcióhoz tart. EFE egy pozitív kontrakció, ezért $(EFE)^n$ pozitív kontrakciók monoton fogyó sorozata, aminek létezik so határértéke, lásd a 3. fejezet 4. lemmáját, és az utána lévő megjegyzést. A határérték nyilván önadjungált, és

$$P^2 = (so - \lim_n (EFE)^n)^2 = so - \lim_n (EFE)^{2n} = P.$$

Tehát P projekció.

Ha $(E \wedge F)x = x$ egy x vektorra, akkor $Ex = x$ és $Fx = x$, amiből adódik, hogy $(EFE)^n x = x$ és $Px = x$. Ezért $E \wedge F \leq P$.

Másrészt $Px = x$ esetén $\|EFEx\| = \|x\|$, hiszen ha EFE csökkentené $\|x\|$ -t, akkor EFE hatványainak alkalmazása után nem lehetne a határérték vektor hossza $\|x\|$. Hasonló okoskodással $\|EFEx\| = \|x\|$ alapján $\|Ex\| = \|x\|$ és $Ex = x$. Ekkor $\|EFx\| = \|x\|$ és F sem csökkentheti x hosszát, így $Fx = x$. Azt mutattuk meg, hogy $Px = x$ alapján $Ex = x$ és $Fx = x$ következik, ezért $P \leq E \wedge F$.

A feladat az $(EF)^n$ sorozat határértékéről szól.

$$(EF)^n = (EFE)^n F.$$

A jobb oldal PF -hez tart, ami $P \leq F$ miatt P . Így $(EF)^n \xrightarrow{so} P = E \wedge F$. $\square$

12. Legyen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ a D statisztikus operátor sajátértékeinek listája, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Ugyanakkor

$$\text{Tr} D^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha $\lambda_i^2 = \lambda_i$, azaz $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$. $\square$

Függelék

A. Metrikus és topologikus terek

Ha adott az X alaphalmaz részhalmazainak olyan $\mathcal{G}$ rendszere, hogy

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{G}$,
- (ii) ha $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, akkor $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$,
- (iii) ha $G_i \in \mathcal{G}$ ($i \in I$), akkor $\cup_i G_i \in \mathcal{G}$,
- (iv) ha x_1 és x_2 különböző pontok X -ben, akkor vannak olyan diszjunkt $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ halmazok, hogy $x_1 \in G_1$ és $x_2 \in G_2$,

akkor $\mathcal{G}$ -t (Hausdorff-féle) **topológiának** nevezzük az X halmazon, és elemeit **nyílt halmazoknak** hívjuk. Ha $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ olyan halmazrendszer, hogy $\mathcal{G}$ bármely eleme előáll $\mathcal{G}_0$ -beli halmazok egyesítéseként, akkor $\mathcal{G}_0$ a $\mathcal{G}$ **topológia bázisa**.

1. példa: $\mathbb{R}$ szokásos topológiájában azokat a $G \subset \mathbb{R}$ halmazokat mondjuk nyíltnak, amelyek bármilyen $x \in G$ pontjához van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset G$. E topológia bázisát alkotják a racionális végpontú nyílt intervallumok vagy azok a nyílt intervallumok, amelyek végpontjai diadikus racionális számok.

□

Ha $(X, \mathcal{G})$ egy topologikus tér, és $X_0 \subset X$, akkor X_0 -on van egy $(X, \mathcal{G})$ -ből örökölt topológia, amelyben az $X_0 \cap G$ halmazok a nyíltak, $G \in \mathcal{G}$. Ezt a topológiát **altértopológiának** is nevezzük.

Az $(X, \mathcal{G})$ topologikus térben az x_n sorozatról azt mondjuk, hogy $x \in X$ -hez **konvergál**, jelölésben $x_n \rightarrow x$, ha minden olyan G nyílt halmazhoz, amelyre $x \in G$, van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $x_n \in G$, ha $n \geq N$. A topologikus tér definíciójának (iv) része biztosítja azt, hogy egy sorozatnak legfeljebb egy határértékpontja legyen.

2. példa: Egy másik topológiát értelmezhetünk $\mathbb{R}$ -en, ha azokat a halmazokat tekintjük nyíltnak, amelyek előállnak balról zárt és jobbról nyílt intervallumok egyesítéseként. Ebben a topológiában $x_n \rightarrow x$ esetén $x \leq x_n$ véges sok n kivételével. Ezért ezt a topológiát a **jobbról való konvergencia** topológiájának nevezzük.

□

A nyílt halmazok komplementumát **zárt halmaznak** nevezzük. Zárt halmazok metszete zárt, és véges sok zárt halmaz egyesítése zárt. Egy **halmaz lezárása** a legszűkebb őt tartalmazó zárt halmaz. Ha egy halmaz lezárása a teljes tér, akkor azt **sűrűnek** mondjuk.

3. példa: A racionális számok $\mathbb{R}$ szokásos topológiájában sűrű halmazz képeznek. Ez a kijelentés azzal ekvivalens, hogy minden nyílt intervallum tartalmaz racionális számot. $\square$

Topológiát **metrika**, azaz **távolság** segítségével is megadhatunk. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ távolság, ha $x, y, z \in X$ esetén

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
- (iii) $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$.

Ha d egy távolság, akkor a

$$G(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

halmazok $(x \in X, r > 0)$ egy topológia bázisát alkotják. Ez a távolsághoz vagy a **metrikus térhez** tartozó topológia. Ha két metrika ugyanazt a topológiát indukálja, akkor **(topologikusan) ekvivalenseknek** nevezzük őket. Érdemes megjegyezni, hogy metrikus térben $x_n \rightarrow x$ pontosan akkor teljesül, ha $d(x_n, x) \rightarrow 0$.

4. példa: A $\mathbb{R}^2$ halmazon

$$d_p((x, y), (x', y')) := [|x - x'|^p + |y - y'|^p]^{1/p}$$

távolságot ad minden $1 \leq p < \infty$ számra. (A metrika (ii) tulajdonsága a Minkowski-egyenlőtlenség következménye.) Ezek a távolságok mind topologikusan ekvivalensek, ugyanis

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$$

a d_p távolság topológiájában akkor és csak akkor teljesül, ha $x_n \rightarrow x$ és $y_n \rightarrow y$ a szokásos értelemben. $\square$

Ha egy topológia metrikából származtatható, akkor **metrizálhatónak** nevezzük. Nem minden topológia metrizálható. Metrizálható térben egy F halmaz pontosan akkor zárt, ha $x_n \rightarrow x$ és $x_n \in F$ esetén $x \in F$.

5. példa: Tekintsük $\mathbb{R}$ -en a jobbról való konvergencia topológiáját! Tételezzük fel, hogy ezt egy d távolság metrizálja!

Ebben a térben $[x, 1)$ nyílt halmaz, tehát $G(x, r) \subset [x, 1)$ valamilyen $r(x) > 0$ számra. Ez azt jelenti, hogy $y < x$ esetén $d(x, y) > r(x)$. Legyen $H_n = \{x \in [0, 1) : r(x) > 1/n\}$. A H_n halmazok lefedik $[0, 1)$ -et, ezért valamilyen n -re H_n nem megszámlálható. Ez tartalmaz egy szigorúan fogyó $x_1 > x_2 > \dots$ sorozatot, amely $\mathbb{R}$ szokásos topológiájában konvergál egy $0 \leq x < 1$ számhoz, de konvergál a jobbról való folytonosság topológiájában is. Az utóbbi megállapítás ellentmond a $d(x, x_k) \geq 1/n$ körülménynek. $\square$

Az x_n sorozat **Cauchy-féle** egy (X, d) metrikus térben, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$, ha $n, m \geq N$. Egy metrikus teret **teljesnek** nevezünk, ha Cauchy-sorozatai konvergenssek. Egy metrikus tér teljessége nem topológiai tulajdonság. Egy teljes metrikus tér topológiáját olyan távolsággal is metrizálhatjuk, ami nem teljes.

6. példa: Tekintsük a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán a következő távolságot:

$$d(n, m) := \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|.$$

Ebben a metrikus térben x_k Cauchy-sorozat, ha x_k konvergál egy n természetes számhoz (a szokásos értelemben), azaz $x_k = n$ véges sok k index kivételével, vagy a másik lehetőség az, hogy $x_k \rightarrow \infty$ a szokásos értelemben. Az utóbbi x_k sorozat nem konvergens a metrikus térben, ezért a tér nem teljes. Ha $\mathbb{N}$ -hez hozzávesszük a ∞ szimbólumot, és az $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ téren egy $\tilde{d}$ metrikát értelmezzünk a

$$\tilde{d}(n, m) = d(n, m), \quad \tilde{d}(n, \infty) = \frac{1}{n}$$

képletekkel, akkor egy teljes metrikus teret kapunk. $\square$

A példához hasonlóan minden (X, d) metrikus térhez van egy olyan $(\tilde{X}, \tilde{d})$ teljes metrikus tér, hogy $X \subset \tilde{X}$, X sűrű $\tilde{X}$ -ban, és $\tilde{d}$ megszorítása $X \times X$ -re éppen a d távolság. Ilyenkor az $(\tilde{X}, \tilde{d})$ teret az (X, d) metrikus tér **teljessé tételének** vagy **teljes burkának** nevezzük. A teljes burk lényegében egyértelműen minden metrikus térre létezik.

Egy topologikus tér **szeparábilis**, ha van benne megszámlálható sűrű halmaz.

7. példa: A folytonos $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények $C[0, 1]$ terén

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$

távolság, amiben $f_n \rightarrow f$ jelentése az, hogy f_n egyenletesen konvergál f -hez. A térben a polinomok sűrű halmazt alkotnak, ami a Weierstrass-féle approximációs tétel következménye. Mivel egy polinomot tetszőleges pontossággal közelíthetünk racionális együtthatójú polinommal, és utóbbiak megszámlálhatóan vannak, $C[0, 1]$ szeparábilis. $\square$

Legyen X és X' topologikus tér és $f : X \rightarrow X'$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy f **folytonos** az $x \in X$ pontban, ha minden olyan $G' \subset X'$ nyílt halmazhoz, amelyre $f(x) \in G'$ létezik egy $G \subset X$ nyílt halmaz, hogy $x \in G$ és $f(G) \subset G'$.

Metrizálható terek esetén f x -beli folytonossága azzal egyenértékű, hogy $x_n \rightarrow x$ esetén $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

8. példa: Legyen (X, d) egy metrikus tér és $H \subset X$. Értelmezzünk egy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \inf\{d(x, h) : h \in H\}$$

képlettel! Mivel $d(x, h) \leq d(x, x') + d(x', h)$, teljesül az

$$f(x) \leq d(x, x') + f(x')$$

egyenlőtlenség, azaz

$$|f(x) - f(x')| \leq d(x, x').$$

Ez mutatja f folytonosságát, ugyanis $x_n \rightarrow x$ esetén $d(x_n, x) \rightarrow 0$, tehát $|f(x_n) - f(x)| \rightarrow 0$.

Megmutatható, hogy $f(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha x a H halmaz lezárási pontja. Ezért zárt H halmazra $f(x) > 0$, ha $x \notin H$. Ilyenkor f -et az x pont H -tól való távolságának nevezzük. $\square$

Ha az $f : X \rightarrow X'$ topologikus terek közötti leképezés minden $x \in X$ pontban folytonos, akkor egyszerűen folytonosnak nevezzük.

Az $f : X \rightarrow X'$ leképezés pontosan akkor folytonos, ha minden $G' \subset X'$ nyílt halmazra $f^{-1}(G')$ nyílt halmaz X -ben.

9. példa: Az a tény, hogy egy leképezés folytonos-e nagyban függ attól, hogy milyen topológiákra vonatkoztatunk. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény, és egy x_n $\mathbb{R}$ -beli sorozatra jelentse $x_n \rightarrow x$ a szokásos konvergenciát. Tekintsünk $\mathbb{R}$ -en két topológiát, $\mathcal{G}_1$ -et és $\mathcal{G}_2$ -t, és nézzük meg, hogy $f : (\mathbb{R}, \mathcal{G}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{G}_2)$ mikor lesz folytonos.

Ha $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ a szokásos topológiák, akkor ezek metrizálhatók, és f folytonossága azt jelenti, hogy bármilyen $x_n \rightarrow x$ esetén $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Ez tehát az $\mathbb{R}$ -en értelmezett valós függvények jól ismert folytonosság fogalma.

$\mathcal{G}_1$ -et tartsuk meg a szokásos topológiának, de $\mathcal{G}_2$ legyen a jobbról való konvergencia topológiája. Ekkor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lesz, ha minden $a < b$ esetén $\{x \in \mathbb{R} : a \leq f(x) < b\}$ nyílt halmaz. Ez maga után vonja, hogy

$$\{x \in \mathbb{R} : a < f(x) < b\} = \bigcup_n \left\{ x \in \mathbb{R} : a + \frac{1}{n} \leq f(x) < b \right\}$$

ugyancsak nyílt. Ezért f -nek folytonosnak kell lennie a szokásos értelemben is. Ha $x_n \rightarrow x_0$ és $f(x_0) = a$, akkor $\{x \in \mathbb{R} : a \leq f(x) < a + \varepsilon\}$ nyílt halmaz, ami csak úgy lehet, ha $f(x_n) \geq f(x_0)$ véges sok n kivételével. Ezért f -nek lokális minimuma van a tetszőleges x_0 pontban. Megmutatható, hogy ez csupán az állandó függvények tulajdonsága. Csak ezek lesznek az $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{G}_2)$ értelemben folytonosak.

Végül legyen $\mathcal{G}_1$ a jobbról való konvergencia topológiája és $\mathcal{G}_2$ a szokásos topológia. Ekkor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ akkor lesz folytonos, ha $x_n \searrow x_0$ fogyóan esetén $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Ilyenkor szoktuk az f függvényt jobbról folytonosnak mondani. $\square$

Egy topologikus teret **kompaktnak** nevezünk, akkor ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

10. példa: $\mathbb{R}^n$ nem kompakt, mert a

$$G(0, m) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(0, x) < m\}$$

gömbök közül nem választható ki véges sok, ami lefedné $\mathbb{R}^n$ -et. Ugyanakkor, $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ kompakt, mert minden nyílt halmazokból álló fedése tartalmaz véges fedést (Borel-féle befedési tétel). $\square$

Egy topologikus tér kompakt részhalmazai zártak, kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt. Továbbá, ha X kompakt és $f : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés, akkor $f(X)$ is kompakt. Egy metrizálható tér pontosan akkor kompakt, ha minden sorozata tartalmaz konvergens részsorozatot.

11. példa: $\mathbb{R}$ -en a jobbról való konvergencia topológiája nem kompakt, mert az $[n, n+1)$ nyílt halmazok páronként diszjunkt fedést alkotnak, $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

12. példa: $\mathbb{T}$ kompakt, mert $\mathbb{R}$ -nek korlátos és zárt részhalmaza, vagy mert $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{T}$, $f(\varphi) = e^{i\varphi}$ folytonos ráképezés. $\square$

13. példa: $\mathbb{R}^n$ részhalmazai közül a korlátos és zárt halmazok a kompaktak. $\square$

Az X topologikus teret **lokálisan kompaktnak** nevezzük, ha minden $x \in X$ ponthoz van olyan x -et tartalmazó nyílt halmaz, amelynek a lezárása kompakt.

14. példa: Legyen X egy lokálisan kompakt tér, $H \subset X$ és $x \in H$. Ekkor létezik olyan nyílt G halmaz és K kompakt halmaz X -ben, amelyre $x \in G \subset K$.

- (i) Ha H zárt halmaz, akkor $G \cap H$ nyílt H -ban, és $H \cap K$ kompakt részhalmaza H -nak. Nyilván $x \in G \cap H \subset K \cap H$. Ezért H az öröklött topológiában lokálisan kompakt.
- (ii) Legyen most H nyílt, és tételezzük fel az egyszerűség végett, hogy X topológiája metrizálható. Ekkor x -nek és $X \setminus H$ -nak van egy pozitív $d_0 > 0$ távolsága. Legyen $G_0 = G(x, d_0/2)$ és $F_0 = \overline{G_0}$. Ekkor $\overline{G_0} \subset H$ zárt halmaz X -ben, és $\overline{G_0} \cap K$ kompakt részhalmaza H -nak. Mivel $x \in G_0 \cap G \subset \overline{G_0} \cap K$, így H lokálisan kompakt.

Megmutattuk, hogy lokálisan kompakt tér nyílt és zárt részhalmazai is lokálisan kompaktak. Mivel $\mathbb{R}^n$ lokálisan kompakt, így bőséges példáink vannak lokálisan kompakt terekre. Ugyanakkor az ℓ^p és $C[0, 1]$ terek nem lokálisan kompaktak. $\square$

Legyen $(X_1, \mathcal{G}_1)$ és $(X_2, \mathcal{G}_2)$ két topologikus tér. Az $X_1 \times X_2$ halmazon a $\{G_1 \times G_2 : G_1 \in \mathcal{G}_1, G_2 \in \mathcal{G}_2\}$ halmazrendszer egy topológia bázisát alkotja, ezt a topológiát tekintjük a két topológia szorzatának. Legyen Z egy topologikus tér és $f : Z \rightarrow X_1 \times X_2$, $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ egy leképezés. A **szorzattopológia** jellemzője az a tulajdonság, hogy bármilyen f leképezés akkor és csak akkor lesz folytonos, ha az f_1 és f_2 koordináta leképezései folytonosak.

15. példa: $\mathbb{R}^2$ szokásos topológiája számára a $G(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) < r\}$ gömbök alkotnak bázist. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{R}^2$ szokásos topológiája szorzattopológia. Ehhez két dolog kell. Egyrészt a $G(x, r)$ gömbök előállnak $G_1 \times G_2$ alakú halmazok egyesítéseiként, G_1 és G_2 nyílt részhalmazai $\mathbb{R}$ -nek. Másrészt minden ilyen $G_1 \times G_2$ halmaz előáll $G(x, r)$ alakú gömbök egyesítéseiként.

Legyen $y \in G(x, r)$. Ekkor $d(x, y) =: r_0 < r$ és $G(y, r - r_0) \subset G(x, r)$. Könnyű látni, hogy

$$\left(y_1 - \frac{r - r_0}{2\sqrt{2}}, y_1 + \frac{r - r_0}{2\sqrt{2}}\right) \times \left(y_2 - \frac{r - r_0}{2\sqrt{2}}, y_2 + \frac{r - r_0}{2\sqrt{2}}\right) \subset G(y, r - r_0).$$

(Egyszerűen az $r - r_0$ sugarú körbe beírtunk egy $r - r_0$ átlójú négyzetet.) Ez bizonyítja az első állítást. A második állítás bizonyítása hasonló, itt négyzetbe kell kört írni. $\square$

Természetesen véges sok topologikus tér szorzatát hasonlóan képezzük. Ha végtelen sok teret szorzunk, akkor olyan $G_1 \times G_2 \times \dots$ halmazok alkotnak bázist a szorzattérben definíció szerint, hogy G_i a teljes X_i tér, véges sok index kivételével. Így, ha $\mathbb{R}$ -nek vesszük önmagával végtelen sokszor a szorzatát, akkor $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times \dots$ nem lesz nyílt halmaz a szorzattérben!

1. tétel: (Tyihonov-tétel) *Akárhány kompakt topologikus tér szorzata kompakt.* $\square$

16. példa: Tekintsük a $\{0, 2\}$ halmazon a triviális topológiát, azaz $\{0\}$ és $\{2\}$ egyaránt nyílt halmazok. Legyen $X := \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ a $\{0, 2\}$ -tér önmagával vett végtelen szorzata. A

Tyihonov-tétel szerint ez a tér kompakt és nem más mint a $\{0, 2\}$ sorozatok tere. Ha $x_n \in X$ egy sorozat, akkor $x_n \rightarrow x$, ha $(x_n)^{(k)} \rightarrow x^{(k)}$, azaz az $(x_n)_k$ sorozat rögzített k -ra véges sok kivétellel $x^{(k)}$. $((x_n)^{(k)})$ jelöli az x_n sorozat k -adik elemét.)

Ezt a teret metrizálhatjuk is, például a

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x^{(k)} - y^{(k)}|}{2^k}$$

távolsággal.

$$f : X \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(k)}}{3^k}$$

egy folytonos leképezés. Az x $0 - 2$ sorozathoz azt a valós számot rendeljük, amely harmados tört kifejtésének jegyeit az x sorozat adja meg. A képtér azokból a valós számokból áll amelyek ilyen kifejtésében nincsen 1-es jegy. Ez az ún. **Cantor-halmaz**. Az f leképezés és inverze is folytonos. Ez azon múlik, hogy valós számok egy sorozata éppen akkor konvergál egy valós számhoz, ha harmados tört alakban felírva őket, a jegyek sorozata rendre konvergál. $\square$

Ezután folytonos függvényekre vonatkozó tételeket ismertetünk.

2. tétel: Legyen X egy lokálisan kompakt tér, amely σ -kompakt, azaz lefedhető megszámlálható sok kompakt halmazzal. Ha $\{G_i : i \in I\}$ nyílt fedése X -nek, akkor létezik folytonos $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ függvényeknek egy olyan sorozata, amelyre

(i) $\text{supp} f_n$ kompakt,

(ii) $\sum f_n(x) = 1$,

(iii) $\#\{n \in \mathbb{N} : K \cap \text{supp} f_n \neq \emptyset\}$ véges minden $K \subset X$ kompakt halmazra,

(iv) minden $n \in \mathbb{N}$ -re létezik $i \in I$, hogy $\text{supp} f_n \subset G_i$. $\square$

A tételben szereplő f_n függvénysorozatot a $\{G_i : i \in I\}$ fedéshez tartozó egységosztásnak nevezzük.

3. tétel: (Tietze-féle kiterjesztési tétel) Legyen F zárt halmaz egy metrizálható X topologikus térben és $f : F \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely kiterjesztése f -nek. $\square$

4. tétel: (Weierstrass approximációs tétele) Ha f az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény és $\varepsilon > 0$, akkor létezik olyan p polinom, amelyre

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{ha } a \leq x \leq b.$$

Ha f valós értékű, akkor az őt közelítő polinom együtthatói valósak, egyébként komplex számok. A tétel úgy is fogalmazható, hogy a $C[a, b]$ Banach-térben a polinomok sűrűn

vannak. Amennyiben a $[0, 1]$ intervallumról van szó, az f -et közelítő polinomok sorozata konkrétan is megadható. Ha

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

akkor a $p_n(x)$ **Bernstein-féle polinomok** egyenletesen konvergálnak az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényhez.

5. tétel: (Stone–Weierstrass approximációs tétel) Legyen X egy kompakt topologikus tér és $\mathcal{A}$ folytonos valós értékű függvények olyan halmaza, amelyre

- (i) $\mathcal{A}$ tartalmazza a konstans függvényeket,
- (ii) Ha $x, y \in X$ és $x \neq y$, akkor van olyan $f \in \mathcal{A}$, amelyre $f(x) \neq f(y)$,
- (iii) Ha $f, g \in \mathcal{A}$, akkor $f + g, f \cdot g \in \mathcal{A}$.

Ekkor $\mathcal{A}$ sűrű a $C_{\mathbb{R}}(X)$ Banach-térben.

A tétel komplex változata hasonló.

6. tétel: (Stone–Weierstrass approximációs tétel) Legyen X egy kompakt topologikus tér és $\mathcal{A}$ folytonos komplex értékű függvények olyan halmaza, amely a fenti (i)–(iii) tulajdonságok mellett az alábbi tulajdonsággal is rendelkezik:

- (iv) Ha $f \in \mathcal{A}$, akkor $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Ekkor $\mathcal{A}$ sűrű a $C_{\mathbb{C}}(X)$ Banach-térben.

Gyakran fontos a Stone–Weierstrass-tétel egy szorzattérre vonatkozó következménye. Legyen X az Y és Z kompakt topologikus terek szorzata. Ha $f(y, z)$ kétváltozós folytonos függvény az $X = Y \times Z$ téren, akkor $\varepsilon > 0$ esetén vannak olyan $g_1(y), g_2(y), \dots, g_n(y)$ és $h_1(z), h_2(z), \dots, h_n(z)$ folytonos függvények, amelyekre

$$\left| f(y, z) - \sum_{i=1}^n g_i(y) h_i(z) \right| \leq \varepsilon$$

minden $(y, z) \in Y \times Z$ esetén. (Azt is mondhatjuk, hogy a $C_{\mathbb{R}}(Y)$ és $C_{\mathbb{R}}(Z)$ lineáris terek algebrai tenzorszorzata sűrű $C_{\mathbb{R}}(Y \times Z)$ -ben.)

Gyakorlófeladatok

- Legyen X tetszőleges halmaz és d távolság X -en! Mutassuk meg, hogy $\varrho(x, y) = \min(1, d(x, y))$ ugyancsak távolság!
- Definiáljuk a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán az alábbi kétváltozós függvényt:

$$d(m, n) := \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{ha } n \neq m, \\ 0, & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy ekkor $(\mathbb{N}, d)$ teljes metrikus tér!

3. A természetes számok halmazán definiáljuk az alábbi függvényt:

$$d(m, n) := \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ha } m, n \text{ utolsó } k \text{ számjegye azonos,} \\ 0, & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy ekkor $(\mathbb{N}, d)$ metrikus tér, de nem teljes!

4. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény! Igazoljuk, hogy a $d(x, y) := |f(x) - f(y)|$ metrikát határoz meg $\mathbb{R}$ -en!
5. Mutassuk meg, hogy az alábbi metrikus terek nem teljesek, és konstruáljuk meg a megfelelő, teljessé tett tereket! **a.** Az $\mathbb{R}$ egyenes a $d(x, y) := |\arctg x - \arctg y|$ távolsággal. **b.** Az $\mathbb{R}$ egyenes a $d(x, y) := |e^x - e^y|$ távolsággal.
6. Legyen $\mathcal{I}$ a valós számok zárt valódi intervallumainak a halmaza: $\mathcal{I} := \{[a, b] \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Definiáljuk $\mathcal{I}$ -n a következő távolságot:

$$d : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad ([a, b], [c, d]) \mapsto |a - c| + |b - d|!$$

Bizonyítsuk be, hogy $(\mathcal{I}, d)$ metrikus tér, de nem teljes! Adjuk meg a tér teljes burkát!

7. Az előző feladatban szereplő $\mathcal{I}$ halmazon értelmezzünk egy másik távolságot:

$$d : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad ([a, b], [c, d]) \mapsto \mu([a, b]) + \mu([c, d]) - 2\mu([a, b] \cap [c, d]),$$

ahol $\mu([x, y]) = |y - x|$ és $\mu(\emptyset) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ez metrikus tér, de nem teljes! Keressük meg a teljessé tett tereket!

8. Mutassuk meg, hogy a valós együtthatós polinomok $\mathcal{P}$ tere nem teljes az alábbi metrikákra:

$$\begin{aligned} d_1(P, Q) &:= \max\{|P(x) - Q(x)| : 0 \leq x \leq 1\}, \\ d_2(P, Q) &:= \int_0^1 |P(x) - Q(x)| dx, \\ d_3(P, Q) &:= \sum_{i \in \mathbb{N}} |c_i|, \quad \text{ha } P(x) - Q(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i x^i. \end{aligned}$$

9. Legyen (M, d) metrikus tér és $E \subset M$ nemüres részhalmaza! **a.** Igazoljuk, hogy

$$F(x) := \inf\{d(x, y) : y \in E\}$$

folytonos függvény! ($f(x)$ -et az x pont E halmaztól mért távolságának nevezzük.)

b. Igazoljuk, hogy egy metrikus térben minden zárt halmaz előáll megszámlálhatóan sok nyílt halmaz metszeteként!

10. Legyen (A, ϱ_1) és (B, ϱ_2) metrikus terek, $\varrho_1, \varrho_2 \leq 1$ és $A \cap B = \emptyset$. Igazolja, hogy az $X = A \cup B$ halmazon

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \quad y \in B, \\ 1, & \text{ha } x \in B, \quad y \in A, \\ \varrho_1(x, y), & \text{ha } x, y \in A, \\ \varrho_2(x, y), & \text{ha } x, y \in B \end{cases}$$

metrika!

11. Mutassuk meg, hogy ha F zárt, G nyílt halmaz, és $G \subset F$, akkor $F \setminus G$ zárt! Továbbá, ha $F \subset G$, akkor $G \setminus F$ nyílt.
12. Mutassuk meg, hogy a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza nem tartalmaz nyílt intervallumot!
13. Legyen

$$A = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 4^{-i} : a_k \in \{0, 3\} \right\}!$$

Tartalmaz-e A nyílt intervallumot?

14. Legyen (X, d) metrikus tér! Bizonyítsuk be, hogy

$$\varrho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

távolság!

15. Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$d_{\infty}(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}, \quad d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $d_p(x, y) \rightarrow d_{\infty}(x, y)$, ha $p \rightarrow \infty$!

16. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(n, m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|.$$

Melyek a d metrikára a konvergens sorozatok, melyek a Cauchy-sorozatok? Mi az $(\mathbb{N}, d)$ tér teljes burka?

17. Legyen (X, d) egy metrikus tér! Az alábbi metrikák közül melyik ekvivalens d -vel? (Bizonyítsa az állítását!)

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \\ d_2(x, y) &= \min\{1, d(x, y)\}, \\ d_3(x, y) &= \sup\{|d(x, t) - d(y, t)| : t \in X\}. \end{aligned}$$

18. Az X halmaz a

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq y, \\ 0, & \text{ha } x = y \end{cases}$$

metrikával metrikus tér. Igazolja, hogy (X, d) pontosan akkor szeparábilis, ha X megszámlálható halmaz! Mikor lesz X kompakt?

19. Legyen x_n egy kompakt metrikus térben különböző pontokból álló sorozat! Mutassa meg, hogy x_n pontosan akkor konvergens, ha az $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ halmaznak egyetlen torlódási pontja van! Lehet az x_n -re vonatkozó feltételt gyengíteni?

20. Legyen f az X topologikus térnek az Y topologikus tére való ráképzése! Igazolja, hogy X szeparábilis magával vonja Y szeparábilisát!
21. Igazolja, hogy ha (X, d) szeparábilis metrikus tér, akkor minden nyílt fedéséből kiválasztható megszámlálható fedés!
22. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a következő távolságot tekintjük:

$$d(t, s) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \in Q, \quad s \notin Q, \\ 1, & \text{ha } t \notin Q, \quad s \in Q, \\ \min\{1/2, |t - s|\}, & \text{ha } t, s \in Q, \\ \min\{1/2, |t - s|\}, & \text{ha } t, s \notin Q. \end{cases}$$

a. Igazolja, hogy d metrika! **b.** Teljes-e az $(\mathbb{R}, d)$ metrikus tér? **c.** Szeparábilis-e az $(\mathbb{R}, d)$ metrikus tér? **d.** Mutassa meg, hogy a Dirichlet-függvény folytonos $(\mathbb{R}, d)$ -n!

23. Legyen $f_n(x) = e^{-nx} \in C[0, 1]$! **a.** Van-e az f_n függvénysorozatnak konvergens részsorozata? **b.** Kompakt-e a $C[0, 1]$ -tér? **c.** Esetleg lokálisan kompakt?
24. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és $\varepsilon > 0$! Mutassa meg, hogy létezik olyan $p(x)$ polinom, amelyre $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ és $|f'(x) - p'(x)| < \varepsilon$ minden $0 < x < 1$ esetén!
25. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény! Mutassa meg, hogy van olyan $p(x)$ polinom, amelyben a változónak csak páros hatványai szerepelnek, és $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ tetszőleges előre adott $\varepsilon > 0$ számra!
26. Mutassa meg, hogy a $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ térben a $\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ halmaz által kifeszített lineáris altér sűrű!
27. Legyen (X, d) egy teljes metrikus tér és $x \in X$! Adjon meg az $X \setminus \{x\}$ téren egy olyan d' metrikát, amelyre a tér teljes és $X \setminus \{x\}$ -ben ugyanazok a konvergens sorozatok a d' metrikára, mint a d metrikára!
28. Mutassa meg, hogy minden kompakt metrikus tér teljes és szeparábilis!
29. Mutassa meg, hogy az ℓ^∞ tér nem szeparábilis! (Útmutatás: 1. Ha x és y két különböző $0-1$ sorozat ℓ^∞ -ben, akkor a $G(x, 1/2)$ és $G(y, 1/2)$ gömbök diszjunktak. 2. ℓ^∞ tartalmaz nem megszámlálhatóan sok páronként diszjunkt nyílt halmazzt.)
30. Bizonyítsa be, hogy a folytonos szakaszonként lineáris függvények sűrűn vannak $C[0, 1]$ -ben! (Útmutatás: Elegendő folytonosan differenciálható függvényeket közelíteni.)
31. Legyen $f : X \rightarrow Y$ topologikus terek közötti kölcsönösen egyértelmű ráképzés! Mutassa meg, hogy ha X kompakt, akkor f inverze folytonos!
32. Mutassa meg, hogy két metrizable topologikus tér szorzata metrizable!

B. Mérték és integrál

B.1. A Riemann-integrál

Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény! Először áttekintjük az $\int_0^1 f(x) dx$ **Riemann-integrál** értelmezését.

A $[0, 1]$ intervallum egy π **felosztása** valamilyen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ osztópontok felvételét jelenti. A $\pi = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ felosztás átmérője a részintervallumok hosszának maximuma:

$$\delta(\pi) := \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq n\}.$$

Ha egy felosztás osztópontjaihoz újabbakat veszünk, akkor a felosztás finomítását kapjuk.

A π felosztáshoz tartozó **integrálközelítő-összeg** értelmezése a következő:

$$s_\pi(f) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) f(t_{k-1}).$$

Rögzített π felosztásra f változtatása lineáris funkcionált ad:

$$(i) \quad s_\pi(f_1) + s_\pi(f_2) = s_\pi(f_1 + f_2),$$

$$(ii) \quad s_\pi(\lambda f) = \lambda s_\pi(f).$$

Továbbá

$$(iii) \quad \text{ha } f \geq 0, \text{ akkor } s_\pi(f) \geq 0,$$

$$(iv) \quad s_\pi(|f_1 + f_2|) \leq s_\pi(|f_1|) + s_\pi(|f_2|).$$

1. lemma: *Tételezzük fel, hogy $\delta(\pi) < \eta$ és $|x - x'| < \eta$ esetén $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Legyen π' a π felosztás finomítása. Ekkor*

$$|s_{\pi'}(f) - s_\pi(f)| \leq \varepsilon.$$

Bizonyítás: Az $s_{\pi'}(f)$ közelítő összeget bontsuk a π felosztás $[t_0, t_1], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ intervallumainak megfelelő részösszegekre

$$s_{\pi'}(f) = \sum_{k=1}^n s_{\pi'(k)}(f), \quad s_{\pi'(k)}(f) = \sum_l (t'_l - t'_{l-1}) f(t'_{l-1}),$$

ahol $t_{k-1} = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{n(k)} = t_k$. Ekkor

$$\begin{aligned} |s_{\pi'(k)} - (t_k - t_{k-1})f(t_{k-1})| &= \left| \sum_l (t'_l - t'_{l-1}) f(t'_{l-1}) - \sum_l (t'_l - t'_{l-1}) f(t_{k-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_l (t'_l - t'_{l-1}) |f(t'_{l-1}) - f(t_{k-1})| \leq \\ &\leq \sum_l (t'_l - t'_{l-1}) \varepsilon = (t_k - t_{k-1}) \varepsilon, \end{aligned}$$

és k -ra összegezve

$$\begin{aligned}
|s_{\pi'}(f) - s_{\pi}(f)| &\leq \sum_k |s_{\pi'(k)}(f) - (t_k - t_{k-1})f(t_{k-1})| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

2. lemma: Ha $\delta(\pi(n)) \rightarrow 0$, akkor $s_{\pi(n)}(f)$ Cauchy-sorozat.

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ adva. f egyenletes folytonossága alapján válasszunk olyan $\eta > 0$ -t, hogy $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ teljesüljön $|x - x'| < \eta$ esetén, és válasszuk N -et úgy, hogy $n \geq N$ -re $\delta(\pi_n) < \eta$! Legyen $n, m \geq N$, és alkalmazzuk az előző lemmát π_n és π_m felosztások közös π' finomítására. Ekkor

$$|s_{\pi(n)}(f) - s_{\pi'}(f)| < \varepsilon, \quad |s_{\pi(m)}(f) - s_{\pi'}(f)| < \varepsilon,$$

tehát

$$|s_{\pi(n)}(f) - s_{\pi(m)}(f)| \leq 2\varepsilon.$$

□

Ezek után az $\int_0^1 f(x) dx$ **Riemann-féle integrált** értelmezhetjük az $s_{\pi(n)}(f)$ Cauchy-sorozat határértékeként. Maga a határérték természetesen nem függ attól, hogy milyen felosztás sorozatot választunk. Az integrálközelítő összegek (i)–(iv) tulajdonságai öröklődnek a Riemann-integrálra.

A fenti gondolatmenet nagymértékben általánosítható. Legyen $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és

$$s_{\pi}^g(f) = \sum_{k=1}^n [g(t_k) - g(t_{k-1})] f(t_{k-1}). \quad (\text{B.1})$$

Az 1. lemma bizonyítása minimális módosítással működik, és az

$$|s_{\pi'}^g(f) - s_{\pi}^g(f)| \leq \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \varepsilon$$

eredményt adja. Ha a g függvény olyan, hogy létezik egy $C > 0$, amelyre

$$\sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq C$$

bármilyen π felosztásra, akkor $\delta(\pi(n)) \rightarrow 0$ esetén $s_{\pi(n)}^g(f)$ Cauchy-sorozat, és határértékét

$$\int_0^1 f(x) dg(x)$$

formában jelöljük és **Riemann–Stieltjes-integrálnak** nevezzük. Ha g teljesíti a fenti feltételt, akkor korlátos változásúnak nevezik, és

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| : \pi \right\}$$

g teljes változása.

További általánosításra van lehetőség, ha adott a számegegyenes részintervallumain értelmezett és értékeit egy X Banach-térben felvevő ν függvény, és a

$$s_\pi^\nu(f) = \sum_{k=1}^n \nu([t_{k-1}, t_k)) f(t_{k-1}) \quad (\text{B.2})$$

definícióból indulunk ki. Az 1. lemma bizonyításának zavartalan működéséhez szükséges a

$$\nu([t_{k-1}, t_k)) = \sum_l \nu([t'_{l-1}, t'_l))$$

feltétel. Ez teljesül, ha megköveteljük, hogy

$$\nu([a, b)) + \nu([b, c)) = \nu([a, c)) . \quad (\text{B.3})$$

Természetesen a korlátos változáshoz hasonló feltétel is kell:

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|\nu([t_{k-1}, t_k))\| : \pi \right\} < +\infty . \quad (\text{B.4})$$

Ha tehát a ν , úgynevezett vektorértékű, halmazfüggvényre teljesül az (B.3) additivitás és a (B.4)-gyel kifejezett teljes változása véges, akkor beszélhetünk az

$$\int_0^1 f(x) d\nu(x) \quad (\text{B.5})$$

vektorértékű mérték szerinti integrálról. Valóban, ha $\pi(n)$ olyan felosztássorozat, amelyre $\delta(\pi(n)) \rightarrow 0$, akkor $s_{\pi(n)}^\nu(f)$ Cauchy-sorozat az X Banach-térben, és határértéke az integrál. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a (B.5) integrál **normában konvergens**. A leg-egyszerűbb esetben az X Banach-tér $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$. Ekkor ν -t **előjeles mértéknek**, illetve **komplex mértéknek** szokás nevezni.

A fenti módszerrel nemcsak $[0, 1]$ -en, hanem $\mathbb{R}^n$ -en, illetve annak bizonyos részhalmazain értelmezett függvények integrálját is értelmezhetjük. Ha több dimenzióban akarunk integrálni, akkor a felosztás fogalma elbonyolódik, ezért másik utat követünk. Először a véges sok értéket felvevő lépcsős függvényeket integráljuk és az integrált mint lineáris funkcionált kiterjesztjük bizonyos más függvényekre, vagy ami ezzel lényegében ekvivalens, nem az f függvény esetleg többdimenziós értelmezési tartományát, hanem annak értékkészletét bontjuk fel kisebb darabokra.

B.2. Az absztrakt Lebesgue-integrál

A **Lebesgue-féle absztrakt integrál** kiindulópontja egy $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mértéktér, ahol X egy alaphalmaz, ezen vannak értelmezve azok a függvények, amelyeket integrálni akarunk, $\mathcal{B}$ az X részhalmazainak egy osztálya, ami a μ mérték értelmezési tartománya.

Az additív halmazfüggvényeket **mértéknek** hívjuk. Pontosabban mérték alatt olyan nemnegatív értékeket felvevő μ halmazfüggvényeket értünk, amelyekre

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(H_i), \quad (\text{B.6})$$

Lebesgue integrálfogalmának fejlődése.¹

Írta: Riesz Frigyes.

Előadásom tárgya Lebesguenek az integrálásra vonatkozó alapvető ideái és az ezekhez csatlakozó vizsgálatok. Ha jogot vindikálok arra, hogy ezekről itt beszéljek, ezt arra alapíthatom, hogy egyike voltam az elsőnek, akik az új integrálfogalom mélységét és nagy horderejét felismerték.

Ha jól emlékszem, Lebesgue integrálfogalmára a trigonometrikus sorokról írt könyve, mely a Borel-sorozatban jelent meg, hívta fel először a figyelmemet; később, hogy részleteibe hatolhassak, tanulmányoztam disszertációját és az integrálásról írott könyvét. De arra a gondolatra, hogy ezt a fogalmat az engem érdeklő problémákra alkalmazzam, csak 1906-ban, Fatou kiváló doktori értekezésének olvasásakor jutottam, mely az *Acta Mathematica*-ban jelent meg. Különösen egy igen egyszerű tétel, melyet ma általánosan Fatou-féle lemmának neveznek s mely mai szóhasználat szerint az integrálásnak, mint függvényoperációnak alulról való folytonosságát biztosítja, segített 1907 februárjában, néhány héttel a dolgozat olvasása után, azon tétel bizonyításában, melyet egyidejűleg tőlem függetlenül Ernst Fischer is felfedezett s melyet kettőnk neve alatt idéznek. Ez a tétel elsősorban állandó menettérti jegyül szolgál az integrálegyenletek elméletében szerepet játszó két végtelen sok dimenziós tér között, t. i. Hilbert végtelen koordinátatere és a mérhető és négyzetesen integrálható függvények összessége között; e két teret ma Neumann János nyomán egy általánosabb fogalomnak, az absztrakt Hilbert-térnek két különböző megvalósítása gyanánt fogjuk fel. Ez volt talán a Lebesgue-féle elméletnek első alkalmazása — természetesen nem számítva a saját maga és Fatou vizsgálatait —, mely a matematikusok figyelmét magára vonta és az új integrálfogalom fontosságát megvilágította. Azok között, akik ezt a tételt hamarosan alkalmazták, legyen szabad Émile Picard nevét idéznem, aki az elsőfajú integrálegyenletek elméletében használta, míg kortársainak többsége hű maradt a klasszikus integrálfogalomhoz és annak közvetlen általánosításaihoz s nem nagyon törte magát az új integrál után. Meg kell még említenem Fréchet nevét, aki csaknem azonnal észrevette tételünknek egy fontos következményét, tudniillik a négyzetesen integrálható függ-

¹ Párizsban, 1949 júniusában a Faculté des Sciences meghívására tartott és a grenoblei egyetemen, majd pedig Budapesten a Bolyai Társulatban megismételt előadás; francia eredetije „L'évolution de la notion d'intégrale de Lebesgue” címen az *Annales de l'Université de Grenoble* c. évkönyvben van sajtó alatt.

Riesz Frigyes az elsők közé tartozott, akik felismerték a Lebesgue-integrál jelentőségét. Erről számol be ő maga egy Párizsban tartott előadásában

amennyiben a H_i halmazok μ értelmezési tartományában vannak és páronként diszjunktak. Az utóbbi feltételt **σ -additivitásnak** mondjuk, ellentétben a (B.3) véges additivitással.

A $\mathcal{B}$ halmazrendszerrel azt követeljük, hogy **σ -algebra** legyen, azaz

- (1) ha $A \in \mathcal{B}$, akkor A komplementuma, $X \setminus A$ is $\mathcal{B}$ -ben van,
- (2) ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$,
- (3) $X \in \mathcal{B}$.

Mivel a halmazok metszete kifejezhető az egyesítés és a komplementum segítségével, (1)-ből és (2)-ből következik, hogy $A, B \in \mathcal{B}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{B}$, hasonlóan megszámlálható metszetre is. A $\mathcal{B}$ -beli halmazokat mérhetőnek nevezzük, mert $\mathcal{B}$ a μ mérték értelmezési tartománya.

A számegyenesen (és általában egy metrikus térben) **Borel-halmazoknak** nevezzük annak a legszűkebb σ -algebrának az elemeit, amely tartalmazza az összes nyílt halmazokat.

A számegyenes Borel-halmazain egyetlen olyan λ_0 mérték van, amely intervallumokon az intervallum szokásos hosszával egyezik meg. A számegyenes egy részhalmazát **Lebesgue-mérhetőnek** nevezzük, ha egy Borel-halmaznak és egy 0-mértékű Borel-halmaz részhalmazának az egyesítése. Megmutatható, hogy a Lebesgue-mérhető halmazok σ -algebrát alkotnak.

3. lemma: *Legyen $\mathcal{B}$ σ -algebra az X alaphalmazon és $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:*

- (i) Ha $B \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz, akkor $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.
- (ii) Minden $a < b$ valós számra $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{B}$.
- (iii) Minden $a < b$ valós számra $f^{-1}([a, b)) \in \mathcal{B}$.
- (iv) Minden b valós számra $f^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{B}$.
- (v) Minden b valós számra $f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{B}$.

A lemma azon múlik, hogy a számegyenesen a Borel-halmazok σ -algebráját generálják a nyílt intervallumok, éppen úgy, mint a zárt intervallumok vagy a végtelen intervallumok. $\square$

Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mértéktér és $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. f -et **mérhetőnek** nevezzük, ha rendelkezik a megelőző lemmában felsorolt tulajdonságokkal. A mérhető függvények osztálya az a függvényosztály, amelynek bizonyos elemein a μ mérték szerinti integrált értelmezni akarjuk. A mérhető függvények köréből az összeadás, a szorzás és a pontonkénti limesz képzése nem vezet ki. Az utóbbi tulajdonság az, ami ezt a függvényosztályt jól kezelhetővé teszi. Ha f és g mérhető függvények, akkor

$$\{x \in X : (f + g)(x) < b\} = \bigcup_{r,t} \left(f^{-1}(-\infty, t) \cap g^{-1}(-\infty, r) \right),$$

ahol az egyesítést az összes olyan (r, t) racionális számpárra vesszük, amelyre $t + r < b$. Ez a képlet az előző lemma fényében azt mutatja, hogy ha f és g mérhetőek, akkor $f + g$ is az. Ha f_n egy olyan függvénysorozat, amely pontonként tart az f függvényhez, akkor

$$\{x \in X : f(x) \leq b\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{x : f_n(x) < b + \frac{1}{k}\right\}.$$

Ez azt adja, hogy f mérhető, amennyiben f_n -ek azok.

1. példa: Azt szokták mondani, hogy a Lebesgue-féle és a Riemann-féle integrál között a lényeges különbség az, hogy az utóbbinál a függvény értelmezési tartományát osztjuk fel egyre kisebb részekre, az előbbinél pedig értékkészletét. Ennek megvilágítására legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mértéktér és $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos mérhető függvény. Tételezzük fel, hogy $f(X) \subset [a, b]$ és $\mu(X) < +\infty$. Ha π az $[a, b]$ intervallum egy partíciója, $a = u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n = b$, akkor legyen

$$S_{\pi}(f) = \sum_{k=1}^n \mu(f^{-1}([u_{k-1}, u_k])) u_{k-1}.$$

Hogyan változik ez az összeg, ha például az u_0 és u_1 osztópontok közé újabb $u_0 < u'_1 < u'_2 < \dots < u'_k = u_1$ osztópontokat iktatunk be? A $\mu(f^{-1}[u_0, u_1]) u_0$ tagot kell helyettesítenünk a

$$\sum_{j=1}^k \mu(f^{-1}[u'_{j-1}, u'_j]) u'_{j-1}$$

összeggel. A különbség becsléséhez felhasználjuk, hogy

$$\mu(f^{-1}[u_0, u_1]) u_0 = \sum_{j=1}^k \mu(f^{-1}[u'_{j-1}, u'_j]) u_0$$

a mérték additivitása szerint és a megváltozás

$$\sum_{j=1}^k \mu(f^{-1}[u'_{j-1}, u'_j]) (u'_{j-1} - u_0) \leq \mu(f^{-1}[u_0, u_1]) \delta(\pi).$$

Ugyanezt esetleg többször alkalmazva azt kapjuk, hogy ha π' finomítása π -nek, akkor

$$|S_{\pi}(f) - S_{\pi'}(f)| \leq \mu(X) \delta(\pi).$$

Ekkor a 2. lemma bizonyításának gondolatmenetével beláthatjuk, hogy $\delta(\pi(n)) \rightarrow 0$ esetén $S_{\pi(n)}(f)$ Cauchy-sorozat. A sorozat határértéke lesz az $\int_X f(x) d\mu(x)$ Lebesgue-féle integrál. A konstrukció nem bonyolult, mégsem teljesen világos, hogy az így értelmezett integrál lineáris. E tény igazolása további megfontolást igényel. $\square$

Az egyszerűség kedvéért **σ -véges mértékekkel** foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy feltételezzük, hogy az alaphalmaz megszámlálható sok véges mértékű halmaz egyesítése.

Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ egy σ -véges mértéktér és $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ egy nemnegatív mérhető függvény. A példa alapján az $\int_X f(x) d\mu(x)$ integrált a következőképpen értelmezzük. Választunk X -nek egy $X_1, X_2, \dots$ mérhető partícióját úgy, hogy

- (1) $X_n \in \mathcal{B}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ ha $i \neq j$,
- (2) $\mu(X_n) < +\infty$,
- (3) f korlátos X_n -en.

Legyen

$$\int_X f(x) d\mu(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} f(x) d\mu(x),$$

ahol a jobb oldalon álló összeg tagjai a példa szerint vannak értelmezve. Természetesen meg kell mutatni, hogy maga az összeg nem függ attól, hogy hogyan választottuk az $X_1, X_2, \dots$ mérhető partíciót. Ez megtehető.

Végül, ha $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, akkor f -et az $f_+ := 0 \vee f$ és $f_- = -(0 \wedge f)$ pozitív függvények különbségeként írjuk, $f = f_+ - f_-$, és

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f_+(x) d\mu(x) - \int_X f_-(x) d\mu(x),$$

ha a jobb oldalon mindkét tag értelmes. Ezzel a Lebesgue-féle integrál konstrukcióját ismertettük. A továbbiakban az integrálás tartományát nem írjuk ki, ha az a teljes tér.

1. tétel: Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ σ -véges mértéktér, és legyen $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ azon mérhető f függvények összessége, amelyekre

$$\|f\|_1 := \int |f(x)| d\mu(x) < +\infty.$$

Ekkor $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ a $\|\cdot\|_1$ normával Banach-tér, amin az integrál pozitív korlátos lineáris funkcionál:

- (i) $f \geq 0$ esetén $\int f(x) d\mu(x) \geq 0$,
- (ii) $|\int f(x) d\mu(x)| \leq \|f\|_1$.

Továbbá teljesül az úgynevezett Csebisev-egyenlőtlenség:

- (iii) $\mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) \leq a^{-1} \|f\|_1$ minden pozitív a számra.

4. lemma: Ha $f_n, f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ és $f_n \rightarrow f$ L^1 -normában, akkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik egy $H \in \mathcal{B}$ halmaz és egy $f_{n(k)}$ részsorozat úgy, hogy $\mu(X \setminus H) < \varepsilon$ és $f_{n(k)} \rightarrow f$ a H halmazon egyenletesen.

Bizonyítás: Válasszunk 0-hoz tartó $\delta_n > 0$ sorozatot, például $\delta_n = 2^{-n}$, és legyen

$$H_n = \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \delta_n\}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mu(H_n) = \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \delta_n\}) \leq \frac{\|f - f_n\|_1}{\delta_n}.$$

Ha olyan $n(k)$ sorozatot választunk, hogy

$$\|f - f_{n(k)}\|_1 \leq \varepsilon 2^{-2k}$$

és $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} (X \setminus H_{n(k)})$, akkor

$$\mu(X \setminus H) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_{n(k)}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon 2^{-2k}}{2^{-k}} = \varepsilon.$$

Másrészt $x \in H$ esetén

$$|f(x) - f_{n(k)}(x)| \leq \delta_{n(k)},$$

ami egyenletes konvergenciát mutat. $\square$

Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mértéktér, f_n mérhető függvények sorozata és f egy mérhető függvény. A

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{ x : |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

halmaz mérhető, hiszen mérhető halmazokból alakítottuk ki metszet és egyesítés képzéssel. Az x pont hozzátartozik a halmazhoz, ha minden k -ra létezik n_0 , hogy minden $n \geq n_0$ esetén $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}$. Így a megkonstruált halmaz pontosan azon x -ek összessége, amelyekre $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Ha

$$\mu(X \setminus \{x \in X : f_n(x) \rightarrow f(x)\}) = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy $f_n \rightarrow f$ **μ -majdnem mindenütt**. A 0 mértékű halmazon különböző függvényeket a mérték és integrálméletben gyakran meg sem különböztetik. Valójában már a 1. tételben is ezt tettük. Szigorúan véve $\|\cdot\|_1$ nem csak az azonosan 0 függvényen nulla, hanem a μ -majdnem mindenütt eltűnő függvényeken is.

Az előző lemma ismételt alkalmazásával igazolható a következő tétel:

2. tétel: Ha $f_n, f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ és $f_n \rightarrow f$ L^1 -normában, akkor van olyan $f_{n(k)}$ részsorozat, amely μ -majdnem mindenütt konvergál f -hez.

Az integrál konvergencia tételek az integrandus konvergenciájából következtetnek az integrálok konvergenciájára.

3. tétel: (Fatou–Beppo Levi-tétel) Ha $0 \leq f_n$ növekvő függvényt sorozat és

$$\int f_n(x) d\mu(x) \leq c$$

valamely $c \in \mathbb{R}$ korláttal, akkor

$$f(x) = \lim f_n(x)$$

μ -majdnem mindenütt véges és $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, azaz

$$\int f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) d\mu(x).$$

$\square$

4. tétel: (Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel) Ha f_n mérhető függvények sorozata, létezik egy olyan $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ függvény, amelyre $|f_n(x)| \leq g(x)$ és $f_n(x) \rightarrow f(x)$ μ -majdnem mindenütt, akkor f integrálható, és

$$\int f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) d\mu(x).$$

$\square$

5. tétel: (Fatou-lemma) Ha $f_n \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\|f_n\|_1 \leq c$ valamely c korláttal és $f_n(x) \rightarrow f(x)$ μ -majdnem mindenütt, akkor $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, és

$$\int |f(x)| d\mu(x) \leq c. \quad \square$$

2. példa: A dominált konvergencia tétel egy alkalmazása a **paraméteres integrálok differenciálhatósága**. Legyen

$$u(y) = \int k(x, y) d\mu(x),$$

azzal a hallgatólagos feltételezéssel, hogy adott y -ra $k(x, y)$ integrálható. Ha minden x -re $k(x, y)$ folytonosan differenciálható y_0 egy környezetében, akkor

$$\frac{u(y) - u(y_0)}{y - y_0} = \int \frac{k(x, y) - k(x, y_0)}{y - y_0} d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial y} k(x, y_0 + \varepsilon) d\mu(x).$$

Ha létezik olyan integrálható $g(x)$ függvény, amelyre

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} k(x, y_0 + \varepsilon) \right| \leq g(x),$$

akkor

$$u'(y) = \int \frac{\partial}{\partial y} k(x, y) d\mu(x). \quad \square$$

B.3. A szorzatmérték

Legyen $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ két absztrakt mértéktér, amelynek $(X, \mathcal{B}, \mu)$ szorzatát kívánjuk értelmezni. $X = X_1 \times X_2$ az alaphalmazok Descartes-szorzata, $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$. X -nek a $H_1 \times H_2$ alakú részhalmazát **hengerhalmaznak** mondjuk, ha $H_1 \in \mathcal{B}_1$ és $H_2 \in \mathcal{B}_2$. Megszámlálható sok hengerhalmaz metszete is hengerhalmaz, de egy hengerhalmaz komplementere a triviális esettől eltekintve nem az. A $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ σ -algebrát úgy értelmezzük, mint a legszűkebb σ -algebrát, amely tartalmazza a hengerhalmazokat. Ezen a σ -algebrán kívánjuk értelmezni a szorzatmértéket.

6. tétel: Ha $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ absztrakt mértékterek, akkor a $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ σ -algebrán létezik egyetlen olyan μ mérték, amely eleget tesz a

$$\mu(H_1 \times H_2) = \mu_1(H_1) \cdot \mu_2(H_2) \quad (\text{B.7})$$

feltételnek valahányszor $H_1 \in \mathcal{B}_1$ és $H_2 \in \mathcal{B}_2$.

Először az unicitás, azután pedig az egzisztencia bizonyítását vázoljuk. Az egyértelműség bizonyításához tételezzük fel, hogy μ és μ' olyan mértékek $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ -n, amelyek eleget tesznek a (B.7) feltételnek. Legyen

$$\mathcal{C} = \{H \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : \mu(H) = \mu'(H)\}.$$

Ekkor $\mathcal{C}$ halmazalgebra könnyen látható módon, $\mathcal{C}$ tartalmazza a hengerhalmazokat a feltevés szerint, továbbá $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ és $H_n \in \mathcal{C}$ esetén $\bigcup_n H_n \in \mathcal{C}$. Ezekből a tulajdonságokból megmutatható,²² hogy $\mathcal{C}$ nem lehet más, mint $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

A szorzatmérték megkonstruálásához éljünk a $\mu_1(X_1), \mu_2(X_2) < +\infty$ egyszerűsítő feltételezéssel. $H \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ és $x_1 \in X_1$ esetén legyen

$$H_{x_1} := \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in H\},$$

továbbá

$$\mathcal{C}' = \{H \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : H_{x_1} \in \mathcal{B}_2\}.$$

Könnyen látható, hogy $\mathcal{C}'$ σ -algebra és nyilvánvalóan tartalmazza a hengerhalmazokat. Ezért $\mathcal{C}' = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, más szóval minden $H \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ és $x_1 \in X_1$ esetén a H_{x_1} függőleges szelés mérhető halmaz. Következésképpen értelmezhetjük a

$$k_H(x_1) = \mu_2(H_{x_1})$$

függvényt. Nyilván $0 \leq k_H(x_1) \leq \mu_2(X_2)$.

Szeretnénk megmutatni, hogy k_H mérhető függvény, ezért a

$$\mathcal{C}'' = \{H \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : k_H \text{ mérhető}\}$$

halmazrendszert vizsgáljuk. Ha $H = H_1 \times H_2$ hengerhalmaz, akkor k_H mérhető lépcsős függvény, tehát $\mathcal{C}''$ tartalmazza a hengerhalmazokat. Ha $H, H' \in \mathcal{C}''$ és $H \cap H' = \emptyset$, akkor

$$k_{H \cup H'} = k_H + k_{H'}, \quad (\text{B.8})$$

ami mérhető, ha k_H és $k_{H'}$ mérhető. Így $\mathcal{C}''$ tartalmazza a hengerhalmazok diszjunkt egyesítését. Az ilyen halmazok egy halmazalgebrát alkotnak. Végül $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ és $H_i \in \mathcal{C}''$ esetén

$$k_{H_n} \nearrow k_H \quad (H = \bigcup_n H_n). \quad (\text{B.9})$$

Mivel mérhető függvények pontonkénti határértéke is mérhető, megállapíthatjuk, hogy $\bigcup H_n \in \mathcal{C}''$. Mint azt fent már egyszer kihasználtuk, $\mathcal{C}''$ nem lehet más, mint $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. k_H tehát mindig mérhető, és ezért integrálható függvény. Legyen

$$\mu(H) := \int k_H(x_1) d\mu_1(x_1).$$

Így nemnegatív halmazfüggvényt adtunk meg a $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ σ -algebrán. μ véges additivitása (B.8) következménye:

$$\begin{aligned} \mu(H \cup H') &= \int k_{H \cup H'} d\mu_1(x_1) = \int [k_H(x_1) + k_{H'}(x_1)] d\mu_1(x_1) = \\ &= \int k_H(x_1) d\mu_1(x_1) + \int k_{H'}(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu(H) + \mu(H'). \end{aligned}$$

A σ -additivitáshoz elegendő megmutatni, hogy $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ és $\bigcup H_n = H$ esetén

$$\mu(H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(H_n).$$

Ez a tulajdonság az integrál monoton konvergencia tételének és a (B.9) tulajdonságnak a következménye:

$$\mu(H) = \int k_H(x_1) d\mu_1(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int k_{H_n}(x_1) d\mu_1(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(H_n).$$

A μ szorzatmértéket nem csupán a függőleges, hanem a vízszintes szelések segítségével is értelmezhetjük:

$$\mu(H) = \int \mu_2(H_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int \mu_1(H_{x_2}) d\mu_2(x_2).$$

(Az egyenlőség a szorzat-mérték unicitásának a következménye.) Ha $f(x_1, x_2)$ a H halmaz karakterisztikus függvénye, akkor az előző egyenlőséget az alábbi formában írhatjuk át:

$$\begin{aligned} \int f(x_1, x_2) d\mu(x_1, x_2) &= \int \left[\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right] d\mu_1(x_1) = \\ &= \int \left[\int f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right] d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Az egyenlőség karakterisztikus függvényekre igaz, de ebből a linearitás miatt lépcsős függvényekre is megkaphatjuk. Integrálható függvényekre is kiterjeszthető, erről szól a következő tétel.

7. tétel: (Fubini-tétel) Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ az $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ mértékterek szorzata. Ekkor

1. Ha $f \in L^1(\mu)$, akkor

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int \left[\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right] d\mu_1(x_1) = \\ &= \int \left[\int f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right] d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

2. Ha $f \geq 0$ olyan mérhető függvény, amelyre a

$$\int \left[\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right] d\mu_1(x_1)$$

integrál véges, akkor $f \in L^1(\mu)$. □

3. példa: Legyen $((0, \infty), \mathcal{B}_1, \mu_1)$ a pozitív számegyenes a Borel-halmazok σ -algebrájával és egy olyan μ_1 mértékkel, amelyre

$$\mu_1([a, b]) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

$(\mathbb{T}, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ a komplex egységkör $\mathbb{T}$ a Borel-halmazok $\mathcal{B}_2$ σ -algebrájával és egy olyan μ_2 mértékkel, amelyre

$$\mu_2(\{e^{i\varphi} : \alpha \leq \varphi \leq \beta\}) = \beta - \alpha \quad (0 \leq \alpha < \beta < 2\pi). \quad \square$$

Ekkor a $(0, \infty) \times \mathbb{T}$ szorzatteret a „lyukas” komplex számsíkkal azonosíthatjuk, ami $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Az $(r, e^{i\varphi})$ párnak az $r \cdot e^{i\varphi}$ komplex számot feleltetjük meg. Ha

$$H_1 = [a, b], \quad H_2 = \{e^{i\varphi} : \alpha \leq \varphi \leq \beta\},$$

akkor a $H_1 \times H_2$ hengerhalmaz, egy körgyűrűcikk a komplex síkon, b a külső kör sugara, a a belső kör sugara, és $\beta - \alpha$ a cikk nyílásszöge. A $H_1 \times H_2$ halmaz μ szorzatmértéke

$$\mu(H_1 \times H_2) = \mu_1([a, b]) \cdot \mu_2(H_2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\beta - \alpha),$$

ami nem más, mint a körgyűrűcikk területe. A szorzatmérték tehát a sík területmértéke, más szóval a kétdimenziós Lebesgue-mérték.

B.4. Mértékek metrikus téren

8. tétel: (Riesz–Radon-tétel) Legyen X egy lokálisan kompakt metrizálható tér és $C_c(X)$ a kompakt tartójú folytonos függvények tere. Ha $\phi : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, hogy $f \geq 0$ esetén $\phi(f) \geq 0$, akkor egyértelműen létezik egy olyan μ mérték X Borel-halmazain, amelyre

$$\phi(f) = \int f d\mu.$$

μ véges a kompakt halmazokon.

A vázlatos bizonyításban csak a kompakt tér esetével foglalkozunk. Először a μ mérték unicitását igazoljuk. Legyen μ_1 és μ_2 két olyan mérték a Borel-halmazokon, hogy

$$\phi(f) = \int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$$

minden folytonos f függvényre. A

$$\mathcal{C} := \{B : \mu_1(B) = \mu_2(B)\}$$

halmazrendszer σ -algebra. Elég megmutatni, hogy minden nyílt G halmaz $\mathcal{C}$ -ben van. Legyen

$$F_n = \left\{ x \in X : d(x, X \setminus G) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Ekkor $F_n \subset F_{n+1}$, F_n zárt halmaz és $\cup F_n = G$. Létezik olyan folytonos f_n függvény, amely F_n -en 1 és $X \setminus G$ -n 0. $f_n \rightarrow 1_G$ pontonként és a dominált konvergencia tétel alapján

$$\mu_i(G) = \int 1_G d\mu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(f_n).$$

Ez azt mutatja, hogy G -n μ_1 és μ_2 megegyezik, tehát valóban $G \in \mathcal{C}$ minden nyílt halmazra. Ezzel a tétel egyértelműségi részét beláttuk, sőt, az is kiderült, hogy hogyan határozza meg a ϕ funkcionál a nyílt halmazok mértékét.

Ha $G \subset X$ nyílt halmaz, akkor legyen

$$I(G) = \sup\{\phi(f) : \text{supp } f \subset G\}.$$

Megmutatható, hogy

$$I(\cup G_n) \leq \sum_n I(G_n) \quad \text{bármilyen } G_n \text{ nyílt halmazokra}$$

és

$$I(\cup G_n) = \sum I(G_n) \quad \text{páronként diszjunkt nyílt halmazokra.}$$

Ha $F \subset X$ zárt halmaz, akkor legyen

$$I(F) = \inf\{I(G) : G \supset F \text{ nyílt}\}.$$

Erről is megmutatható az additivitás

$$I\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) = \sum_{i=1}^n I(F_i),$$

Legyen

$$A_k = f^{-1}([k\varepsilon, (k+1)\varepsilon))$$

és

$$G_k^n = f^{-1}\left(\left((k - \frac{1}{n})\varepsilon, (k+1)\varepsilon\right)\right).$$

Rögzített n -re ez nyílt fedése X -nek. Léteznek olyan $0 \leq \varphi_k^n$ folytonos függvények, hogy $\text{supp } \varphi_k^n \subset G_k^n$ és $\sum_k \varphi_k^n = 1$. Ha $f_k = \varphi_k^n f$, akkor $\sum f_k = f$.

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \sum_k \varphi(f_k) \leq \sum_k \varphi((k+1)\varepsilon \varphi_k^n) \leq \\ &\leq \sum_k (k+1)\varepsilon \mu(G_k^n). \end{aligned}$$

Ebből $n \rightarrow \infty$ határátmenettel kapjuk, a

$$\varphi(f) \leq \sum (k+1)\varepsilon \mu(A_k).$$

Ugyanakkor

$$\int f d\mu \geq \sum k\varepsilon \mu(A_k)$$

és így

$$\begin{aligned} \varphi(f) &\leq \int f d\mu + \sum \varepsilon \mu(A_k) = \\ &= \int f d\mu + \varepsilon \mu(X). \end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges $\varphi(f) \leq \int f d\mu$. Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget $-f$ -re is, azt kapjuk, hogy $\varphi(f) = \int f d\mu$.

9. tétel: (Jordan-féle felbontási tétel) Legyen X egy kompakt metrizálható tér, és jelölje $C_{\mathbb{R}}(X)$ a folytonos $X \rightarrow \mathbb{R}$ függvények Banach-terét! Ha $\varphi : C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(f)| : \|f\| \leq 1\}$$

véges, akkor egyértelműen léteznek olyan $\varphi_{\pm} : C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionálok, amelyekre

$$(i) \quad \varphi = \varphi_+ - \varphi_-,$$

$$(ii) \quad \|\varphi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|.$$

Bizonyítás: Ha $0 \leq f \in C_{\mathbb{R}}(X)$, akkor legyen

$$H(f) = \{u \in C_{\mathbb{R}}(X) : 0 \leq u \leq f\}, \quad \varphi_+(f) = \sup\{\varphi(u) : u \in H(f)\}.$$

Először megmutatjuk, hogy $H(f_1) + H(f_2) = H(f_1 + f_2)$. A $H(f_1) + H(f_2) \subset H(f_1 + f_2)$ tartalmazás nyilvánvaló. A fordított tartalmazás belátásához legyen $u \in H(f_1 + f_2)$. Ha

$v := u \wedge f_1$, akkor $v \in H(f_1)$. Természetesen $u - f_1 \leq f_2$ és $u - v = \frac{1}{2}(u - f_1 + |u - f_1|) \leq f_2$. Mivel $u - v \geq 0$, látjuk, hogy $u - v \in H(f_2)$, ami azt mutatja, hogy $u \in H(f_1) + H(f_2)$. Tehát $H(f_1) + H(f_2) = H(f_1 + f_2)$ -t megmutattuk. Ennek következménye, hogy

$$\varphi_+(f_1) + \varphi_+(f_2) = \varphi_+(f_1 + f_2) \quad (\text{B.10})$$

minden $0 \leq f_1, f_2 \in C_{\mathbb{R}}(X)$ esetén.

$$\varphi_+(\lambda f_1) = \lambda \varphi_+(f_1) \quad (\text{B.11})$$

evidens az értelmezésből minden $\lambda > 0$ számra.

Ezután φ_+ értelmezési tartományát ki kell terjeszteni. Tetszőleges $g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ előáll (sokféleképpen!) $g = g_1 - g_2$ alakban úgy, hogy $0 \leq g_1, g_2 \in C_{\mathbb{R}}(X)$. Legyen

$$\varphi_+(g) = \varphi_+(g_1) - \varphi_+(g_2).$$

Nem nehéz megmutatni, hogy (B.10) miatt $\varphi_+(g_1) - \varphi_+(g_2)$ nem függ g_1 és g_2 választásától. φ_+ linearitása (B.10) és (B.11) következménye, és φ_+ pozitivitása benne van a konstrukcióban.

Legyen $f \geq 0$ és $G(f) := \{v \in C_{\mathbb{R}}(X) : -f \leq v \leq 0\}$. Ekkor $u \mapsto u - f$ bijekciót ad $H(f)$ és $G(f)$ között. Ezért

$$\begin{aligned} \varphi_-(f) &= \varphi_+(f) - \varphi(f) = \sup\{\varphi(u) - \varphi(f) : u \in H(f)\} = \\ &= \sup\{\varphi(v) : v \in G(f)\}, \end{aligned}$$

ami azt mutatja, hogy a φ_- lineáris funkcionál nemnegatív.

Eljutottunk a $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ felbontáshoz, hátra van még $\|\varphi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$. Mivel $\|\varphi\| \leq \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$ nyilvánvaló a norma definíciója szerint, elég a $\|\varphi\| \geq \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$ egyenlőtlenségre koncentrálni. Megjegyezzük, hogy

$$\|\varphi_+\| = \varphi_+(1) \quad \text{és} \quad \|\varphi_-\| = \varphi_-(1).$$

Léteznek olyan $u_n \in H(1)$ és $v_n \in G(1)$ sorozatok, amelyekre

$$\varphi_+(1) = \lim_n \varphi(u_n), \quad \varphi_-(1) = \lim_n \varphi(v_n).$$

Mivel $-1 \leq u_n + v_n \leq 1$,

$$\|\varphi\| \geq \varphi(u_n + v_n) = \varphi(u_n) + \varphi(v_n) \rightarrow \varphi_+(1) + \varphi_-(1).$$

Az egyértelműséget nem bizonyítjuk. □

Ha ν olyan halmazfüggvény az X kompakt metrizálható tér Borel-halmazain, amely két véges Borel-mérték különbsége, azaz

$$\nu(H) = \mu_1(H) - \mu_2(H) \quad (H \in B),$$

akkor ν -t **előjeles mértéknek** nevezzük. A ν előjeles mérték szerinti integrált az

$$\int f d\nu := \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2$$

képlettel értelmezhetjük. Minden előjeles mérték megad egy φ lineáris funkcionált a $C_{\mathbb{R}}(X)$ téren, és a Jordan-féle felbontási és a Riesz–Radon-tételek kombinálásával látható, hogy $C_{\mathbb{R}}(X)$ minden korlátos lineáris funkcionálja előáll így.

5. lemma: Legyen φ korlátos lineáris funkcionál $C_{\mathbb{R}}(X)$ -en. Ha $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ és $\varphi_1(f) = \int f d\mu_1$, $\varphi_2(f) = \int f d\mu_2$ μ_1 és μ_2 mértékekkel, akkor a következő két tulajdonság ekvivalens

$$(i) \quad \|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|,$$

$$(ii) \quad \text{létezik olyan } A \in \mathcal{B} \text{ Borel-halmaz, amelyre } \mu_1(A) = 0 \text{ és } \mu_2(X \setminus A) = 0.$$

Bizonyítás: (i) $\Rightarrow$ (ii): Léteznek olyan $-1 \leq f_n \leq 1$ folytonos függvények X -en, amelyekre $\varphi(f_n) \rightarrow \|\varphi\|$. Legyen $f_n = f_n^+ - f_n^-$ a pozitív és negatív részre való felbontás.

$$\varphi(f_n) = \left[\int f_n^+ d\mu_1 + \int f_n^- d\mu_2 \right] - \left[\int f_n^- d\mu_1 + \int f_n^+ d\mu_2 \right].$$

A nagy zárójelben lévő tagok nemnegatívok, az elsőre

$$\int f_n^+ d\mu_1 + \int f_n^- d\mu_2 \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|.$$

Mivel $\varphi(f_n) \rightarrow \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ a feltevés miatt,

$$\int f_n^+ d\mu_1 \rightarrow \|\varphi_1\| \quad \text{és} \quad \int f_n^+ d\mu_2 \rightarrow 0.$$

Tehát $\|f_n^+\| \rightarrow 0$ és a 2. tétel szerint f_n^+ -nak van olyan részsorozata, amely μ_2 -m.m. tart a 0-hoz. ($\|\cdot\|$ itt a μ_2 -re vonatkozó L^1 -normát jelenti.) Az egyszerűség kedvéért nem vezetünk be új jelölést a részsorozatra, hanem feltesszük, hogy $f_n^+ \rightarrow 0$ μ_2 -m.m. Ugyanakkor $\|1 - f_n^+\| = \int (1 - f_n^+) d\mu_1 \rightarrow \|\varphi_1\| - \|\varphi_1\| = 0$, és esetleg újabb részsorozatot kiválasztva, oda jutunk, hogy $f_n^+ \rightarrow 1$ μ_1 -m.m. (Most viszont $\|\cdot\|$ a μ_1 -re vonatkozó L^1 -normát jelenti.) Legyen

$$A = \{x \in X : \lim f_n^+(x) = 1\}.$$

Ekkor

$$\|1 - 1_A\|_{L^1(\mu_1)} = 0 \quad \text{és} \quad \|1_A\|_{L^1(\mu_2)} = 0,$$

amiből adódik, hogy $\mu_1(X \setminus A) = 0$ és $\mu_2(A) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): A feltevés szerint van olyan A Borel-halmaz, amelyre $\mu_1(X \setminus A) = 0$ és $\mu_2(A) = 0$. Legyen $f = 1_A - 1_{X \setminus A}$. Ekkor

$$\varphi(f) = \int (1_A - 1_{X \setminus A}) d\mu_1 - \int (1_A - 1_{X \setminus A}) d\mu_2 = \mu_1(X) + \mu_2(X) = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|.$$

Ha f folytonos lenne, akkor $\|\varphi\| \geq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ nyomban következne. Mivel f nem az, egy pótlólagos közelítésre van szükség. Választunk egy olyan folytonos $g : X \rightarrow [-1, 1]$ függvényt, amire

$$\int |f - g| d(\mu_1 + \mu_2) < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(g) &= \int g d\mu_1 - \int g d\mu_2 \geq \int f d\mu_1 - \varepsilon - \int f d\mu_2 - \varepsilon = \\ &= \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ha μ_1 és μ_2 mértékek egy $\mathcal{B}$ σ -algebrán, akkor **kölcsönösen szingulárisnak** mondjuk őket, ha van olyan $A \in \mathcal{B}$ halmaz, amelyre $\mu_1(A) = 0$ és $\mu_2(A^c) = 0$. Ilyenkor a $\mu_1 \perp \mu_2$ jelölést használjuk.

Legyen ν egy előjeles mérték. Az előző lemma következménye az, hogy léteznek olyan kölcsönösen szinguláris ν_+ és ν_- mértékek, amelyekre $\nu = \nu_+ - \nu_-$. Ezt az előállítást ν **Jordan-féle felbontásának** nevezzük, és $|\nu| := \nu_+ + \nu_-$ a ν előjeles mérték **abszolút értéke**.

4. példa: Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelynek $f = f^+ - f^-$ a kanonikus felbontása a két nemnegatív függvény különbségeként, azaz $f^+ = f \vee 0$ és $-f^- = f \wedge 0$.

$$\nu(H) = \int f(x) \mathbf{1}_H d\lambda(x)$$

előjeles mértéket értelmez $[0, 1]$ Borel-halmazain. ν Jordan-felbontásában a

$$\nu_{\pm}(H) = \int f^{\pm}(x) \mathbf{1}_H d\lambda(x)$$

mértékek jelennek meg. ν_+ és ν_- valóban kölcsönösen szingulárisak, mert

$$A = \{x \in [0, 1] : f(x) < 0\}$$

választással látható, hogy $\nu_+(A) = 0$ és $\nu_-([0, 1] \setminus A) = 0$. □

5. példa: Legyen $0 \leq f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ és

$$\nu(H) = \int f(x) \mathbf{1}_H d\mu(x) \quad (H \in \mathcal{B}).$$

Megmutatjuk, hogy ez mértéket értelmez $\mathcal{B}$ -n. ν véges additivitása nyilvánvaló. Ha $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ és $H = \cup H_n$, akkor $\mathbf{1}_{H_n} \nearrow \mathbf{1}_H$ pontonként és a dominált konvergencia tétel alapján

$$\nu(H_n) = \int f(x) \mathbf{1}_{H_n} d\mu(x) \rightarrow \int f(x) \mathbf{1}_H d\mu(x) = \nu(H).$$

Ha μ_1 és μ_2 két mérték egy $\mathcal{B}$ σ -algebrán, akkor azt mondjuk, hogy μ_1 abszolút folytonos μ_2 -re, jelölésben $\mu_1 \ll \mu_2$, ha $\mu_2(H) = 0$ alapján következik, hogy $\mu_1(H) = 0$. Az előző példában konstruált ν mérték abszolút folytonos μ -re. □

10. tétel: (Radon–Nikodym-tétel) Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ egy σ -véges mértéktér és ν egy μ -re abszolút folytonos mérték $\mathcal{B}$ -n. Ekkor egyértelműen létezik egy $0 \leq f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ függvény, amelyre

$$\nu(H) = \int f(x) \mathbf{1}_H(x) d\mu(x).$$

□

Az előző tételben szereplő f függvényt ν μ -re vonatkozó **Radon–Nikodym-deriváltjának** nevezzük, és a $\frac{d\nu}{d\mu}$ jelölést használjuk.

6. példa: Legyen $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható növény. Ekkor g nyilvánvalóan korlátos változású (és teljes változása $g(1) - g(0)$). Tetszőleges folytonos $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre értelmezhetjük az $\int_0^1 f(x) dg(x)$ Riemann–Stieltjes-integrált. Ez pozitív korlátos lineáris funkcionál $C[0, 1]$ -en, tehát van olyan μ mérték, amelyre

$$\int_0^1 f(x) dg(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy μ abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre. Legyen f olyan folytonos függvény, amelyre $0 \leq f \leq \mathbf{1}_{[c, d]}$. Ekkor az integrál definíciója alapján

$$\int f(x) dg(x) \leq g(d) - g(c) \leq M(d - c),$$

ahol $M g'(x)$ felső korlátja. Ez azt mutatja, hogy

$$\mu([c, d]) \leq M\lambda([c, d]),$$

amiből $\mu \ll \lambda$ következik. (Könnyen látható, hogy valójában $\mu([c, d]) = g(d) - g(c)$.) A Radon–Nikodym-tétel szerint létezik a $\frac{d\mu}{d\lambda}$ Radon–Nikodym-derivált, ami nem más, mint $g'(x)$. $\square$

A Radon–Nikodym-derivált szerepet kap a valószínűségi számítási feltételes várhatóérték definíciójában is.

11. tétel: (Lebesgue-felbontási tétel) Legyen μ és ν mértékek a $\mathcal{B}$ σ -algebrán. Ekkor léteznek olyan μ_c és μ_s mértékek $\mathcal{B}$ -n, hogy

$$(i) \quad \mu = \mu_c + \mu_s$$

$$(ii) \quad \mu_c \ll \nu \text{ és } \mu_s \perp \nu.$$

7. példa: Legyen $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan monoton növény, amely differenciálható a $0 < t < 1$ pont kivételével, és a t pontban $g_+(t) - g_-(t) = u > 0$. (Itt $g_\pm$ a függvény jobb és bal oldali határértékét jelöli.) Létezik olyan μ mérték $[0, 1]$ -en, amelyre

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f(x) dg(x)$$

minden folytonos f függvényre teljesül. μ -nek a λ Lebesgue-mértékre vonatkozó Lebesgue-féle felbontása a következőképpen adható meg:

$$\frac{d\mu_c}{d\lambda} = g'(x) \quad \text{és} \quad \mu_s = u \cdot \delta_t. \quad \square$$

Gyakorlófeladatok

1. Legyen $L^\infty[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon korlátos mérhető függvények tere a szuprénum normával ellátva! Igazolja, hogy $L^\infty[a, b]$ nem szeparábilis!
2. Igazolja, hogy a számegegyenes Borel-halmazainak σ -algebráját generálják az olyan $(-\infty, t]$ intervallumok, amelyek végpontja racionális szám!

3. Igazolja, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \text{ és } p, q \text{ relatív prímek,} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

majdnem mindenütt folytonos!

4. Van-e olyan $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, amely nem Borel-mérhető? (Útmutatás: Egy függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha majdnem mindenütt folytonos.)

5. Ha $H \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz, akkor legyen $\mu(H)$ a H -ban lévő racionális számok száma! (Tehát $\mu(H) = +\infty$, ha H -ban végtelen sok racionális szám van.) Igaz-e, hogy μ σ -véges mérték?

6. Igaz-e, hogy $L^1[a, b]$ háló a szokásos rendezésre?

7. Mutassa meg, hogy a Lebesgue-mérhető halmazok σ -algebrát alkotnak!

C. Csoportok

Egy G halmazon a **csoportstruktúra** bizonyos műveletek megadását jelenti. A **csoportszorzás** egy olyan $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto g \circ h$ leképezés, amely asszociatív: $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$. Az $e \in G$ **egységelem** az $e \circ g = g \circ e = g$ tulajdonsággal rendelkezik, $g \in G$ tetszőleges. A **csoportinverz** egy $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ leképezés, amely a $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ axiómának tesz eleget. Ha a G halmazon a fentieknek megfelelő szorzás és inverz műveletek vannak megadva, és ki van tüntetve egy $e \in G$ egységelem, akkor G -t csoportnak mondjuk.

1. példa: A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán legyen $t \circ s := t + s$, $t^{-1} := -t$ és $e := 0$. Így csoportot kapunk, amit a valós számok additív csoportjának nevezünk. Ez a csoport **kommutatív**, ugyanis $t \circ s = s \circ t$ bármilyen $s, t \in \mathbb{R}$ esetén. $\square$

2. példa: A $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ komplex egységkörön csoportstruktúrát értelmezhetünk a $z_1 \circ z_2 := z_1 \cdot z_2$, $z^{-1} := \bar{z}$ és $e := 1$ képletekkel. Ez is kommutatív csoport. $\square$

3. példa: Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezései csoportot alkotnak a leképezések kompozíciójára nézve. Egy leképezést a számhalmaz egy sorba rendezésével is megadhatunk. Például az $n = 4$ esetben $(1, 4, 2, 3)$ az a $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 3$ leképezést jelenti, és $(1, 4, 2, 3) \circ (3, 2, 1, 4) = (3, 4, 2, 1)$. Ezt a csoportot **permutációcsoportnak** vagy **szimmetrikus csoportnak** nevezik. Az n -edrendű permutációcsoport elemszáma $n!$. A szimmetrikus csoport nem kommutatív. $\square$

4. példa: Csoportokat definiáló relációk segítségével is megadhatunk. Példaként meghatározzuk azt a csoportot, amelyet a $g^4 = h^2 = (gh)^2 = e$ relációknak eleget tevő

g és h elemek generálnak. Ez a csoport definíció szerint tartalmazza az e, g, h elemeket, ezek lehetséges szorzatait és azok inverzét. Vegyük a g, h, g^2, g^3 elemek szorzatait: $gh, hg, g^2h, hg^2, g^3h, hg^3$. A hosszabb szorzatok tartalmazznak két h között egy g hatványt, vagy egy ghg részszorzatot. A definiáló relációkból kiszámolható, hogy

$$hgh = g^3, \quad hg^2h = g^2, \quad hg^3h = g, \quad ghg = h.$$

Ennek alapján a fel nem sorolt szorzatok rövidíthetők. Például

$$g^3hg^3 = g^2(ghg)g^2 = g^2hg^2 = g(ghg)g = ghg = h.$$

A definiáló relációkból $g^{-1} = g^3$ és $h^{-1} = h$. Ezért minden g -kből és h -kből álló szorzat inverze is egy ilyen szorzat. Például

$$(g^3h)^{-1} = h^{-1}(g^3)^{-1} = hg.$$

A generált csoport elemeit felsoroltuk, egy 8 elemű csoportot kaptunk. □

5. példa: $GL(2, \mathbb{R})$ jelenti a 2×2 -es nem 0 determinánsú valós elemű mátrixok csoportját, amiben a csoportszorzás a mátrixszorzás, a csoportinverz az inverzmátrix képzése és

$$e := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Tudnunk kell, hogy a $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$ és $\det(A^{-1}) = 1/\det A$, továbbá A pontosan akkor invertálható, ha $\det A \neq 0$ lásd a 1. fejezetet.) Ez a csoport már nem kommutatív. Nevezetes részcsoportha

$$SL(2, \mathbb{R}) := \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$
□

6. példa: Az euklideszi sík körüljárás tartó mozgatais is csoportot alkotnak, ha két mozgatas szorzatán azt a mozgatast értjük, ami először az egyik, azután pedig a másik mozgatas végrehajtását jelenti. A mozgataások eltolásból és origó körüli forgatásból tevődnek össze. A forgatásokat egy φ szöggel adhatjuk meg, de célszerű φ helyett az $e^{i\varphi} \in \mathbb{T}$ komplex számra gondolni. Az eltolások egy síkbeli vektorral adhatók meg. Ha magát az euklideszi síkot a $\mathbb{C}$ komplex számsíkként fogjuk fel, akkor $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ lesz a mozgáscsoport. A $g = (z_1, z_2) \in \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ csoportelemnek megfelelő transzformáció

$$w \mapsto z_1 w + z_2,$$

ami geometriailag azt jelenti, hogy először forgatunk a z_1 egységnyi abszolút értékű komplex szám fázisával, azután pedig eltolunk a z_2 vektorral. Ha ezután a $(z'_1, z'_2) \in \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ transzformációt is alkalmazzuk, akkor a

$$w \mapsto z'_1(z_1 w + z_2) + z'_2 = z'_1 z_1 w + (z'_1 z_2 + z'_2)$$

transzformációhoz jutunk. A szorzási szabály tehát

$$(z'_1, z'_2) \circ (z_1, z_2) = (z'_1 z_1, z'_1 z_2 + z'_2),$$

az egység $e = (1, 0)$ és az inverz

$$(z_1, z_2)^{-1} = (\bar{z}_1, -\bar{z}_1 z_2).$$

Ez a csoport nem kommutatív, és érdemes megemlíteni, hogy mátrixcsoportként is felfoghatjuk. Mivel

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 & 0 \\ z'_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 z'_1 & 0 \\ z_2 z'_1 + z'_2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & 0 \\ -\bar{z}_1 z_2 & 1 \end{bmatrix},$$

a (z_1, z_2) transzformáció és a

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix ugyanannak a számolási szabálynak tesznek eleget. Azt mondhatjuk, hogy a mozgáscsoport a 2×2 -es komplex elemű invertálható mátrixok $GL(2; \mathbb{C})$ csoportjának részcsoporthja. $\square$

Ha G egy csoport, akkor a $g_1 x = g_2$ ($g_1, g_2 \in G$) egyenletnek egy megoldása van $x = g_1^{-1} \circ g_2$ és könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(g_1 \circ g_2)^{-1} = g_2^{-1} \circ g_1^{-1}.$$

Legyen G egy csoport és $\mathcal{H}$ egy Hilbert-tér. G **unitér reprezentációja** a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren azt jelenti, hogy minden $g \in G$ elemre adott egy $\pi(g)$ unitér operátor a $\mathcal{H}$ téren úgy, hogy a

$$\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_1 g_2), \quad \pi(g_1^{-1}) = \pi(g_1)^{-1}, \quad \pi(e) = I$$

relációk teljesülnek. (Azt is mondhatnánk, hogy π egy csoport-homomorfizmus G -ről a $\mathcal{H}$ unitérjeinek csoportjába.)

Minden csoportnak van unitér reprezentációja.

Ha G egy csoport, és a G halmazon egy olyan topológia van adva, amelyre a szorzás kétváltozós művelete és az inverzképzés folytonosak, akkor G -t **topologikus csoportnak** nevezzük.

A szimmetrikus csoportot topologizálhatjuk, ha azokat a sorozatokat tekintjük konvergenseknek, amelyek egy bizonyos tagtól kezdve állandók. Ezzel a triviális topológiával egyébként bármilyen csoport topologikus csoporttá tehető. Természetesen más példák is vannak.

7. példa: A

$$GL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}$$

csoporton értelmezzünk topológiát úgy, hogy

$$A_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

ha $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow c$ és $d_n \rightarrow d$. (Ez a mátrixelemenként való konvergencia topológiája.) Ahhoz, hogy $GL(2; \mathbb{R})$ ezzel a topológiával topologikus csoporttá váljon

szükséges, hogy az $A_n^{-1} \rightarrow A^{-1}$ reláció teljesüljön, feltéve, hogy $A_n \rightarrow A$. Példaként nézzük meg a $(2, 1)$ mátrixelemeket:

$$\frac{-c_n}{a_n d_n - b_n c_n} \rightarrow \frac{-c}{ad - bc}.$$

Hasonlóan látszik, hogy az A_n^{-1} inverz mátrix többi elemei is tartanak az A^{-1} mátrix megfelelő elemeihez.

A szorzás folytonosságához szükséges egy másik

$$A'_n = \begin{bmatrix} a'_n & b'_n \\ c'_n & d'_n \end{bmatrix} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

sorozatot is venni, és azt kell megmutatni, hogy $A'_n A_n$ elemenként tart $A' A$ -hoz. Példaként most az $(1, 1)$ elemeket írjuk fel:

$$a'_n a_n + b'_n c_n \rightarrow a' a + b' c$$

nyilvánvalóan teljesül.

$GL(2; \mathbb{R})$ topológiáját más módon is megadhatjuk. Legyen

$$\Phi : GL(2; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \Phi \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := (a, b, c, d).$$

Ekkor Φ kölcsönösen egyértelmű. Ha

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 x_4 = x_2 x_3\},$$

akkor $F \subset \mathbb{R}^4$ zárt halmaz, és Φ képtere $\mathbb{R}^4 \setminus F$, azaz egy nyílt halmaz. Mivel Φ és inverze egyaránt folytonosak, $GL(2; \mathbb{R})$ -ben úgy kapjuk meg a nyílt halmazokat, hogy az $\mathbb{R}^4 \setminus F$ -beli nyílt halmazok inverz képét vesszük Φ -nél. Ha $x \in \mathbb{R}^4 \setminus F$, akkor vehetünk egy olyan kicsi sugarú zárt $\overline{G}$ gömböt x körül, amely teljes egészében $\mathbb{R}^4 \setminus F$ -ben fekszik. A gömb G belseje x -nek olyan környezete, amelynek a lezárása kompakt. A Φ leképezés topológiai tulajdonságai miatt $\Phi^{-1}(G)$ olyan nyílt környezete $\Phi^{-1}(x) \in GL(2; \mathbb{R})$ -nek, amely $\Phi^{-1}(\overline{G})$ lezárása kompakt. Tehát bármilyen $A \in GL(2; \mathbb{R})$ esetén van olyan $A \in H \subset GL(2; \mathbb{R})$ nyílt halmaz, amelynek lezárása kompakt. $\square$

8. példa: Az $SU(2)$ csoport unitér reprezentációit kívánjuk megadni. Ha $U \in SU(2)$ és f egy $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, akkor

$$\pi(U)f(z_1, z_2) = f(U^{-1}(z_1, z_2))$$

egy $\pi(U)f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt ad meg. A jobb oldalon f argumentumában azért írtunk U^{-1} -et, mert éppen így fog teljesülni a

$$\pi(U_1 U_2) = \pi(U_1) \pi(U_2)$$

egyenlőség.

Nincs szükségünk minden $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ függvényre, csupán a z_1 és z_2 változók $2s$ -edfokú homogén polinomjait tekintjük. Ezek egy V_s lineáris teret alkotnak, ugyanis a homogén polinomok egyértelmű lineáris kombinációi a

$$z_1^{2s}, z_1^{2s-1} z_2, z_1^{2s-2} z_2^2, \dots, z_2^{2s}$$

monomoknak. Tehát V_s dimenziója $2s + 1$. Ha

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \pi(U)z_1^{2s-k}z_2^k = (\bar{\alpha}z_1 - \beta z_2)^{2s-k}(\bar{\beta}z_1 + \alpha z_2)^k,$$

és nem nehéz végiggondolni, hogy a z_1 és z_2 változók $2s$ -edfokú homogén polinomjához jutunk. Más szóval $f \in V_s$ és $U \in SU(2)$ esetén $\pi(U)f \in V_s$. A V_s lineáris téren az $SU(2)$ csoport egy hatását értelmeztük. Ahhoz, hogy unitér reprezentációhoz jussunk, egy olyan $\langle, \rangle$ belső szorzatot kell értelmezni V_s -en, hogy $\pi(U)$ unitér operátor legyen.

V_s -et Hilbert-térre tehetjük, ha az

$$e_n(z) := \frac{z_1^{s-n}z_2^{s+n}}{\sqrt{(s-n)!(s+n)!}} \quad (-s \leq n \leq s)$$

polinomokat tekintjük (ortonormált) bázisnak. Ha $\langle z, w \rangle = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2$ a szokásos belső szorzat $\mathbb{C}^2$ -n, akkor

$$\begin{aligned} \sum_n \overline{e_n(z)} e_n(w) &= \sum_n \frac{\bar{z}_1^{s-n} \bar{z}_2^{s+n} w_1^{s-n} w_2^{s+n}}{(s-n)!(s+n)!} = \\ &= \frac{1}{(2s)!} \sum_n \binom{2s}{s-n} (\bar{z}_1 w_1)^{s-n} (\bar{z}_2 w_2)^{s+n} = \\ &= \frac{1}{(2s)!} \langle z, w \rangle^{2s}. \end{aligned}$$

Mivel $\langle U^{-1}z, U^{-1}w \rangle = \langle z, w \rangle$, az előbbi számolásból látszik, hogy

$$\sum_n \overline{\pi(U)e_n(z)} \pi(U)e_n(w) = \sum_n \overline{e_n(z)} e_n(w). \quad (\text{C.1})$$

Ha $\pi(U)e_n = \sum_i W_{in}e_i$, azaz (W_{ij}) a $\pi(U)$ operátor mátrixa az e_n bázisban, akkor a (C.1) egyenlőséget a következő alakra írhatjuk át

$$\sum_{i,j} \left(\sum_n (\bar{W}_{in} W_{jn} - \delta_{ij}) \right) \overline{e_i(z)} e_j(w) = 0.$$

Itt észrevevesszük, hogy az $\overline{e_i(z)} e_j(w)$ kétváltozós polinomok lineárisan függetlenek – hiszen $-s \leq i \leq s$, $-s \leq j \leq s$ esetén különböző monomok –, ezért minden együtthatónak nullának kell lenni:

$$\sum_n \bar{W}_{in} W_{jn} = \delta_{ij}.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $WW^* = I$, azaz W unitér mátrix.

Érdemes még megjegyezni, hogy

$$\pi \left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \right) e_n(z) = (\bar{\alpha})^{s-n} \alpha^{s+n} e_n(z),$$

tehát az ilyen operátoroknak e_n sajátvektora α^{2n} sajátértékkel. ($\bar{\alpha} = 1/\alpha$) □

A G topologikus csoportot **lokálisan kompaktnak** nevezzük, ha bármely $g \in G$ eleme benne van egy olyan nyílt halmazban, amelynek a lezárása kompakt. A fentiek alapján $GL(2; \mathbb{R})$ lokálisan kompakt. A kommutatív topologikus csoportok körében jóval egyszerűbb példát is lehet mutatni. $\mathbb{R}^n$ a szokásos vektorösszeadással csoport és a szokásos topológiájával tekintve topologikus csoport is. Természetesen lokálisan kompakt.

9. példa: Meggondoljuk, hogy $SL(2; \mathbb{R})$ lokálisan kompakt topologikus csoport. Mivel $GL(2; \mathbb{R})$ -nek részcsoportha, így topologikus csoport is. (A szorzás és inverz folytonossága a részcsoportha öröklődik.) Másrészt $SL(2; \mathbb{R})$ zárt részhalmaza $GL(2; \mathbb{R})$ -nek, ami elegendő a lokálisan kompaktsághoz. $\square$

10. példa: Az invertálható $n \times n$ -es mátrixok egy $GL(n, \mathbb{R})$ -rel jelölt lokálisan kompakt topologikus csoportot alkotnak. $GL(3, \mathbb{R})$ részcsoportha az egy determinánsú ortogonális transzformációinak csoportja, $SO(3)$ lásd az 1. fejezetet. Geometriailag $SO(3)$ elemei a tengely körüli forgatások, vagyis alkalmas bázisban minden ortogonális egy determinánsú transzformáció

$$R_{x_1}(\varphi) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

alakú, ami geometriailag egy x_1 tengely körüli φ -szöggel való elforgatást jelent. $SO(3)$ elemei előállnak az x_1 és x_2 tengelyek körüli forgatásokból

$$R_{x_1}(\varphi)R_{x_2}(\theta)R_{x_1}(\psi)$$

alakban. $\square$

11. példa: A komplex elemű 2×2 -es invertálható mátrixok $GL(2; \mathbb{C})$ csoportja a valós esethez hasonlóan lokálisan kompakt topologikus csoport. Nevezetes részcsoportha $SU(2)$, az egy determinánsú unitérek csoportja. Elemei

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

alakban írhatók. $SU(2)$ zárt részcsoportha $GL(2; \mathbb{C})$ -nek, ebből nyomban adódik, hogy lokálisan kompakt. A $\alpha = x_1 + ix_2$, $\beta = x_3 + ix_4$ valós paraméterezéssel $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Topologikus térként $SU(2)$ az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér egységgömbjének felületeként fogható fel. Ezért $SU(2)$ valójában kompakt.

Az olyan g elemek, amelyekben $\alpha \cdot \beta \neq 0$ sűrű halmazt képeznek, és alábbi formában írhatók:

$$g = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\psi)/2} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi-\psi)/2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\psi-\varphi)/2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi+\psi)/2} \end{bmatrix},$$

ahol

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi \quad \text{és} \quad -2\pi \leq \psi < 2\pi.$$

A (φ, θ, ψ) Euler-szögekkel való paraméterezés előnye akkor látszik, ha bevezetjük a következő egyparaméteres unitér (rész)csoporthat:

$$k(\varphi) = \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left(\frac{i\varphi}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \exp \frac{i\varphi}{2} \sigma_3 = \exp \varphi \mathcal{J}_3, \\
a_1(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \\
&= \exp \left(\frac{i\theta}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \exp \frac{i\theta}{2} \sigma_1 = \exp \theta \mathcal{J}_1.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$g(\varphi, \theta, \psi) = k(\varphi) a_1(\theta) k(\psi). \quad (\text{C.3})$$

Az $SU(2)$ csoport centruma a $\pm I$ unitérekéből áll. $\square$

12. példa: Fontos kapcsolat van $SU(2)$ és $SO(3)$ között: létezik egy $\alpha : SU(2) \rightarrow SO(3)$ csoport homomorfizmus, azaz szorzat-, inverz- és egységtartó leképezés.

A háromdimenziós $\mathbb{R}^3$ euklideszi teret azonosítjuk a 0 nyomú 2×2 -es önadjungált mátrixok terével:

$$X := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 + i x_3 \\ x_2 - i x_3 & -x_1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3).$$

Ekkor

$$\alpha(g)X = gXg^{-1} \quad (g \in SU(2)) \quad (\text{C.4})$$

egy hatása $SU(2)$ -nek $\mathbb{R}^3$ -mon, amit explicit módon is kiírhatunk. Ha

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & z \\ \bar{z} & -x_1 \end{bmatrix} \quad (z = x_2 + i x_3),$$

akkor

$$\alpha(g)X = \begin{bmatrix} (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta})x_1 + \bar{\alpha}\beta z + \alpha\bar{\beta}z & -2\alpha\beta x_1 - \beta^2\bar{z} + \alpha^2 z \\ -2\bar{\alpha}\bar{\beta}x_1 + \bar{\alpha}^2\bar{z} - \beta^2 z & (\bar{\beta}\beta - \alpha\bar{\alpha})x_1 - \bar{\alpha}\beta\bar{z} - \alpha\bar{\beta}z \end{bmatrix}.$$

Nevezetesen $\alpha(k(\varphi)) = R_{x_1}(\varphi)$, és hasonlóan $\alpha(a(\theta))$ az x_2 tengely körüli θ szöggel való $R_{x_2}(\theta)$ forgatás. A 10. példa szerint e két forgatás generálja $\mathbb{R}^3$ forgatáscsoportját. Az $\{\alpha(g) : g \in SU(2)\}$ transzformációcsoport nem más, mint a teljes $SO(3)$. $\alpha : SU(2) \rightarrow SO(3)$ tehát ráképezés, de nem kölcsönösen egyértelmű. A g és $-g$ $SU(2)$ -beli mátrixok ugyanazt az ortogonális transzformációt adják.

Az a tény, hogy $\alpha(g)$ ortogonális transzformáció $g \in SU(2)$ -re közvetlenül is látható:

$$\|\alpha(g)X\|^2 = \text{Tr} (\alpha(g)X)^2 = \text{Tr} gXg^{-1}gXg^{-1} = \text{Tr} X^2 = \|X\|^2. \quad \square$$

D. Haar-mérték

Haar Alfréd tétele azt mondja, hogy egy lokálisan kompakt G csoporton konstans szorzótól eltekintve egyértelműen létezik egy olyan μ mérték, amelyre

- (1) a kompakt tartójú folytonos függvények integrálhatók,

(2) ha $H \subset G$ mérhető halmaz, és $g \in G$, akkor $\mu(H) = \mu(\{g \circ h : h \in H\})$.

Ezt a μ mértéket G **Haar-mértéknek** nevezzük. Az (1)-es tulajdonság kimondja, hogy a kompakt halmazok mérhetőek és véges mértékűek, míg (2) a mérték bal oldali eltolással szemben való invarianciáját mondja: Ha $gH := \{g \circ h : h \in H\}$, akkor $\mu(H) = \mu(gH)$. Az invariancia tulajdonságot átfogalmazhatjuk a μ mérték szerinti integrálra. Legyen $(L_g f)(h) := f(g^{-1}h)$, ha $g, h \in G$ és f egy $G \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Ekkor χ_{gH} nem más, mint $L_g(\chi_H)$. Tehát (2) nem más, mint

$$\int f(h) d\mu(h) = \int (L_g f)(h) d\mu(h) \quad (\text{D.5})$$

karakterisztikus függvényekre megkövetelve f helyében. A mérték (2) invariancia tulajdonsága az integrál invarianciájával ekvivalens. (D.5) érvényes minden integrálható függvényre.

1. tétel: (Haar Alfréd tétele) Legyen G lokálisan kompakt metrizálható topológikus csoport. Konstans szorzótól eltekintve egyértelműen létezik egy olyan μ Borel-mérték, amelyre

(i) a kompakt tartójú folytonos függvények integrálhatók,

(ii) ha $H \subset G$ mérhető halmaz, és $g \in G$, akkor $\mu(H) = \mu(\{g \circ h : h \in H\})$.

A Haar-mérték konstrukciója: Legyen G_n az egység körüli $1/n$ sugarú nyílt gömb, $n \in \mathbb{N}$. Ha n elég nagy, akkor G_n lezárása kompakt. Csak ezeket az n -eket tekintjük. Válasszunk egy olyan E kompakt halmazt, amely belsejének a lezárása. (Ez fogja adni az egység-mértéket.)

Legyen K egy kompakt halmaz. Ez lefedhető a G_n halmaz xG_n eltoltjaival, $x \in xG_n$. Mivel K kompakt, létezik véges fedés és legyen

$$\left[\frac{K}{G_n} \right] := \min \{k : \text{létezik } x_1, x_2, \dots, x_k \in G, \text{ hogy } K \subset \cup_{i=1}^k x_i G_n\}. \quad (\text{D.6})$$

Ez a mennyiség balinvariáns, azaz

$$\left[\frac{xK}{G_n} \right] = \left[\frac{K}{G_n} \right] \quad (x \in G)$$

és korlátozottan additív. Ha a K_1 és K_2 kompakt halmazok távolsága nagyobb, mint $1/n$, akkor

$$\left[\frac{K_1 \cup K_2}{G_n} \right] = \left[\frac{K_1}{G_n} \right] + \left[\frac{K_2}{G_n} \right].$$

A (D.6) formula azt adja, hogy K mértéke ennyiszere G_n mértékének. Tehát G_n mértékét kéne tudni. Ha E egység-mértékű, akkor G_n mértéke a

$$\left[\frac{E}{G_n} \right]$$

szám reciproka. Legyen

$$\mu_n(K) := \left[\frac{K}{G_n} \right] / \left[\frac{E}{G_n} \right].$$

Erről a sorozatról még azt kéne tudni, hogy korlátos. Mivel

$$\left\lfloor \frac{K}{G_n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{K}{E} \right\rfloor \left\lfloor \frac{E}{G_n} \right\rfloor,$$

azt látjuk, hogy

$$\mu_n(K) \leq \left\lfloor \frac{K}{E} \right\rfloor.$$

A korlátosság miatt

$$K \mapsto \mu_n(K)$$

függvényeknek van egy $K \mapsto \mu_0(K)$ torlódási pontja. Ez a μ_0 balinvariáns és additív diszjunkt kompakt halmazokon. Tehát megvan a Haar-mérték kompakt halmazokra és egy következő lépés a kiterjesztés Borel-halmazokra. $\square$

13. példa: Legyen G a pozitív valós számok csoportja a szorzásra nézve. Meg akarjuk határozni a μ Haar-mértéket, és feltételezzük, hogy létezik olyan $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre

$$\mu(H) = \int_H p(x) dx,$$

vagy ekvivalens módon

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x) d\mu(x) = \int_0^\infty f(x)p(x) dx$$

minden integrálható f függvényre, nevezetesen minden folytonos kompakt tartójú függvényre. (A jobb oldali integrál szokásos Lebesgue-integrált jelent.) Az invariancia szerint

$$\int f(x)p(x) dx = \int f(x) d\mu(x) = \int f(y^{-1}x) d\mu(x) = \int f(y^{-1}x)p(x) dx,$$

és helyettesítéssel integrálva

$$\int f(x)p(x) dx = \int f(x)p(yx)y dx,$$

aminek fenn kell állnia minden $y > 0$ számra és integrálható f függvényre. Ez feltétlenül teljesül, ha

$$p(x) = p(yx)y.$$

A kapott függvényegyenletet kielégíti a $p(x) = x^{-1}$ függvény. Ez a sűrűségfüggvény határozza tehát meg a Haar-mértéket. $\square$

Kompakt topologikus csoport Haar-mértékét szokásosan úgy normáljuk, hogy a teljes tér mértéke 1 legyen.

14. példa: Legyen G a pozitív valós számok csoportja a szorzásra nézve. Meg akarjuk határozni a μ Haar-mértéket, és feltételezzük, hogy létezik olyan $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre

$$\mu(H) = \int \chi_H p(x) dx,$$

vagy ekvivalens módon

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x) d\mu(x) = \int_0^\infty f(x)p(x) dx$$

minden integrálható f függvényre, nevezetesen minden folytonos kompakt tartójú függvényre. (A jobb oldali integrál szokásos Lebesgue-integrált jelent.) Az invariancia szerint

$$\int f(x)p(x) dx = \int f(x) d\mu(x) = \int f(y^{-1}x) d\mu(x) = \int f(y^{-1}x)p(x) dx,$$

és helyettesítéssel integrálva

$$\int f(x)p(x) dx = \int f(x)p(yx)y dx,$$

aminek fenn kell állnia minden $y > 0$ számra és integrálható f függvényre. Ez feltétlenül teljesül, ha

$$p(x) = p(yx)y.$$

A kapott függvényegyenletet kielégíti a $p(x) = x^{-1}$ függvény. Ez a sűrűségfüggvény határozza tehát meg a Haar-mértéket. $\square$

15. példa: A $GL(2, \mathbb{R})$ csoport elemei 2×2 -es

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

invertálható mátrixok. A csoport Haar-mértékét keressük

$$d\mu(A) = p(x, y, z, w) dx dy dz dw =: p(A) dA$$

alakban. Tehát az

$$\int f(A)p(A) dA = \int f(BA)p(A) dA$$

egyenlet fejezi ki az integrál invarianciáját, $B \in GL(2, \mathbb{R})$ tetszőleges mátrix. A jobb oldalon helyettesítéses integrálást végzünk

$$\int f(BA)p(A) dA = \int f(A')p(B^{-1}A') \left| \frac{\partial A}{\partial A'} \right| dA'.$$

Ha

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad A' := BA = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix},$$

és a Jacobi-mátrix

$$\frac{\partial A'}{\partial A} = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{bmatrix} = B^t \otimes I_2.$$

(A tenzorszorzatos írásmódra nézve lásd 1. fejezetet.) Ezért

$$\left| \frac{\partial A}{\partial A'} \right| := \left| \det \left[\frac{\partial A}{\partial A'} \right] \right| = \frac{1}{|\det(B^t \otimes I_2)|} = \frac{1}{(\det B)^2}.$$

Az invariancia feltétele tehát

$$p(A) = \frac{p(B^{-1}A)}{(\det B)^2}.$$

Ennek megoldása a

$$p(A) = \frac{1}{(\det A)^2}$$

mátrixfüggvény, ami megadja a Haar-mértéket a $GL(2; \mathbb{R})$ csoporton. Az általános $GL(n, \mathbb{R})$ esetben a számolás teljesen hasonló, n lesz a 2 kitevő helyében. $\square$

16. példa: Legyen G a 2×2 -es inverálható felső háromszög mátrixok csoportja. Ha

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & w \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{xw} \begin{bmatrix} w & -y \\ 0 & x \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad BA = \begin{bmatrix} ax & ay + bw \\ 0 & dw \end{bmatrix}.$$

Ezek a formulák mutatják, hogy G valóban csoport.

A csoport balinvariáns Haar-mértékét keressük az előző példához hasonlóan

$$d\mu(A) = p(x, y, w) dx dy dw =: p(A) dA$$

alakban. A balinvariancia az

$$\int f(A) p(A) dA = \int f(BA) p(A) dA$$

egyenlet, ahol $B \in G$ tetszőleges mátrix. A jobb oldalon helyettesítéses integrálást végzünk

$$\int f(BA) p(A) dA = \int f(A') p(B^{-1}A') \left| \frac{\partial A}{\partial A'} \right| dA',$$

$BA = A'$. A

$$\frac{\partial A'}{\partial A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Jacobi-mátrix alapján

$$\left| \frac{\partial A}{\partial A'} \right| := \left| \det \left[\frac{\partial A}{\partial A'} \right] \right| = \frac{1}{a^2 d}.$$

Az invariancia feltétele tehát

$$\int f(A) p(A) dA = \int f(A') p(B^{-1}A') \frac{1}{a^2 d} dA' = \int f(A) p(B^{-1}A) \frac{1}{a^2 d} dA,$$

azaz $a^2 dp(A) = p(B^{-1}A)$. Részletesen

$$a^2 dp \left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & w \end{bmatrix} \right) = p \left(\begin{bmatrix} \frac{x}{a} & \frac{dy-bw}{\frac{da}{dw}} \\ 0 & \frac{w}{d} \end{bmatrix} \right).$$

Úgy látszik, hogy p nem függ az $(1, 2)$ elemtől. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$p(A) = \frac{1}{x^2|w|}$$

a megoldás.

A jobbinvariancia az

$$\int f(A)q(A) dA = \int f(AB)q(A) dA$$

egyenlet, amit a q függvényre hasonlóan oldhatunk meg.

$$q(A) = \frac{1}{|x|w^2},$$

tehát a balinvariáns és jobbinvariáns mértékek valóban különböznek. □

Gyakorlófeladatok

1. Egy ABC szabályos háromszög a következő szimmetriákkal rendelkezik: $f_1 :=$ a középpont körüli pozitív irányú 120° -os elforgatás, $f_2 :=$ a középpont körüli pozitív irányú 240° -os elforgatás; $t_X :=$ az X csúcson áthaladó magasságvonalra vonatkozó tükrözés ($X = A, B, C$). Jelölje továbbá e az identikus transzformációt! Adjuk meg a háromszög szimmetriacsoportjában a csoportszorzást táblázatos formában! Vagyis töltsük ki az

	e	f_1	f_2	t_A	t_B	t_C
e						
f_1						
f_2						
t_A						
t_B						
t_C						

táblázatot! (Az x sor és az y oszlop metszéspontjába az $x \circ y$ szorzat kerül.) A táblázatból olvassuk ki az egyes csoportelemek inverzét!

2. Legyen n egész szám! Az $X = \{1, 2, \dots, n-1\}$ halmazon értelmezzük a szorzás műveletét úgy, hogy $x \circ y$ az xy szorzat n -el való osztás után kapott maradéka. Milyen n számokra kapunk így csoportot?
3. Transzpozíciónak nevezünk egy olyan permutációt, amely az $1, 2, 3, \dots, n$ számok között két szomszédosat felcserél, a többit pedig helyben hagyja. Igazoljuk, hogy minden permutáció transzpozíciók szorzata! Egyértelmű-e a szorzatként való előállítás?
4. Legyen

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

egy olyan 2×2 -es blokkmátrix, amelynek elemei $n \times n$ -es mátrixok! (I tehát az $n \times n$ -es egység mátrixot jelöli.) Igazoljuk, hogy azok a $2n \times 2n$ -es komplex A mátrixok, amelyekre $A^t J A = J$ csoportot alkotnak a mátrixszorzásra nézve! (Szimplektikus csoport.)

5. Igazoljuk, hogy az

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok csoportot alkotnak, ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $c > 0$!

6. Igazolja, hogy a

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0)$$

mátrixok lokálisan kompakt topologikus csoportot alkotnak! Keresse meg a csoport Haar-mértékét!

7. Mutassa meg, hogy az euklideszi sík mozgatócsoportján a Haar-mérték szorzat alakú! (A csoportra vonatkozóan lásd a 6. példát!)
8. Mutassa meg, hogy $SU(2)$ -t a (φ, θ, ψ) Euler-szögekkel paraméterezve a Haar-mérték

$$d\mu(g) = \frac{1}{4\pi^2} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\psi$$

alakú!

9. Mutassa meg, hogy $SO(3)$ -t a (φ, θ, ψ) Euler-szögekkel $R_x(\varphi)R_y(\theta)R_x(\psi)$ formában paraméterezve a Haar-mérték

$$d\mu(h) = \frac{1}{8\pi^2} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\psi$$

alakú! Mi az oka annak, hogy $SO(3)$ és $SU(2)$ Haar-mértékének sűrűsége egy 2-es szorzóban különbözik?

Jegyzetek

¹ Ez a fejezet rövid áttekintést ad a véges dimenziós vektorterekről. Valójában feltételezzük, hogy az olvasó már találkozott a lineáris algebra fogalomtárával, és célunk inkább az ismeretek felfrissítése. Az itteninél jóval részletesebb tárgyalás található Kérchy László *Bevezetés a végesdimenziós vektorterek elméletébe* című jegyzetében, Polygon jegyzettár, 1997.

²A véges dimenziós lineáris terekkel a lineáris algebra foglalkozik. Ha egy valós lineáris tér minden vektora az $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorok lineáris kombinációja, akkor ezek közül kiválaszthatunk egy maximális lineárisan független rendszert, aminek elemeit az egyszerűség kedvéért az $y_1, y_2, \dots, y_k$ betűkkel jelöljük. $\mathbb{R}^k$ és vektorterünk között $(t_1, t_2, \dots, t_k) \mapsto t_1 y_1 + t_2 y_2 + \dots + t_k y_k$ kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezés.

³Blokkmátrixokról számottevő anyag található Rózsa Pál *Lineáris algebra és alkalmazásai* (Műszaki Könyvkiadó, 1974) című könyvének ötödik fejezetében.

⁴A funkcionálanalízis kialakulásának története olvasmányos formában megtalálható J. Dieudonné *History of Functional Analysis* című könyvében.

⁵A normált tér fogalmát egymástól függetlenül Hahn és Banach vezette be 1922–23-ban, jelentős részben Riesz Frigyes munkáinak hatására, aki a norma fogalmat konkrét terekben már korábban használta.

⁶Lásd I. P. Natanszon *Konstruktív függvénytan* című könyvében az V. fejezet 3.§-ban levő 3. lemmát.

⁷A ma klasszikusnak mondható terek ($C(0, 1)$ és ℓ^p) duálisát Riesz Frigyes találta meg. Ezek a példák nagyban hozzájárultak az absztrakt funkcionálanalízis kialakulásához. Egyébként Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla 1953-ban franciául megjelent funkcionálanalízis könyve a legismertebb matematikakönyvek egyike. Számos nyelvre lefordították, 1988-ban aztán magyarul is megjelent a Tankönyvkiadónál. A könyv ma is ajánlható.

⁸A Hilbert-térnek itt értelmezett dimenziója nem ugyanaz, mint amit a topológia nélküli vektorterekre szoktak értelmezni. A Hilbert-tér dimenziója $L^2(\mathbb{R}^n)$ esetén megszámlálhatóan végtelen, amíg ugyanennek a térnek az algebrai dimenziója nem megszámlálható.

⁹Az élesített Hausdorff–Young-egyenlőtlenség és számos ehhez kapcsolódó szép eredmény megtalálható E. H. Lieb és M. Loss *Analysis* című könyvében, American Mathematical Society, 1997.

¹⁰Sajnos ebben a jegyzetben nem térhettünk ki a disztribúcióelmélet szép alkalmazásaira. Ajánlani lehet a következő magyar nyelvű könyveket: Simon L. és E. A. Baderko *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek* (Tankönyvkiadó, 1983) vagy W. Preuss, Bleyer A. és H. Preuss *Disztribúcióelmélet műszaki alkalmazásokkal* (Műszaki Könyvkiadó, 1986).

¹¹Azért beszélünk töltetről, hogy megkülönböztessük a szokásos töltéstől. A töltések között haté Coulomb-erő $Q_1 Q_2 r_{12}^{-2}$, ahol r_{12} a Q_1 és Q_2 töltések távolsága. Töltetek esetében az erő $Q_1 Q_2 r_{12}^{-1}$. Valójában 1 vagy 2 dimenzióban ez a Coulomb-törvény, három dimenziótól kezdve a szokásos.

¹²Ebben a konkrét esetben a sajátfüggvények Bessel-függvények segítségével fejezhetők ki, a sajátértékek pedig Bessel-függvények gyökeinek negatív négyzetei, lásd E. B. Davies *Spectral Theory of Differential Operators* (Cambridge University Press, 1995) című könyvét.

¹³A harmonikus oszcillátor tárgyalása megtalálható minden kvantummechanikáról írt tankönyvben, lásd például Marx György *Kvantummechanika* című könyvét (Műszaki Könyvkiadó, 1971).

¹⁴A kvantummechanikáról szóló könyvekben másfajta modellje is található a hidrogénatomnak, az itt tárgyalt modell az elektron spinjét egyáltalán nem veszi figyelembe. A példában a differenciálegyenletek megoldását azért nem részletezzük, mert az jól és részletesen benne van a kvantummechanika tankönyvekben, amelyek viszont nem hangsúlyozzák a modell lineáris analízis oldalát. A hidrogénatom példája matematikai szempontból azért nagyon tanulságos, mert a Hilbert-terek és operátoraik szinte minden lényeges része felbukkan a modell megoldása során.

¹⁵Lásd E. B. Davies *Spectral Theory of Differential Operators* (Cambridge University Press, 1995) című könyvében a Theorem 6.2.3 részt.

¹⁶Neumann *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* című könyve 1932-ban jelent meg, angol nyelvű fordítása pedig 1955-ben látott napvilágot. Ezután 1980-ban magyarul is megjelent.

¹⁷Ez az állapot a „singlet” nevet viseli, és az Einstein–Podolsky–Rosen-paradoxon főszereplője. Ha a két spin nagy távolságra helyezkedik el, pontosabban, térszerűen szeparáltak, akkor az egyik spin érzékelné látszik, hogy mi volt a másik spin mérésének eredménye, tudnillik mindig azzal ellentétes mérési eredményt produkál. Az EPR paradoxon 1935 óta vitatott kérdés.

¹⁸Neumann János a ma róla elnevezett entrópiához 1927-ben jutott el egy termodinamikai gondolat kísérleten keresztül. Számára az entrópia a kevertség mértéke volt: Tiszta állapotok entrópiája 0, egyébként pedig a „kevertebb” állapot entrópiája nagyobb. Shannon az 1940-es években építette fel a róla elnevezett információelméletet, és egy anekdota szerint éppen Neumann javaslatára nevezte a $-\sum_i p_i \log p_i$ mennyiséget entrópiának. A statisztikus operátor Neumann-féle entrópiájának információelméleti oldalát csak sokkal később ismerték fel.

¹⁹A Kolmogorov-féle valószínűségi modellben a sztochasztikus változók egy Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn, azaz mértéktéren adott függvények. A kolmogorovi elméletben, amely egyébként fiatalabb, mint a kvantumelmélet és annak sztochasztikus interpretációja, bármely két sztochasztikus változónak kovarianciája van, bármely eseménynek bármely eseményre vonatkozó feltételes valószínűségéről beszélhetünk. A kvantumelmélet nem kolmogorovi sztochasztikájában ez nincs így. A. N. Kolmogorovnak a mai valószínűség-elmélet fundamentumaként számon tartott *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* című könyve 1933-ban jelent meg Berlinben.

²⁰Az itt kifejtett teleportálási eljárást 1993-ban találta C. H. Bennett, R. Jozsa és néhány további munkatársuk.

²¹A kvantummechanika hálóelméleti vagy logikai megalapozásával kapcsolatban ajánlható Rédei Miklós *Introduction to quantum logic* című jegyzete, Eötvös Kiadó, 1995.

²²Egy $\mathcal{C}$ halmazrendszert monoton osztálynak nevezünk, ha **a.** $C_1 \subset C_2 \subset \dots, C_n \in \mathcal{C}$ esetén $\cup_n C_n \in \mathcal{C}$ és **b.** $C_1 \supset C_2 \supset \dots, C_n \in \mathcal{C}$ esetén $\cap_n C_n \in \mathcal{C}$. Egy halmazalgebrát tartalmazó legszűkebb σ -algebra ugyanaz, mint az őt tartalmazó legszűkebb monoton osztály. Ez az az állítás, amit itt felhasználhatunk.

Ajánlott irodalom

- J. BLANK, P. EXNER and M. HAVLÍČEK: Hilbert Space Operators in Quantum Physics, Academic Press, 1994.
- L. DEBNATH and P. MIKUSIŃSKI: Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Academic Press, 1998.
- F. HIAI and D. PETZ: Introduction to Matrix Analysis and Applications, készülőben lévő könyv.
- R. A. HORN and C. R. JOHNSON: Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1991.
- JÁRAI Antal: Modern alkalmazott analízis, Typotex, 2007.
- KÉRCHY László: Hilbert terek operátorai, Polygon, 2003.
- P. D. LAX: Functional Analysis, Wiley, 2002.
- P. D. LAX: Lineáris algebra és alkalmazásai, Akadémiai Kiadó, 2008.
- A. W. NAYLOR and G. R. SELL: Linear Operator Theory in Engineering and Science, Springer, 1982.
- M. OHYA and D. PETZ: Quantum Entropy and Its Use, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993. Második kiadás 2004.
- PETZ Dénes: Deriválás és integrálás, jegyzet, <http://www.math.bme.hu/~petz/anal.pdf>
- M. REED and B. SIMON: Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I. Functional Analysis, Academic Press, 1980.
- M. REED and B. SIMON: Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness, Academic Press, 1975.
- RIESZ Frigyes és SZŐKEFALVI-NAGY Béla: Funkcionálanalízis, Tankönyvkiadó, 1988.
- RÓZSA Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, 1974.
- SZŐKEFALVI-NAGY Béla: Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó, 1972.

Tárgymutató

- $C[a, b]$, 27
- $\exp(A)$, 37
- μ -majdnem mindenütt, 217
- σ -additivitás, 214
- σ -algebra, 214
- σ -véges mérték, 215
- önadjungált
 - mátrix, 16, 19
 - operátor, 74, 104, 128
- állapot, 160
- állapotvektor, 160
- általánosított
 - függvények, 73
 - Fourier-sor, 70
- 0–1 kérdés, 169, 175
- abszolút érték, 226
- abszolút konvergencia sor, 37
- adjungált, 74, 128
- alapállapot, 148
- algebrai
 - adjungált, 15
 - duális, 7
 - struktúra, 3
 - tenzorszorzat, 9
- altértopológia, 200
- alulról korlátozott operátor, 132
- analitikus vektor, 140
- antiszimmetrikus tenzorszorzat, 11
- approximatív
 - egység, 73
 - sajátérték, 96, 112, 134
- asszociált
 - Laguerre-polinomok, 62
 - Legendre-függvény, 59, 89
- bázis, 4, 49
- bázistranszformáció, 15
- balra tolás operátor, 75, 98
- balreguláris reprezentáció, 87
- Banach–Steinhaus-tétel, 40
- Banach-tér, 36
- Beckner, 56
- Bell-féle bázis, 171
- belső szorzat, 42
- Bernstein-féle polinom, 206
- Bessel-egyenlőtlenség, 50
- Bessel-féle azonosság, 49
- blokkmátrix, 22
- Borel-halmaz, 214
- Cantor-halmaz, 205
- Cauchy-sorozat, 36, 201
- Cayley-transzformált, 102, 135
- ciklikus vektor, 14, 110, 114
- csoportinverz, 228
- csoportstruktúra, 228
- csoportszorzás, 228
- defekt altér, 136
- determináns, 12
- diád, 10
- Dieudonné, 240
- diffúzió félcsoport, 155
- dimenzió, 49
- dinamikai változó, 160
- Dirac-féle írásmód, 77
- direkt összeg, 44
- Dirichlet-féle
 - Laplace-operátor, 146
 - peremfeltétel, 131
- disztribúció, 73
 - temperált, 56
- duális bázis, 6
- duális tér, 34, 44
- egyenlőtlenség
 - Hölder, 29
 - Minkowski, 29
- egyenletes korlátosság tétele, 40

- egyensúlyi állapot, 167
- egyparaméteres unitér csoport, 90
- egységelem, 228
- egységosztás, 205
- ekvivalens normák, 31
- előjeles mérték, 212, 224
- eloszlás
 - normális, 72
- erős folytonosság, 151
- erős operátor topológia, 81
- Euler-szög, 233
- exponenciális vektor, 127
- függvény tartója, 4
- fázis, 160
- félkörelasztlás, 110
- félnorma, 27
- főkvantumszám, 151
- főtengely-transzformáció, 17
- Fatou–Beppo Levi-tétel, 217
- Fatou-lemma, 218
- felcserélhető operátor, 163
- feltételes várható érték, 70
- folytonos
 - beágyazás, 55
 - függvénykalkulus, 101
 - leképezés, 31, 202
 - spektrum, 98
- folytonossági modulus, 41
- forma, 71
- Fourier-sor, 41
- Fourier-transzformáció, 55, 91
 - spektruma, 100
- frame, 51
- Frechet-értelemben differenciálható, 34
- Frechet-derivált, 34
- Frechet-differenciál, 34
- Fubini-tétel, 220
- gömbfüggvények, 89
- Gateaux-derivált, 35
- Gateaux-differenciál, 35
- Gauss-féle integrál, 92
- Gauss-mérték, 60
- generátor, 38
 - Stone-féle, 151
- generátorfüggvény
 - Hermite-polinomoké, 118
 - Legendre-polinomoké, 118
- geometriai közép, 122
- Gibbs-állapot, 20, 167
- Gleason-tétel, 177
- gráf, 40, 126
- Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció, 57
- Green-függvény, 142, 145
- Green-formula, 146
- Green-tétel, 130
- gyűrű struktúra, 32
- gyenge operátor topológia, 81
- gyorsan csökkenő függvény, 28
- Hölder-egyenlőtlenség, 29, 45
- három spin paradoxon, 167
- hővezetési félcsoport, 155
- Haar Alfréd, 234
- Haar-mérték, 234, 235
- Hahn–Banach-tétel, 47
- halmaz lezárása, 200
- harmonikus
 - oszcillátor, 146, 178
 - polinomok, 140
- harmonikus közép, 86
- Hausdorff–Young-egyenlőtlenség, 56
- Heisenberg-kép, 179
- hengerhalmaz, 218
- Hermite-függvény, 61
- Hermite-függvények, 147
 - kétváltozós, 78
- Hermite-féle polinomok, 61
 - generátorfüggvény, 93
- hidrogénatom, 148
- Hilbert-tér, 42
- Hilbert-terek
 - direkt összege, 44
 - tenzorszorzata, 77
- hipermátrix, 22
- hullámfüggvény, 162
- impulzusoperátor, 163
- integrálközelítő-összeg, 210
- irreducibilis
 - ábrázolás, 115
- ismételhető mérés, 169
- izometria, 32

- Jacobi-féle polinomok, 110
- jobbról való konvergencia, 200
- jobbra tolás operátor, 75
- Jordan-blokk, 16
- Jordan-féle
 - felbontás, 223, 226
 - normálalak, 16
- kölcsönösen szinguláris mérték, 226
- kétváltozós Hermite-függvények, 78
- kanonikus bázis, 49
- kapcsolt állapot, 171
- karakterisztikus polinom, 15
- kevert állapot, 166
- kompakt
 - operátor, 112
 - topologikus tér, 203
- kompatibilis változó, 174
- komplex mérték, 212
- konjugált
 - kitevők, 29
 - lineáris, 5, 49
- kontrakciók, 70
- konvergál, 200
- konvergencia, 27
- konvergens, 31
- konvolúció, 72
- konzervatív rendszer, 178
- koordináta-operátor, 133, 162
- korlátos, 70
- korlátos forma, 71
- kvadratikusan alak, 17
- kvantum bit, 170
- kvantummechanikai teleportálás, 170
- lényegében önadjungált operátor, 135
- lényeges spektrum, 116, 134
- Lagrange, 17
- Laguerre-féle polinomok, 62
- Laplace-operátor, 130
 - Neumann-féle, 146
 - polárkoordinátákban, 140
- Lebesgue-féle
 - domináns konvergencia tétel, 217
 - felbontási tétel, 227
 - integrál, 212
- Lebesgue-mérhető halmaz, 214
- Legendre-féle polinomok, 57, 142
- lezárható operátor, 129
- Lieb, 56
- lineáris
 - altér, 4
 - funkcionál, 5
 - kombináció, 4
 - leképezés, 5
 - tér, 3
- lineárisan független rendszer, 4
- lokálisan
 - kompakt topologikus csoport, 233
 - kompakt topologikus tér, 204
 - konvex topologikus vektortér, 54
- mágneses kvantumszám, 151
- másodfajú Legendre-függvény, 58
- második duális, 47
- mátrixegységek, 4
- mátrixnyom, 5
- mérhető függvény, 214
- mérték, 212
 - előjeles, 212
 - Haar-féle, 235
 - kölcsönösen szinguláris, 226
 - komplex, 212
 - vektorértékű, 212
- mértani közép, 85
- magfüggvény, 113
- mellékkvantumszám, 151
- metrika, 201
- metrikus tér, 201
 - teljes burka, 202
 - teljessé tétele, 202
- metrizálható topológia, 201
- Minkowski-egyenlőtlenség, 29, 45
- multilineáris funkcionál, 10
- multinormált tér, 54
- Nelson-tétel, 141
- nemdisztributív háló, 176
- Neumann János, 68, 119, 128, 159
- Neumann-algebra, 175
- Neumann-féle
 - entrópia, 167
 - Laplace-operátor, 146
 - mérés, 169

- peremfeltétel, 131
- Neumann-háló, 176
- Neumann-sor, 52
- normális
 - eloszlás, 72
 - operátor, 75
- normált tér, 27
- norma, 27, 70
- nulla vektor, 3
- nyílt
 - halmaz, 31, 200
 - leképezés tétele, 40
- nyomoperátor, 115
- obszervábilis, 160
- operátor
 - félcsoport, 38
 - gráfja, 126
 - kiterjesztése, 129
 - lezárása, 129
 - normája, 32
 - szimmetrikus, 128
 - zárt, 126
- operátor nyoma, 115
- ortogonális
 - polinomrendszerek, 57
 - rendszer, 44
- ortonormált
 - bázis, 9
 - rendszer, 49
- paralelogramma azonosság, 68
- paraméteres integrál
 - differenciálhatósága, 218
- parciális differenciálegyenletek, 146
- Pauli-mátrixok, 161
- permutációcsoport, 228
- Plancherel-tétel, 56, 93
- poláris felbontás, 104
- polarizációs azonosság, 71
- pontonkénti konvergencia, 105
- pontspektrum, 98
- pozitív operátor, 81, 132
 - értékű mérték, 105
- projekció, 74
- projekciótétel, 69
- projektormérték, 106
- Rademacher-függvény, 116
- Radon–Nikodym-derivált, 226
- Radon–Nikodym-tétel, 226
- redukált
 - statisztikus operátor, 165
 - tömeg, 149
- reziduális spektrum, 98
- rezolvens, 94
 - halmaz, 94
- Riemann–Stieltjes-integrál, 211
- Riemann-integrál, 210
- Riesz Frigyes, 93, 240
- Riesz reprezentációs tétele, 48
- Riesz–Radon-tétel, 221
- Riesz-féle reprezentációs tétel, 47
- Riesz-lemma, 66, 69
- sűrűségi mátrix, 20
- sűrű halmaz, 200
- sűrűségi mátrix, 165
- sajátállapot, 160
- sajátérték, 15, 98
- sajátvektor, 15, 98
- Schrödinger-egyenlet, 178
- Schrödinger-kép, 179
- Schrödinger-operátor, 178
- Schwartz-tér, 28
- Schwarz-egyenlőtlenség, 42
- sorfejtés, bázis szerint, 50
- spektrálsugár, 97
- spektráltétel, 107, 132
- spektrum, 52, 53, 96
 - folytonos, 98
- standard normális eloszlás, 72
- statisztikus operátor, 165
- Stone–Weierstrass approximációs tétel, 206
- Stone-tétel, 151
- Sturm–Liouville-operátorok, 142
- számtani közép, 85
- Szőkefalvi-Nagy Béla, 89
- szabad energia, 167
- szeparábilis, 51
 - topologikus tér, 202
- szimmetrikus
 - csoport, 228
 - mátrix, 16
 - operátor, 128

- tenzorszorzat, 13
- szinguláris, 146
- szorzásoperátor, 110
- szorzattopológia, 204
- szubmultiplikatív, 32
- szuperszelekciós szabály, 175
- távátvitel, 170
- távolság, 201
- teleportálás, 170
- teljes
 - burok, 39
 - metrikus tér, 201
 - rendszer, 70
 - változás, 211
- teljesen folytonos operátor, 112
- temperált disztribúció, 56, 73
- Tietze-féle kiterjesztési tétel, 205
- topológia, 200
 - bázisa, 200
- topológiai struktúra, 27
- topologikus csoport, 86, 230
- topologikusan ekvivalens, 54, 201
- transzformációk tenzorszorzata, 10
- transzponált, 7
- Tyihonov-tétel, 204
- unitér
 - dilatáció, 89
 - ekvivalens, 110
 - operátor, 86
 - operátor spektruma, 95, 100
 - propagátor, 177
 - reprezentáció, 87, 230
- véges rangú operátor, 113
- vektor, 3
- vektorértékű mérték, 212
- vektortér, 3
- vetítés, 5
- vetítés operátor, 69
- Weierstrass approximációs tétele, 205
- Weyl-tétel, 116, 134
- Wigner-mérték, 110
- Wronski-féle determináns, 144
- zárt
- gráf tétel, 40
- halmaz, 31, 200
- operátor, 40, 126