Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a könyv a lineáris analízisbe ad bevezetést, és alkalmazásként bemutatja a kvantumelmélet matematikai megalapozását. Bár feltételezzük, hogy az olvasó már elsajátította a lineáris algebrai alapokat, az első fejezet végigfut néhány, mátrixokkal kapcsolatos témakörön, részben ismétlésként, részben pedig azért, hogy a lineáris analízisnek a lineáris algebrától némileg különböző szemlélete érvényre jusson. A második fejezetben viszonylag kisebb hangsúlyt kapnak a normált és multinormált (más néven lokálisan konvex) terek, inkább a Hilbert-terek elméletének szentelünk nagyobb teret a harmadik fejezettől kezdve. A Hilbert-tér nagyon jó példa végtelen dimenziós topologikus vektortérre és a lineáris analízis módszereinek megmutatására. Az absztrakt Lebesgue-integrál fogalmát a lehetőségekhez képest elkerüljük, de az $\mathbb{R}^n$-en négyzetesen integrálható függvények terét természetesen használjuk. Ezt a nehézséget igyekszik áthidalni a függelék, amely a topologikus terekre vonatkozó alapvető ismereteket összegyűjti, és egy tömörített, ugyanakkor elég teljes integrálelméletet is tartalmaz. Az ortogonális polinomokat és más speciális függvényeket, továbbá bizonyos konkrét csoportok ábrázolásait fizikában való fontosságuk miatt részletesen tárgyaljuk. A negyedik fejezet a Hilbert-terek nemkorlátos operátoraiba ad bepillantást. A témák választása a kvantummechanika matematikai igényeihez igazodik. A könyv utolsó fejezete éppen a kvantummechanika megalapozását mutatja be, és a korábbi tisztán matematikai tételek és fogalmak itt fizikai interpretációt is kapnak.

A tárgyalásmód a bizonyítások helyett inkább a példákra teszi a fő hangsúlyt. A tipikus bizonyítási módszerek megjelennek, de számos tétel szerepel bizonyítás nélkül vagy egy egyszerűsített eset, illetve a bizonyítás gondolatmenetének tárgyalásával. A fejezetek végén gyakorlófeladatok bőséges mennyiségben találhatók. Változó nehézségűek, a legnehezebbekhez útmutatás is van. A szerző véleménye szerint a példák alapos áttanulmányozása és a hozzájuk hasonló gyakorlófeladatok egyéni megoldása nagyon fontos része a fogalmak és módszerek megértésének éppen úgy, mint az anyag peremértékfeladatokban, disztribúcióelméletben és az alkalmazások más területein való hasznosításának. A feladatok jelentős részének részletes megoldását a 6. fejezet tartalmazza. Azokat a gyakorlófeladatokat, amelyek megoldása meg van adva, ^{M} jelöli, a nehezebbeket pedig *.

A XX. század magyar matematikájában a lineáris (vagy funkcionál-) analízis kiemelkedő szerepet játszott, hiszen például a magyar Riesz Frigyes a diszciplína egyik atyja volt, számos alapvető eredmény tőle származik. Neumann János nagyon sokirányú matematikai munkásságából a nemkorlátos operátorok elméletének megalapozása kapcsolódik a könyv anyagához. Ezekből az okokból kifolyólag, és csak úgy érdekességképpen is, néhány tudománytörténeti illusztráció és megjegyzés igyekszik az anyagot színesebbé tenni.

A könyv anyaga fokozatosan bővült, és évek munkájával állt össze. Sok segítséget kaptam a BME mérnök-fizikus és alkalmazott matematikus hallgatóitól a hibák és pontatlanságok kiszűrésében. Doktorandusz hallgatóim, Andai Attila, Mosonyi Milán, Pitrik József és Réffy Júlia közreműködtek a gyakorlófeladatok megoldásainak leírásában. Köszönet illeti meg Géczy Flórát is az ábrák és illusztrációk elkészítésében nyújtott segítségéért.

Budapest, 2001. december

A szerző

1. Lineáris terek és lineáris leképezések

A lineáris tér fogalma a két- vagy háromdimenziós euklideszi tér messzemenő általánosítása. A téren van egy **algebrai struktúra**, az elemeket össze lehet adni, és számmal is meg lehet szorozni. Ezek a műveletek a vektorokra emlékeztetnek, és ez is oka annak, hogy a tér elemeit vektoroknak fogjuk nevezni, még akkor is, ha azok számos esetben függvények lesznek. Ebben a fejezetben elsősorban véges dimenziós vektorterekkel[1] és azok lineáris transzformációival foglalkozunk. Utóbbiak mátrixokkal adhatók meg. A fejezet célja a lineáris algebrai alapok megszilárdítása a végtelen dimenziós vektorterek tárgyalása előtt.

1.1. Lineáris terek

A **lineáris tér** olyan matematikai struktúra, amelynek elemeit **vektoroknak** nevezzük, a vektorok összeadhatók és számmal szorozhatók. A vektorok összeadása kommutatív és asszociatív művelet. Létezik egy **nulla vektor**, amely az $x + \underline{0} = x$ tulajdonsággal rendelkezik, x tetszőleges vektora a lineáris térnek. Természetesen az összeadás felcserélhetősége miatt $\underline{0} + x = x$ ugyancsak teljesül. Minden x vektornak van egy $-x$-szel jelölt additív inverze, amelyet az $x + (-x) = \underline{0}$ tulajdonság jellemez. Ha λ egy szám, és x egy vektor, akkor adott a $\lambda \cdot x$ vektor a

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot x &= \lambda \cdot x + \mu \cdot x\,, \\ \lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y\end{aligned}$$

disztributivitási szabályoknak eleget téve. Valós vagy komplex lineáris térről beszélünk annak megfelelően, hogy λ szerepében valós vagy komplex számok állnak. A számmal való szorzástól megköveteljük még

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \quad \text{és} \quad 1 \cdot x = x$$

teljesülést is. Levezethető, hogy $0 \cdot x = \underline{0}$ és $(-1) \cdot x = -x$.

Valós lineáris teret alkotnak a legfeljebb n-ed fokú valós együtthatós polinomok, komplex lineáris teret alkotnak az összes (z_1, z_2, z_3) komplex számhármasok a koordinátánkénti összeadásra és a számmal való koordinátánkénti szorzásra nézve. Mivel a lineáris tér elemeit vektoroknak nevezzük, a lineáris tér helyett **vektortérről** is szoktak beszélni. Nem okozhat gondot, hogy a továbbiakban $\lambda \cdot x$ helyett egyszerűen λx-et írunk, és a jelölésben nem teszünk különbséget a 0 szám és a $\underline{0}$ vektor között.

1. példa: Az $n \times m$-es valós mátrixok valós lineáris teret alkotnak. (A mátrixokat elemenként adjuk össze, és elemenként szorozzuk meg a valós számokkal.) Az $n \times m$-es komplex elemű mátrixok komplex lineáris teret alkotnak. □

2. példa: Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Egy $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény **tartója** az $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ halmaz lezárása, amit $\mathrm{supp}(f)$-fel fogunk jelölni. $C_0(\Omega)$ a kompakt tartójú folytonos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvények tere. Ez lineáris tér. Ha $f, g \in C_0(\Omega)$, akkor $f + g$ folytonos, és $\mathrm{supp}(f + g) \subset \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$. Mivel $\mathrm{supp}(f)$ és $\mathrm{supp}(g)$ kompakt, az egyesítésük is az, ezért $\mathrm{supp}(f + g)$ is kompakt. $\lambda f \in C_0(\Omega)$ nyilvánvaló, ugyanis, ha $\lambda \neq 0$, akkor $\mathrm{supp}(\lambda f) = \mathrm{supp}(f)$. □

Legyen V egy lineáris tér, és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$. A $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ alakú vektorokat az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorok **lineáris kombinációjának** nevezzük. A V lineáris tér **véges dimenziós**, ha van véges sok vektora, amelynek lineáris kombinációjaként a tér bármely vektora előáll. A fenti mátrixos példa véges dimenziós.[2] Jelölje E_{ij} azt az $n \times m$-es mátrixot, amelynek i-edik sora j-edik eleme 1 és mindenütt másutt 0 áll. Az $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ **mátrixegységek** lineáris kombinációjaként minden mátrix előáll. A mátrixok tere tehát véges dimenziós. Nem véges dimenziós valós vektorteret alkotnak a valós számsorozatok vagy a $[0, 1]$ intervallumon folytonosan differenciálható valós függvények.

Egy lineáris tér olyan részhalmaza, amely elemeinek lineáris kombinációit is tartalmazza, maga is lineáris tér. Az eredeti tér **alterének** nevezzük.

3. példa: $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvények lineáris terében alteret alkotnak például a folytonosan differenciálható függvények vagy a polinomok. Nem alkotnak alteret a monoton növő folytonos függvények. □

A V lineáris tér H részhalmaza **lineárisan független**, ha H 0-tól különböző $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektoraira a

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$$

összefüggés csak a $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ esetben áll fenn. Egy végtelen H vektorhalmaz pontosan akkor lineárisan független, ha minden véges részhalmaza is az.

4. példa: Az $x, x^2, x^3, \ldots$ függvények lineárisan függetlenek az $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvények lineáris terében. Valóban, legyen $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ egész számok növő sorozata és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 0-tól különböző számok. Ekkor

$$\lambda_1 x^{n_1} + \lambda_2 x^{n_2} + \ldots + \lambda_k x^{n_k}$$

egy polinom, amelynek csak véges sok gyöke lehet $[0, 1]$-ben, és így nem lehet azonosan 0. □

Az olyan lineárisan független vektorrendszert, amelynek véges lineáris kombinációjaként a vektortér bármely eleme előáll, **bázisnak** nevezzük. Azt is mondhatjuk, hogy a bázis olyan vektorrendszer, amelynek véges lineáris kombinációjaként a vektortér bármely eleme egyértelműen áll elő. Egy vektortér két különböző bázisa ugyanolyan elemszámú. Ez a szám a vektortérre jellemző mennyiség, a tér **dimenziójának** nevezzük.

5. példa: A valós számhármasok $\mathbb{R}^3$ terében az $(1,0,0),(0,1,0)$ és $(0,0,1)$ vektorok bázist alkotnak, $\mathbb{R}^3$ háromdimenziós. □

6. példa: Az $n \times m$-es $\{E_{ij} : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ mátrixegységek lineárisan függetlenek az $n \times m$-es mátrixok terében, és bázist alkotnak. A tér tehát nm dimenziós. □

Ha adott a V vektortérben egy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bázis, akkor minden vektor egyértelműen áll elő $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots \lambda_n e_n$ alakban, és így egy $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ szám n-essel jellemezhető. (A számok valósak vagy komplexek aszerint, hogy V valós vagy komplex tér.)

Legyen $V_1, V_2, \ldots, V_k$ a V lineáris tér altere. Azt mondjuk, hogy V ezeknek az altereknek a **direkt összege**, ha V bármely v vektora egyértelműen áll elő $v_1 + v_2 + \ldots + v_k$ alakban úgy, hogy $v_i \in V_i$, $1 \le i \le k$. Ebben az esetben a $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \ldots \dotplus V_k$ jelölést használjuk.

7. példa: Tegyük fel, hogy V a V_1 és V_2 alterek direkt összege. Ekkor véve V_1-ben egy tetszőleges $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ bázist és V_2-ben egy tetszőleges $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ bázist, az $e_1, e_2, \ldots, e_k, f_1, f_2, \ldots, f_m$ vektorok V bázisát adják. □

Legyen V_1 és V_2 két lineáris tér ugyanarra a skalár testre vonatkozóan, azaz mindkettő komplex vagy mindkettő valós. Az $A : V_1 \to V_2$ leképezést **lineárisnak** nevezzük, ha

$$A(x+y) = Ax + Ay \quad \text{és} \quad A(\lambda x) = \lambda Ax$$

minden $x, y \in V_1$ és minden λ skalár esetén. Komplex lineáris terek között a

$$B(x+y) = Bx + By \quad \text{és} \quad B(\lambda x) = \overline{\lambda} Bx$$

tulajdonságokkal rendelkező B leképezést **konjugált lineáris** transzformációnak nevezzük. A konjugált lineáris transzformációk ritkábban fordulnak elő, mint a lineárisak. Sok lineáris transzformációkra megfogalmazott kijelentés konjugált lineáris transzformációkra is igaz.

8. példa: Legyen a V valós lineáris tér bázisa $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Értelmezzünk egy $A : V \to \mathbb{R}^n$ leképezést a

$$Vx = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n), \quad \text{ha} \quad x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots \lambda_n e_n$$

képlettel. Ekkor A egy lineáris leképezés, amely koordinátázza a V vektorteret. □

Legyen Az $A : V_1 \to V_2$ egy lineáris leképezés. Ennek $\operatorname{Ker} A := \{v_1 \in V_1 : Av_1 = 0\}$ **magtere** V_1, $\operatorname{Rng} A := \{Av_1 : v_1 \in V_1\}$ **képtere** V_2 lineáris altere. Ha $\operatorname{Rng} A$ véges dimenziós, akkor A-t **véges rangúnak** nevezzük. Ha V_1 vagy V_2 véges dimenziós, akkor A véges rangú. A képterének dimenziója A **rangja**.

9. példa: Legyen $V = V_1 + V_2$. Értelmezhetünk egy $A \in L(V)$ lineáris leképezést a következőképpen. Ha $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$ és $v_2 \in V_2$, akkor legyen $Av := v_1$. Ekkor A képtere V_1, magtere V_2. Ezt az A transzformációt a V_1 altérre való és a V_2 altérrel párhuzamos irányú **vetítésnek** mondhatjuk. □

10. példa: Az $n \times n$-es komplex mátrixok lináris terén értelmezzünk egy Tr leképezést, amely egy mátrixhoz a diagonálisában lévő elemek összegét rendeli. Ez egy lináris leképezés, ami számértékű, és **mátrixnyomnak** nevezik. A számértékű lineáris leképezéseket gyakran **lineáris funkcionálnak** hívják. □

Lineáris leképezések kompozíciója is lineáris. A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezések halmazát $L(V_1, V_2)$-vel fogjuk jelölni. Az $L(V_1, V_2)$ halmaz maga is lineáris tér a megfelelő műveletekkel. Ha $A_1, A_2 \in L(V_1, V_2)$, akkor $A_1 + A_2$-t az $(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x$ képlettel értelmezzük, és λA_1 értelmezése is hasonlóan nyilvánvaló: $\lambda A_1(x) = A_1(\lambda x)$.

Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a V_1 tér bázisa és $f_1, f_2, \ldots, f_m$ a V_2 tér bázisa. Ekkor az $A : V_1 \to V_2$ lineáris transzformációt meghatározzák az $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_m$ vektorok. Ezeknek a V_2 tér adott bázisa szerint kifejthetők:

$$Ae_j = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \ldots + a_{mj}f_m.$$

Az a_{ij} számokat téglalap alakú táblázatba írva kapjuk az A transzformáció mátrixát. a_{ij} az $m \times n$-es mátrix i-edik sorának j-edik eleme. A mátrix j-edik oszlopában az e_j bázisvektor képének koordinátái állnak. Ha $v \in V_1$ koordinátái $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ és Av koordinátái $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$, akkor ezeket a számokat függőlegesen érdemes elrendezni. Így a mátrix szorzás szabálya érvényesül:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}$$

(a_{ij}) az A lineáris transzformációnak az adott bázisokra vonatkozó **mátrixa**. Ez a mátrix tehát a bázisoktól is függ, ugyanannak a transzformációnak más bázisokban különböző mátrixa van.

11. példa: Legyen A a 9. példa lineáris leképezése. Ha a V_1 altérben választunk egy $e_1, e_2, \ldots, e_k$ bázist és a V_2 altérben egy $f_1, f_2, \ldots, f_m$ bázist, akkor a V tér

$e_1, e_2, \ldots, e_k, f_1, f_2, \ldots, f_m$ bázisában A mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

ahol a $(k+m) \times (k+m)$ méretű mátrix főátlójában k darab 1-es és m darab 0 van.
□

Ha V komplex vektortér, akkor lineáris funkcionáljainak $L(V, \mathbb{C})$ terét V **duálisának** nevezzük, és V^*-gal jelöljük. Valós lineáris tér duálisa a valós lineáris funkcionálok tere. Ha $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a V vektortér bázisa, akkor a V^* duálisban van egy természetes bázis:

$$e_k^*(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n) := \lambda_k \qquad (1 \leq k \leq n)\,. \tag{1.1.1}$$

Ennek neve **duális bázis**. A véges dimenziós vektortér és duálisa között így egy, az adott bázistól függő, izomorfia van.

12. példa: Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a V_1 vektortér, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ a V_2 vektortér bázisa és $A \in L(V_1, V_2)$. Ekkor a duális bázis segítségével az A transzformáció $[A_{ij}]$ mátrixának elemei

$$A_{ij} = f_i^*(Ae_j)$$

alakban adhatók meg. □

Ha $A \in L(V_1, V_2)$, akkor az

$$(A^t v_2^*)v_1 = v_2^*(Av_1) \qquad (v_1 \in V_1,\ v_2^* \in V_2^*)$$

képlet egy $A^t \in L(V_2^*, V_1^*)$ lineáris transzformációt határoz meg. Ezt A **(algebrai) dualitásának** nevezzük. A^t mátrixa a duális bázisokban A mátrixának **transzponáltja**, azaz $[A^t]$ i-edik sorának j-edik eleme $[A]$ j-edik sorának i-edik eleme.

1.2. Tenzorszorzatok

A V_1 és a V_2 vektorterek **algebrai tenzorszorzata** $\sum_{i,j} x_i \otimes y_j$ alakú formális véges összegekből áll, $x_i \in V_1$, $y_j \in V_2$. Az ilyen összegekkel a

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \quad (\lambda x) \otimes y = \lambda(x \otimes y)\,, \\ y \otimes (x_1 + x_2) &= y \otimes x_1 + y \otimes x_2, \quad x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

számolási szabályok figyelembevételével lehet számolni.

A $V_1 \otimes V_2$ tenzorszorzattér $x \otimes y$ elemi tenzora egy $V_2^* \to V_1$ lineáris leképezésnek is felfogható:

$$(x \otimes y)(v_2^*) = v_2^*(y)x. \tag{1.2.3}$$

Ezzel az azonosítással az (1.2.2) számolási szabályok automatikusan teljesülnek. Amennyiben V_1 és V_2 véges dimenziósak, akkor $V_1 \otimes V_2$ izomorf az $L(V_2^*, V_1)$ térrel. Ha $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ V_1-nek a bázisa és $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ V_2 bázisa, akkor $\{e_i \otimes f_j : 1 \le i \le n,\ 1 \le m \le j\}$ a $V_1 \otimes V_2$ tér bázisa. Látható, hogy a tenzorszorzatban a dimenziók összeszorzódnak.

13. példa: Az $x \otimes y$ elemi tenzort (1.2.3) szerint egy $V_2^* \to V_1$ lineáris transzformációként fogjuk fel. Mi lesz ennek a mátrixa, ha V_2^*-on a duális $\{f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*\}$ bázist és V_1-en a $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bázist tekintjük?

Legyen először $x = e_i$ és $y = f_j$. Ekkor

$$(e_i \otimes f_j)f_k^* = f_k^*(f_j)e_i = \delta(j,k)e_i\,,$$

és megállapíthatjuk, hogy $e_i \otimes f_j$ mátrixa éppen az E_{ij} mátrix egység. Ebből már levezethető $x \otimes y$ x-ben és y-ban való linearitása alapján, hogy amennyiben x koordinátái $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ és y koordinátái $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, úgy $x \otimes y$ mátrixa

$$\begin{bmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \dots & \lambda_1\mu_m \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \dots & \lambda_2\mu_m \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda_n\mu_1 & \lambda_n\mu_2 & \dots & \lambda_n\mu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]\,. \tag{1.2.4}$$

(Itt az egyenlőség jobb oldalán egy „oszlopmátrixnak” és egy „sormátrixnak” a mátrixszorzata áll. Az ebben az alakban előálló mátrixot **diádnak** is szokták nevezni.) □

Lineáris **transzformációk tenzorszorzata** is értelmezhető. Ha $A : V_1 \to W_1$ és $B : V_2 \to W_2$ lineáris leképezések, akkor egyértelműen létezik egy olyan $A \otimes B : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ lineáris transzformáció, amelyre

$$(A \otimes B)(v_1 \otimes v_2) = Av_1 \otimes Bv_2 \qquad (v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2).$$

14. példa: Legyen V_1 bázisa $\{e_1, e_2, e_3\}$ és V_2 bázisa $\{f_1, f_2\}$. Ha az $A \in L(V_1)$ transzformáció mátrixa $[A_{ij}]$ és a $B \in L(V_2)$ transzformáció mátrixa $[B_{kl}]$, akkor

$$(A \otimes B)(e_j \otimes f_l) = \sum_{i,k} A_{ij}B_{kl}e_i \otimes f_k\,.$$

Rendezzük a szorzatbázist lexikografikusan, azaz $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, e_3 \otimes$

$f_1, e_3 \otimes f_2$. Ilyen elrendezés esetén $A \otimes B$ mátrixa

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} & A_{13}B_{11} & A_{13}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} & A_{13}B_{21} & A_{13}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} & A_{23}B_{11} & A_{23}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} & A_{23}B_{21} & A_{23}B_{22} \\ A_{31}B_{11} & A_{31}B_{12} & A_{32}B_{11} & A_{32}B_{12} & A_{33}B_{11} & A_{33}B_{12} \\ A_{31}B_{21} & A_{31}B_{22} & A_{32}B_{21} & A_{32}B_{22} & A_{33}B_{21} & A_{33}B_{22} \end{bmatrix}.$$

□

A kéttényezős tenzorszorzathoz hasonlóan értelmezhető a $V_1, V_2, \dots, V_k$ lineáris terek $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ tenzorszorzata. A $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k$ elemi tenzorokat most célszerűbb multilineáris funkcionáloknak tekinteni.

Ha $W_1, W_2, \dots, W_k$ lineáris terek, akkor **multilineáris funkcionálon** olyan

$$F : W_1 \times W_2 \times \dots \times W_k \to \mathbb{C}$$

függvényt értünk, amely rendelkezik az

$$\begin{aligned} &F(w_1, \dots, \alpha w_\ell + \beta w'_\ell, w_{\ell+1}, \dots, w_k) = \\ &\quad = \alpha F(w_1, \dots, w_\ell, w_{\ell+1}, \dots, w_k) + \beta F(w_1, \dots, w'_\ell, w_{\ell+1}, \dots, w_k) \end{aligned}$$

tulajdonsággal. A $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ elemi tenzor olyan $F : V_1^* \times \dots \times V_k^* \to \mathbb{C}$ multilineáris funkcionál, amelyre

$$F(w_1^*, w_2^*, \dots, w_k^*) = \prod_{i=1}^{k} w_i^*(v_i) \qquad (w_\ell^* \in V_\ell^*, 1 \le \ell \le k).$$

Ha a $V_1, V_2, \dots, V_k$ tényezők azonosak, és mindegyik V, akkor a $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ tenzorszorzatot V k-adik **tenzorhatványának** nevezzük, jelben $V^{\otimes k}$. Ha V dimenziója n, akkor $V^{\otimes k}$ dimenziója n^k. Ha $A \in L(V)$, akkor az $A^{(1)} \otimes A^{(2)} \dots \otimes A^{(k)}$ lineáris transzformációra a $A^{\otimes k}$ jelölést használjuk.

$V^{\otimes k}$-nak két fontos altere van, a **szimmetrikus** és az **antiszimmetrikus altér**. A $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ vektorok **antiszimmetrikus tenzorszorzata** a

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k := \frac{1}{\sqrt{k!}} \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} v_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(2)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(k)} \tag{1.2.5}$$

lineáris kombináció, amiben az összegzés az $\{1, 2, \dots, k\}$ számok valamennyi permutációjára történik, és $\sigma(\pi)$ jelöli a σ permutáció paritását. ($\sigma(\pi) = 0$, ha π-ben az inverziók száma páros, és $\sigma(\pi) = 1$, ha ugyanez a szám páratlan.) Az antiszimmetrikus elnevezés abból a tulajdonságból ered, hogy $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ előjelet vált, ha v_i-t és v_j-t felcseréljük ($1 \le i < j \le k$). Ebből az is következik, hogy $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = 0$, ha a v_i-k között két azonos van.

Az elemi tenzorok (1.2.2) tulajdonságából adódik, hogy az antiszimmetrikus elemi tenzorokra is hasonló számolási szabályok érvényesek. Nevezetesen

$$\lambda(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k) = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{\ell-1} \wedge (\lambda v_\ell) \wedge v_{\ell+1} \wedge \ldots \wedge v_k$$

és

$$\begin{aligned}(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{\ell-1} \wedge v \wedge v_{\ell+1} \wedge \ldots \wedge v_k) &+ \\ + (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{\ell-1} \wedge v' \wedge v_{\ell+1} \wedge \ldots \wedge v_k) &= \\ = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{\ell-1} \wedge (v + v') \wedge v_{\ell+1} \wedge \ldots \wedge v_k &.\end{aligned}$$

A $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$ vektorok által kifeszített alteret a V tér n-edik **antiszimmetrikus tenzorhatványának** nevezzük, jele $\wedge^k V$. Tehát $\wedge^k V \subset \otimes^k V$. $A \in L(V)$-re az $\otimes^k A$ transzformáció a $\wedge^k V$ alteret önmagába viszi, erre az altérre való megszorítását $\wedge^k A$-val jelöljük. A $\wedge^k A$ transzformáció ekvivalens módon a

$$\wedge^k A(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k) = Av_1 \wedge Av_2 \wedge \ldots \wedge Av_k \tag{1.2.6}$$

formulával is megadható.

Amennyiben adott V-nek egy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bázisa, $\wedge^k V$-ben is megadható egy megfelelő bázis. Az

$$\{e_{i(1)} \wedge e_{i(2)} \wedge \ldots \wedge e_{i(k)} \ : \ 1 \leq i(1) < i(2) < \ldots < i(k)) \leq n\} \tag{1.2.7}$$

vektorrendszer $\wedge^k V$ bázisa. Ennek megfelelően $\wedge^k V$ dimenziója

$$\binom{n}{k} \quad \text{ha} \quad k \leq n,$$

egyébként $k > n$-re $\wedge^k V$ nulla dimenziós. Tehát $\wedge^n V$ egydimenziós, és egy $A \in L(V)$ lineáris transzformációra $\wedge^n A$ az egydimenziós tér identikus transzformációjának valamilyen számszorosa. Ezt a számot A **determinánsának** nevezzük, jelben $\det A$. Mivel

$$\wedge^k(AB) = (\wedge^k A)(\wedge^k B)$$

a definíció alapján, nyomban megkaptuk a determinánsra vonatkozó szorzástételt:

1. tétel: *Egy véges dimenziós V vektortér A és B lineáris transzformációra*

$$\det(AB) = \det A \times \det B\,.$$

érvényes.

15. példa: Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a V vektortér bázisa, és A olyan lineáris transzformáció, amely a bázisvektorokat kettő kivételével helyben hagyja, a kettőt pedig felcseréli egymással. Az általánosság megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy $Ae_1 = e_2$ és $Ae_2 = e_1$. Ekkor

$$\wedge^n A(e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n) = e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge \ldots \wedge e_n = -e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n\,.$$

Tehát A determinánsa -1. □

Most megmutatjuk, hogy egy lineáris transzformáció determinánsa ugyanaz, mint valamely bázisban vett mátrixának a lineáris algebrából jól ismert determinánsa.

2. tétel: *Legyen az $A \in L(V)$ lineáris transzformáció mátrixa az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bázisban $[a_{ij}]_n$. Ekkor*

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \ldots a_{\pi(n),n} \,,$$

ahol az összegzés az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok összes π permutációjára történik, és $\sigma(\pi)$ a π permutáció paritása.

Bizonyítás: A $\wedge^n V$ térben $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$ egyelemű bázis, és $(\wedge^n A)(e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n)$-et kell kiszámolnunk.

$$\begin{aligned}
(\wedge^n A)(e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n) &= (Ae_1) \wedge (Ae_2) \wedge \ldots \wedge (Ae_n) = \\
&= \Big(\sum_{i(1)=1}^{n} a_{i(1),1} e_{i(1)}\Big) \wedge \Big(\sum_{i(2)=1}^{n} a_{i(2),2} e_{i(2)}\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{i(n)=1}^{n} a_{i(n),n} e_{i(n),n}\Big) = \\
&= \sum_{i(1),i(2),\ldots,i(n)=1}^{n} a_{i(1),1} a_{i(2),2} \ldots a_{i(n),n} e_{i(1)} \wedge \ldots \wedge e_{i(n)} = \\
&= \sum_{\pi} a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \ldots a_{\pi(n),n} e_{\pi(1)} \wedge \ldots \wedge e_{\pi(n)} = \\
&= \sum_{\pi} a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \ldots a_{\pi(n),n} (-1)^{\sigma(\pi)} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \,.
\end{aligned}$$

(Az egyes lépéseknél rendre a következő tényeket használtuk: a transzformáció mátrixának definíciója, az antiszimmetrikus tenzor multilinearitása, $e_{i(1)} \wedge \ldots \wedge e_{i(n)} = 0$, ha az indexek között van két azonos és végül egy permutáció paritása az őt megvalósító transzpozíciók számának paritása.) □

16. példa: Egy $n \times n$-es $[A]$ mátrixot alsó (illetve felső) háromszögmátrixnak nevezzük, ha $A_{ij} = 0$, ha $j > i$ (illetve $j < i$). Egy alsó (illetve felső) háromszögmátrixnak a determinánsa a diagonálisában álló elemek szorzata. Valóban, a kifejtési tételben kizárólag az identikus permutációhoz tartozó tag nem 0. □

A $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ vektorok **szimmetrikus tenzorszorzata** a

$$v_1 \vee v_2 \vee \ldots \vee v_k := \frac{1}{\sqrt{k!}} \sum_{\pi} v_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\pi(k)}$$

lineáris kombináció. (Az összegzés most is az $\{1, 2, \ldots, k\}$ számok összes π permutációjára történik.) A szimmetrikus tenzorszorzatuk által kifeszített altér a $\vee^k V$ k-adik **szimmetrikus tenzorhatvány**. Ebben is konstruálunk bázist.

$$\{e_{i(1)} \vee e_{i(2)} \vee \ldots \vee e_{i(k)} \;:\; 1 \le i(1) \le i(2) \le \ldots \le i(k) \le n\} \tag{1.2.8}$$

a $\vee^k V$ tér bázisa. A bázis n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációival adható meg, tehát elemszáma, a tér dimenziója

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

1.3. Mátrixok és sajátértékeik

Egy lineáris transzformáció hatását akkor könnyű megérteni, ha mátrixában sok 0 elem van. Ezért olyan bázist igyekszünk találni, amiben ez a tulajdonság minél inkább megvalósul.

17. példa: Az $e \in V$ vektort az $A \in L(V)$ lineáris transzformáció **ciklikus vektorának** nevezzük, ha az $e, Ae, A^2e, \ldots, A^{n-1}e$ vektorok a V tér bázisát alkotják. Ha e ciklikus vektor, akkor az $e, Ae, \ldots, A^{n-1}e$ bázisban A mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \mu_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \mu_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.3.9}$$

alakot ölt. Ezt az A ciklikus transzformáció kanonikus mátrixának nevezzük. □

A ciklikus transzformációk jelentősége abban van, hogy $A \in L(V)$ esetén találhatók olyan $V_1, V_2, \ldots, V_k$ alterek, hogy ezeket A önmagába viszi, $A|V_i$ ciklikus és V a V_i alterek direkt összege.

Legyen a V_1, V_2 és V_3 vektorterek bázisa rendre $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ és $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$. Ha $A_1 : V_2 \to V_3$ és $A_2 : V_1 \to V_2$ lineáris transzformációk, akkor $A_1 \circ A_2$ kompozíciójuk is az, és $A_1 \circ A_2$ a V_1 teret V_3-ba képezi. Legyen A_1 mátrixa $[a_{ij}]$ és A_2 mátrixa $[b_{kl}]$. Ekkor

$$A_2 e_j = \sum_{u=1}^{k} b_{uj} f_u \quad \text{és} \quad A_1 f_j = \sum_{v=1}^{m} a_{vj} g_v \,.$$

Ebből

$$\begin{aligned} (A_1 \circ A_2) e_j &= A_1 \sum_{u=1}^{k} b_{uj} f_u = \sum_{u=1}^{k} b_{uj} A_1 f_u = \\ &= \sum_{u=1}^{k} b_{uj} \sum_{v=1}^{m} a_{vu} g_v = \\ &= \sum_{v=1}^{m} \Big(\sum_{u=1}^{k} a_{vu} b_{uj} \Big) g_v \,, \end{aligned}$$

ezért $A_1 \circ A_2$ mátrixában az i-edik sor j-edik eleme $\sum_{u=1}^{k} a_{iu} b_{uj}$, ami nem más, mint az $[a_{ij}][b_{kl}]$ mátrixszorzatban ugyanez az elem. Megállapíthatjuk, hogy lineáris transzformációk kompozíciójának mátrixa az egyes mátrixok szorzata. Ez az a tény, ami a lineáris transzformációk elméletének és a mátrixszámításnak a kapcsolatát meghatározza.

18. példa: Legyen a V lineáris tér bázisa $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ és $A \in L(V)$ lineáris transzformáció. Ekkor A-nak van egy $[a_{ij}]$ mátrixa az adott bázisra vonatkozóan. Hogyan változik meg ez a mátrix, ha áttérünk egy másik, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ bázisra? Egyértelműen létezik egy olyan S transzformáció, amely e_i-t f_i-be viszi, $1 \leq i \leq n$. Ez invertálható, és $S^{-1} f_i = e_i$, $1 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned} Af_j = ASe_j &= \sum_{i=1}^{n} [AS]_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} [AS]_{ij} \Big(\sum_{l=1}^{n} [S^{-1}]_{li} f_l \Big) = \\ &= \sum_{l=1}^{n} \Big(\sum [S^{-1}]_{li} [AS]_{ij} \Big) f_l = \\ &= \sum_{l=1}^{n} [S^{-1} AS]_{lj} f_l \,. \end{aligned}$$

Tehát A mátrixa az $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ bázisban $[S]^{-1}[A][S]$ alakú, ahol $[A]$ jelöli A mátrixát az $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bázisban, és $[S]$ a **bázistranszformáció mátrixa** (ugyanebben a bázisban). □

3. tétel: *Az $A \in L(V)$ lineáris transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha* $\det A \neq 0$.

Bizonyítás: Ha A invertálható, akkor létezik egy olyan B lineáris transzformáció, amelyre $AB = \mathrm{id}$. A determinánsra vonatkozó szorzástétel szerint $\det A \times \det B = \det \mathrm{id} = 1$, és ekkor $\det A \neq 0$ teljesül.

Ha A nem invertálható, akkor van a térben egy olyan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bázis, hogy $Ae_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i Ae_i$. Számoljuk ki $\det A$-t ebben a bázisban.

$$Ae_1 \wedge Ae_2 \wedge \ldots \wedge Ae_n = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i Ae_i \wedge Ae_2 \wedge \ldots \wedge Ae_n = 0,$$

ugyanis minden tag külön-külön is 0 az ismétlődés miatt. Ezért $\det A = 0$. □

Egy mátrix inverzét az algebrai adjungáltja segítségével is kiszámolhatjuk. Az $[A]$ mátrix $[A]^{\mathrm{Adj}}$ **algebrai adjungáltjának** ij eleme $(-1)^{i+j}$ szorozva az j-edik sor i-edik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsával.

4. tétel:

$$[A]^{-1} = \frac{[A]^{\mathrm{Adj}}}{\det[A]} \,.$$

Az inverz mátrix ilyen módon való meghatározása számolási szempontból nehézkes, a sok determináns kiszámolása nagyon sok művelet végrehajtását igényli.

Legyen $A \in L(V)$. Ha valamely μ skalárra és $0 \neq x \in V$ vektorra $Ax = \mu x$, akkor μ-t az A transzformáció **sajátértékének** és x-t a μ-höz tartozó **sajátvektornak** nevezzük. Ha μ sajátérték, akkor $A - \mu \cdot \mathrm{id}$ transzformáció nem invertálható, hiszen $(A - \mu \cdot \mathrm{id})(x) = 0$ és $x \neq 0$. Ilyenkor $\det(A - \mu \cdot \mathrm{id}) = 0$. Ha λ-t határozatlannak tekintjük, akkor $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{id})$ a λ-nak n-edfokú polinomja, A **karakterisztikus polinomjának** nevezzük. Az imént megmutattuk, hogy minden sajátérték a karakterisztikus polinom gyöke. Megfordítva, ha μ a karakterisztikus polinom gyöke, akkor $A - \mu \cdot \mathrm{id}$ determinánsa 0, tehát $A - \mu \cdot \mathrm{id}$ nem invertálható. Ezért van olyan $x \neq 0$ vektor, amelyre $(A - \mu \cdot \mathrm{id})x = 0$. Ez az x vektor tehát a μ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

Mivel komplex együtthatós polinomoknak mindig van gyökük, a fenti gondolatmenetből következik:

5. tétel: *Véges dimenziós komplex lineáris tér transzformációjának van legalább egy sajátvektora.*

Többet nem is lehet mondani. Az alábbi mátrixnak egyetlen sajátvektora van.

19. példa: Az

$$[A] = \begin{bmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{1.3.10}$$

mátrixnak az $(1,0,0,0)$ vektor sajátvektora μ sajátértékkel. Ugyanekkor az $e_1 = (0,0,0,1)$ vektor képe $e_2 = (0,0,1,\mu)$, ennek képe $e_3 = (0,1,2\mu,\mu^2)$, ennek képe $e_4 = (1,3\mu,3\mu^2,\mu^3)$. Az e_1, e_2, e_3, e_n vektorok lineárisan függetlenek, tehát bázist alkotnak. Ebben a bázisban az A transzformáció mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mu^4 \\ 1 & 0 & 0 & 4\mu^3 \\ 0 & 1 & 0 & -6\mu^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4\mu \end{bmatrix}.$$

e_1 tehát a transzformáció ciklikus vektora. □

1. lemma: *Ha A és B invertálható lineáris transzformációk, akkor AB és BA sajátértékei megegyeznek.*

Bizonyítás: Az

$$AB - \lambda \cdot I = A(BA - \lambda \cdot I)A^{-1}$$

azonosságból látható, hogy $AB - \lambda \cdot I$ akkor és csak akkor invertálható, ha $BA - \lambda \cdot I$ invertálható. Mivel AB sajátértékei azok a λ számok amelyekre $AB - \lambda \cdot I$ nem invertálható, ebből az állítás nyomban következik. □

A (1.3.10) mátrixot **Jordan-blokknak** nevezzük. Általánosabban egy $n \times n$-es mátrix Jordan-blokk, ha diagonálisában ugyanazok a számok állnak, a diagonális feletti ferde sorban csupa 1-es és a többi elem 0. A következő tétel a **Jordan-féle normálalakról** szól.

6. tétel: *Véges dimenziós komplex vektortér $A \in L(V)$ transzformációjához létezik a térnek olyan $V_1 + \cdots + V_k$ direktösszeg-felbontása, hogy A a V_i altereket invariánsan hagyja, és $A \mid V_i$ mátrixa V_i alkalmas bázisában Jordan-blokk.*

Egy lineáris transzformáció Jordan-blokkokra bontása, azaz az előző tételben garantált bázisnak a megkeresése a lineáris algebra egyik alapvető problémája. Valós terek, illetve valós mátrixok esetében más a helyzet. Például a

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs (valós) sajátértéke, ezért sem diagonális alakban, sem Jordan-blokként nem írható fel. Valós mátrixok **Jordan-féle normálakja** némileg különböző.

Az $n \times n$-es $[A]$ komplex elemű mátrixot **önadjungáltnak** nevezzük, ha $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$ $(1 \le i, j \le n)$. (Valós elemű mátrixokat inkább **szimmetrikusnak** szoktuk hívni, ha önadjungáltak.)

7. tétel: *Önadjungált mátrixhoz van a térnek olyan bázisa, amelyben a mátrix diagonális, és a diagonálisban valós számok állnak.*

A tételt úgy is kimondhattuk volna, hogy egy $n \times n$-es önadjungált mátrixnak létezik n darab lineárisan független sajátvektora, és sajátértékei valósak.

A mátrixok őstörténetéhez tartozik az $n \times n$-es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

úgynevezett tridiagonális szimmetrikus mátrix. Ennek sajátértékeit **Lagrange** számolta ki 1759-ben. Azt találta, hogy a sajátértékek $2 \cos j\pi/(n+1)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

20. példa: Egy mátrix önadjungált volta nem bázisfüggetlen tulajdonság. Például

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a diagonális $\mathrm{Diag}(2, 1)$ mátrix alkalmas bázisban nem szimmetrikus. □

Ha $[A]$ egy $n \times n$-es komplex elemű mátrix, akkor tartozik hozzá a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplex változóknak egy **kvadratikus alaknak** nevezett

$$q(z_1, z_2, \ldots, z_n) := \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \overline{z}_i z_j \tag{1.3.11}$$

függvénye. Ha az $[A]$ mátrix önadjungált, akkor

$$q(z_1, z_2, \dots, z_n) = \overline{q(z_1, z_2, \dots, z_n)}\,,$$

tehát q csak valós értékeket vesz fel. Az önadjungált mátrix diagonalizálására vonatkozó 7. tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy létezik a $z_1, z_2, \dots, z_n$ változóknak olyan lineáris

$$z_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j$$

transzformáltja, hogy

$$q(z_1, \dots, z_n) = \sum \lambda_i \overline{z}_i' z_i'\,, \tag{1.3.12}$$

valamilyen valós λ_i számokkal. Ezt a tényt úgy szokták kifejezni, hogy a kvadratikus alak **főtengelyre transzformálható**. A λ_i számok csak pozitív szorzótól és sorrendtől eltekintve meghatározottak, azaz egyértemű, hogy közöttük hány pozitív és hány negatív van. (Ez a a Sylvester-féle **tehetetlenségi törvény**.)

Az $[A]$ mátrixot **pozitív szemidefinitnek** nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak csak nemnegatív értékeket vesz fel.

Az $n \times m$-es $[B]$ mátrix **adjungáltja** az a $m \times n$-es mátrix, amelynek ij eleme $\overline{B_{ji}}$. $[B]$ adjungáltját $[B]^*$-gal jelöljük. Egy $[A]$ mátrix tehát önadjungált, ha megegyezik az adjungáltjával. A definíció alapján ellenőrizhető, hogy

$$\big([A][B]\big)^* = [B]^*[A]^*\,, \tag{1.3.13}$$

ha $[A]$ és $[B]$ olyan méretű mátrixok, hogy az $[A][B]$ mátrixszorzat értelmes.

21. példa: Ha $[A] = [B]^*[B]$, akkor A pozitív szemidefinit. Valóban,

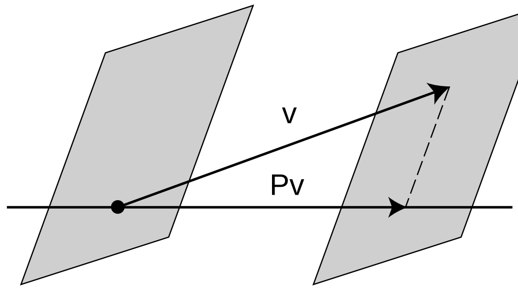
$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\overline{z}_i z_j &= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \overline{B_{ki}} B_{kj} \overline{z}_i z_j = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\overline{\textstyle\sum_{i=1}^{n} B_{ki} z_i} \textstyle\sum_{j=1}^{n} B_{kj} z_j \right), \end{aligned}$$

ami pozitív számok összege. □

1.4. Euklideszi terek transzformációi

Ebben a részben valós euklideszi terek bizonyos lineáris transzformációit nézzük meg részletesebben. (A komplex euklideszi terek jól beleillenek a 3. fejezetbe, ahol Hilbert-terekről lesz szó.)

22. példa: Az altérre való vetítéssel már megismerkedtünk a 9. példában. Az ábrán az $\mathbb{R}^3$ tér egy vetítését szemléltejük. (Egy dimenziós altérre történik a vetítés egy adott síkkal párhuzamos irányba.) □



Ferde vetítés $\mathbb{R}^3$-ban: A vízszintesen látható egydimenziós altérre történik a vetítés az árnyékolt két dimenziós altérrel párhuzamos irányban. A v vektor képe Pv

$\mathbb{R}^3$ a valós számhármasok három dimenziós vektortere, amin a lineáris struktúra mellett más is van. Az (x_1, x_2, x_3) vektor hossza

$$\|x\| = \sqrt{x_1^1 + x_2^2 + x_3^2},$$

és az (x_1, x_2, x_3), valamint (y_1, y_2, y_3) vektorok skaláris szorzata

$$\sum x_i y_i =: \langle x, y\rangle .$$

A skaláris szorzat lehetőséget ad két vektor által bezárt szög meghatározására is:

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} .$$

23. példa: $\mathbb{R}^3$ olyan lineáris transzformációival akarunk foglalkozni, amelyek hosszúságtartók, azaz $\|Ox\| = \|x\|$ $(x \in \mathbb{R}^3)$. Mivel

$$4\langle x, y\rangle = \langle x + y, x + y\rangle - \langle x - y, x - y\rangle$$

az ilyen O transzformáció skaláris szorzat tartó, és egyben szögtartó is. Ha $[O_{ij}]$ a transzformáció mátrixa a standard $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ortogonális bázisban, akkor a szögtartásból

$$\sum_{i=1}^{3} O_{ij} O_{ik} = \delta(j, k) \qquad (i \le j \le k)\,. \tag{1.4.14}$$

Megállapíthatjuk, hogy $[O]$ inverze a transzponáltja, ezért O determinánsa ± 1. Mivel

$$O - E = -(O - E)^t O\,,$$

det $(O - E) = 0$, ha det $O = 1$. Ebben az esetben $\lambda = 1$ sajátértéke O-nak és van egy hozzá tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor, f_3. Legyen f_1 és f_2 olyan egységvektorok, hogy f_1, f_2, f_3 páronként merőlegesek. Írjuk fel O mátrixát az f_1, f_2, f_3 bázisban:

$$\begin{aligned} Of_1 &= \alpha_1 f_1 + \beta_1 f_2\,, \\ Of_2 &= \alpha_2 f_1 + \beta_2 f_2\,, \\ Of_3 &= f_3\,. \end{aligned}$$

A (1.4.14) relációkból $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$ és $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$. Ezeknek az egyenleteknek csak egy megoldása van: $\alpha_1 = \beta_2 = \cos\theta$ és $\beta_1 = -\alpha_2 = \sin\theta$ $(0 \le \theta < 2\pi)$. Tehát O mátrixa

$$[O] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.4.15}$$

Némi elemi geometriával megállapíthatjuk, hogy az O traszformáció nem más, mint az f_3 tengely körüli θ szögű forgatás (az óramutató járásával ellenkezőleg).

Az 1 determinánsú ortogonális transzformációk tehát a forgatások. Csoportot alkotnak mert ilyen transzformációk kompozíciója és inverze is ilyen. A forgatások csoportjára $SO(3)$ a megszokott jelölés, az összes ortogonális transzformációra pedig $O(3)$. Egy síkra való tükrözés -1 determinánsú ortogonális transzformáció. □

A skaláris szorzat, a vektor hossza és a vektorok szögének a fogalma a háromdimenziós euklideszi térről $\mathbb{R}^n$-re is kiterjeszthető. $\mathbb{R}^n$ hosszúságtartó lineáris transzformációit is ortogonálisnak nevezzük, csoportjuk $O(n)$. Az egy determinánsúak részcsoportja $SO(n)$. A fenti háromdimenziós meggondoláshoz hasonlóan egy ortogonális transzformáció inverze a transzponáltja.

Az $\mathbb{R}^{2n+1}$ tér 1 determinánsú ortogonális transzformációinak mátrixa (1.4.15)-hez hasonló, de n darab

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$$

alakú blokk van a diagonális mentén alkalmas bázisban. Páros dimenzióban a jobb alsó sarokban álló 1-es hiányzik.

$\mathbb{R}^n$ egy bázisát **ortonormált bázisnak** nevezzük, ha páronként merőleges egy hosszúságú vektorokból áll. Azt is lehetne mondani, hogy egy bázis ortonormált, ha a standard bázisból ortogonális transzformációval lehet megkapni. Ebből következik, hogy ha egy mátrix a standard bázisban szimmetrikus, akkor minden ortonormált bázisban is szimmetrikus lesz.

1.5. Blokkmátrixok

A **blokkmátrix** (vagy **hipermátrix**) olyan mátrixot jelent, amelynek az elemei maguk is mátrixok.[3] Legyen a V lineáris tér a V_1 és V_2 alterek direktösszege,

$V = V_1 \dot{+} V_2$. Ekkor az $A \in L(V)$ lineáris transzformáció egy $A_1 \in L(V_1, V)$ és $A_2 \in L(V_2, V)$ transzformációval adható meg.

$$A(v_1 + v_2) = A_1 v_1 + A_2 v_2 \qquad (v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2)\,.$$

A_1 megadható az $A_{11} \in L(V_1, V_1)$ és az $A_{21} \in L(V_1, V_2)$ transzformációkkal:

$$A_1 v_1 = A_{11} v_1 + A_{21} v_1 \qquad (v_1 \in V_1)\,.$$

Hasonlóan

$$A_2 v_2 = A_{12} v_2 + A_{22} v_2 \qquad (v_2 \in V_2)\,.$$

Ha V_1-ben választunk egy $e_1, e_2, \ldots, e_k$, V_2-ben egy $f_1, f_2, \ldots, f_m$ bázist, akkor A $(m+k) \times (m+k)$-as mátrixát négy részre particionálhatjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{1,1} & \ldots & A_{1,k} & A_{1,k+1} & \ldots & A_{1,k+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \ldots & A_{kk} & A_{k,k+1} & \ldots & A_{k,k+m} \\ \hline A_{k+1,1} & \ldots & A_{k+1,k} & A_{k+1,k+1} & \ldots & A_{k+1,k+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k+m,1} & \ldots & A_{k+m,k} & A_{k+m,k+1} & \ldots & A_{k+m,k+m} \end{array}\right].$$

A bal felső sarokban az $A_{11} \in L(V_1, V_1)$ transzformáció mátrixa, a jobb felsőben $A_{12} \in L(V_2, V_1)$ mátrixa, a bal alsó sarokban $A_{21} \in L(V_1, V_2)$ mátrixa, a jobb alsó sarokban $A_{22} \in L(V_2, V_2)$ mátrixa áll. Blokkmátrix írásmóddal A mátrixát

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix}$$

alakban írhatjuk. Itt a négy mátrix lehet különböző méretű, de $[A_{11}]$ és $[A_{22}]$ négyzetes mátrixok. Az egyszerűség kedvéért itt és a továbbiakban többnyire 2×2-es blokkmátrixokra szorítkozunk, de nagyobb mátrixok ugyanezen az elvi alapon tárgyalhatók.

24. példa: A 14. példa $A \otimes B$ transzformációjának mátrixa a blokkmátrix írásmóddal

$$\begin{bmatrix} A_{11}[B] & A_{12}[B] & A_{13}[B] \\ A_{21}[B] & A_{22}[B] & A_{23}[B] \end{bmatrix}$$

alakot ölt. □

Blokkmátrixokkal szinte úgy számolhatunk, mint a szokásos mátrixokkal. Legyen

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

olyan blokkmátrixok, hogy A és A', valamint D és D' azonos méretű négyzetes mátrixok. Ekkor a két blokkmátrix szorzata a

$$\begin{bmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{bmatrix}$$

blokkmátrix. Ezt könnyű ellenőrizni a közönséges mátrixok szorzásszabálya alapján. A blokkmátrixokkal való számolásban arra kell ügyelni, hogy a fenti példa vesszős és vesszőtlen mátrixainak sorrendje a szorzáskor lényeges, ugyanis a mátrix szorzás nem kommutatív művelet.

A mátrix adjungálás értelmezéséből nyomban következik, hogy

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix}. \tag{1.5.16}$$

8. tétel: *Ha az*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

blokkmátrixban a (négyzetes) A mátrix invertálható, akkor

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix}.$$

A bizonyítás egyszerűen beszorzás segítségével végezhető el. A faktorizálásnak egy másik változata is van. Ha D-t tételezzük fel invertálhatónak, akkor

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & BD^{-1} \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ D^{-1}C & E \end{bmatrix}.$$

A faktorizációból további következtetéseket is levonhatunk. Ha az adott blokkmátrix invertálható, akkor az $A, D - CA^{-1}B, D, A - BD^{-1}C$ mátrixok egyaránt invertálhatók. Sőt, a blokkmátrix determinánsa

$$\det A \times \det(D - CA^{-1}B) = \det D \times \det(A - BD^{-1}C). \tag{1.5.17}$$

9. tétel: *Ha A invertálható négyzetes mátrix, akkor a*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix}$$

négyzetes blokkmátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha A, D és $A - BD^{-1}B^*$ mátrixok pozitív szemidefinitek.

25. példa: Megmutatjuk, hogy egy invertálható pozitív szemidefinit mátrix egyértelműen írható fel T^*T alakban, ha megköveteljük, hogy T olyan alsó háromszögmátrix, amelynek diagonálisában pozitív számok állnak.

A bizonyítás az adott mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval történik. 1×1-es mátrixokra az állítás nyilvánvaló. Az indukciós lépés végrehajtásához particionáljuk az adott $(n+1) \times (n+1)$-es X mátrixot

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix}$$

alakban, ahol A $n\times n$-es mátrix. Ugyanakkor T-t hasonlóan particionált formában keressük

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},$$

ahol T_{11} $n\times n$-es alsó háromszög mátrix pozitív diagonálissal és T_{22} egy pozitív szám. Az $X = T^*T$ egyenlőség az

$$\begin{aligned} A &= T_{11}^*T_{11} + T_{21}^*T_{21}\,, \\ B &= T_{21}^*T_{22}\,, \\ D &= T_{22}^*T_{22} \end{aligned}$$

egyenletekkel egyenértékű. A tétel szerint D pozitív szám, így $T_{22} \geq 0$ csak $\sqrt{D}$ lehet. Ekkor a második egyenletből $T_{21} = B^*/T_{22}$. Az első egyenlet behelyettesítve

$$A - BB^*/D = T_{11}^*T_{11}$$

alakot ölt. A tétel szerint $A - BD^{-1}B^*$ pozitív szemidefinit, de invertálható is. Így alkalmazhatjuk rá az indukciós feltevést, és egyértelműen írhatjuk $T_{12}^*T_{21}$ alakban egy pozitív diagonálisú alsó háromszög mátrix segítségével. □

1.6. Gyakorlófeladatok

1. Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ térben egy egyenes pontjai?
2. Alteret alkotnak-e a mátrixok terében a pozitív definit mátrixok?
3. Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R}$-en értelmezett $x \mapsto e^{tx}$ $(t \in \mathbb{R})$ függvények lineárisan függetlenek!
4. Bizonyítsa be, hogy $C(\Omega)$ végtelen dimenziós vektortér, ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz!
5. Adja meg a (1.3.9) mátrix utolsó oszlopában álló elemeket a karakterisztikus polinom együtthatóival!
6. Magyarázza meg, hogy miért teljesül $[A]^{-1} = [A^{-1}]$!
7.^{M} Igazolja, hogy egy alsó háromszög mátrix determinánsa a diagonálisban álló elemek szorzata!
8. Igazolja a definíció alapján, hogy egy pozitív szemidefinit mátrix sajátértékei és diagonális elemei nemnegatívak!
9. Mutasson példát olyan (komplex elemű) pozitív szemidefinit mátrixra, amelynek transzponáltja nem pozitív szemidefinit!
10.^{M} Igazolja, hogy ha A pozitív szemidefinit, akkor XAX^* is az tetszőleges (nem feltétlenül négyzetes) X mátrixra!

11.[M] Milyen négyzetes A mátrixra lesz az

$$\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$$

blokkmátrix pozitív szemidefinit?

12. Mutassa meg, hogy a véges dimenziós komplex vektortér minden lineáris transzformációja felírható egy diagonizálható és egy vele felcserélhető nilpotens transzformáció összegeként!

13. Írjuk fel a következő (ún. Dirac-féle) mátrixokat tenzorszorzat formájában!

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

14.[M] Írjuk fel $\mathbb{R}^3$-ban az xy síkra való és az $(1,1,1)$ vektorral párhuzamos irányú vetítés mátrixát!

15. Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^3$ minden ortogonális transzformációja egy tükrözés és egy forgatás egymás utáni végrehajtásával áll elő?

16. Mutassuk meg, hogy ha az $[A]$ valós mátrixra $[A]^t[A] = 0$, akkor $[A] = 0$! ($[A]^t$ a transzponáltat jelöli.)

17. Jelölje $[A, B]$ az A és B transzformációk kommutátorát, azaz $[A, B] = AB - BA$! Mutassuk meg, hogy

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [B, A]] = 0\,!$$

18. Mutassuk meg, hogy az

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [B] = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokra $[A][B] = [E]$! ($[E]$ az egységmátrix.)

19.[M] Legyen

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-1}\binom{j-1}{i-1} & i < j\,, \\ (-1)^{j-1} & i = j\,, \\ 0 & i > j\,. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az $[A] = [a_{ij}]$ mátrixra $[A]^2 = [E]$!

20. Igazolja n szerinti teljes indukcióval, hogy $\mathbb{R}^n$ ortogonális transzformációinak mátrixa a szövegben leírt alakra hozható!

21.[M] Legyen $[A]$, $[B]$ és $[C]$ pozitív szemidefinit mátrixok! Mutassuk meg, hogy ha $[C]$ invertálható, és

$$\det\,(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0$$

valamilyen λ komplex számra, akkor λ valós része negatív vagy 0!

22.[M] Legyen A és B invertálható lineáris transzformációk! Határozzuk meg a $\det\,(A + tB)$ polinomban t együtthatóját!

2. Normált terek

Ha egy lineáris tér vektorainak meg van adva a hossza, akkor az algebrai struktúra mellett lehetőség van egy **topológiai struktúra** bevezetésére. Topológia alatt egyszerűen **konvergenciát** érthetünk. Az x_n vektorsorozat tart az x vektorhoz, ha az $x - x_n$ vektorok hossza tart a nullához. Az algebrai műveletek és a konvergencia együtt alkotják a lineáris analízis legegyszerűbb, de talán éppen ezért igen gazdag struktúráját. A normált tér a XX. század elején kialakult absztrakció. [4]

2.1. Nevezetes normált terek

Egy lineáris teret **normált térnek** nevezünk, ha a tér minden vektorának meg van adva a hossza. Legyen V egy lineáris tér, és tételezzük fel, hogy adott egy $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ leképezés a következő tulajdonságokkal

(1) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad (x, y \in V)$,

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \qquad (x \in V,\ \lambda$ skalár),

(3) $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$.

Ekkor $\|\cdot\|$-t **normának** nevezzük és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $\|x\|$-t az x vektor hosszaként értelmezzük.[5] Amennyiben $V = \mathbb{R}^n$ és

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,,$$

akkor az n dimenziós vektorok szokásos hossza egy norma. A $\|\cdot\|_2$ jelölést azért használjuk, mert más normák is lehetségesek. Például

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}\,.$$

Ha egy funkcionál csak a norma (1) és (2) tulajdonságaival rendelkezik, akkor **félnormának** nevezzük.

1. példa: Legyen $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos (valós vagy komplex értékű) függvények vektortere, és legyen

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : \ a \le x \le b\}\,.$$

Egyszerűen megmutatható, hogy ez valóban normát értelmez:

$$|(f+g)(x)| \le |f(x)| + |g(x)|,$$

és ezért

$$\sup\{|(f+g)(x)|\} \le \sup\{|f(x)|\} + \sup\{|g(x)|\}. \qquad \square$$

Ha $C[a,b]$-t a továbbiakban normált térként említjük, akkor mindig erre a szuprémum normára gondolunk. Ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy az $[a,b]$-n valós értékű függvényeket tekintünk, akkor $C[a,b]$ helyett $C_{\mathbb{R}}[a,b]$-t fogunk írni.

2. példa: Az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett f függvényt **gyorsan csökkenőnek** nevezzük, ha

$$(1+\|x\|_2^2)^m |f(x)| \to 0, \qquad \text{amint} \qquad \|x\|_2 \to \infty \tag{2.1.1}$$

bármilyen m egészre. (A feltétel azt jelenti, hogy f az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók bármilyen polinomjával megszorozva is 0-hoz tart a végtelenben.) A gyorsan csökkenő folytonos függvények terét $C_{00}(\mathbb{R}^n)$-nel jelöljük. Ha $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ és $m \in \mathbb{N}$, akkor legyen

$$p_{m,0}(f) := \max\{(1+\|x\|_2^2)^m |f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2.1.2}$$

$p_{m,0}$ rendelkezik a norma (1)–(3) tulajdonságaival.

Ha $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ nemnegatív egészek n-ese és $|\beta| := \sum_{i=1}^n \beta_i$, akkor használni fogjuk a

$$D^\beta f = \frac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial^{\beta_1} x_1 \ldots \partial^{\beta_n} x_n}$$

jelölést. Az

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C_{00}(\mathbb{R}^n) \,:\, D^\beta f \in C_{00}(\mathbb{R}^n) \text{ minden } \beta\text{–ra}\} \tag{2.1.3}$$

lineáris teret **Schwartz-térnek** nevezzük.

Ha az $\exp(-\sum_{i=1}^n x_i^2)$ függvényt megszorozzuk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bármilyen polinomjával, akkor a Schwartz-tér egy eleméhez jutunk.

Legyen

$$p_{m,r}(f) := \max\{p_{m,0}(D^\beta f) : |\beta| \le r\}.$$

A gyorsan csökkenő sima függvények terén ez norma minden $m, r \in \mathbb{N}$ választásra. (A Schwartz-térről a multinormált terek részben részletesebben lesz szó.)

Általában, ha $p_1, \ldots, p_k$ normák egy lineáris téren, akkor az összegük és a maximumuk ugyancsak norma. $\square$

Vannak esetek, amikor a norma tulajdonságainak ellenőrzése kevésbé egyszerű. Némi előkészítés után $\mathbb{R}^n$-en bevezetjük a $\|\cdot\|_p$ p-normát, $1 \le p < \infty$. ($\mathbb{R}^n$ 2-normája és ∞-normája fent már szerepelt.)

1. lemma: *Ha* $1 < p, q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *és* $a, b \ge 0$, *akkor*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \square$$

A lemmában szereplő p és q számokat egymás **konjugáltjainak** nevezzük. Érdemes a $p = 1$ és $p = \infty$ eseteket is megengedni. Ekkor rendre $q = \infty$ és $q = 1$. (A lemmát nem bizonyítjuk, de a fejezetvégi 25. gyakorlat útmutatást tartalmaz a bizonyításhoz.)

1. tétel: (Hölder-egyenlőtlenség) *Ha* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *és* $1 \le p, q \le \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *akkor*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right]^{1/q}.$$

Bizonyítás: Legyen

$$N := \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} \quad \text{és} \quad M := \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right]^{1/q}.$$

Alkalmazzuk a megelőző lemmát az $a = |x_i|/N$ és $b = |y_i|/M$ választással. Ekkor

$$\frac{|x_i y_i|}{NM} \le \frac{|x_i|^p}{pN^p} + \frac{|y_i|^q}{qM^q}.$$

Ezután összegezzünk i-re:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{NM} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{pN^p} + \frac{|y_i|^q}{qM^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ez maga a bizonyítandó egyenlőtlenség. □

2. tétel: (Minkowski-egyenlőtlenség) *Ha* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *és* $1 \le p$, *akkor*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right]^{1/p}.$$

Bizonyítás: A $p = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $p > 1$, és induljunk ki a

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1}|a| + (|a| + |b|)^{p-1}|b|$$

azonosságból. Használjuk fel ezt:

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|y_i|.$$

Most alkalmazzuk mindkét tagra a Hölder-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p &\le \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{1/q} \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} + \\ &+ \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{1/q} \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right]^{1/p}, \end{aligned}$$

ugyanis $(p-1)q = p$. Elosztva mindkét oldalt a $\left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{1/q}$ kifejezéssel, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right]^{1/p}$$

$(1 - 1/q = 1/p)$. Ez majdnem a bizonyítandó. Mivel

$$\left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{1/p},$$

a Minkowski-egyenlőtlenség következik. $\square$

Legyen

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p := \left[|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right]^{1/p}. \tag{2.1.4}$$

A Minkowski-egyenlőtlenség biztosítja, hogy így akár $\mathbb{R}^n$, akár $\mathbb{C}^n$ normált térré válik, $1 \le p$. (A $\|\cdot\|_\infty$ normát már értelmeztük más módon.)

3. példa: A Minkowski-egyenlőtlenséget az $n \to \infty$ határátmenettel végtelen sorozatokra is kiterjeszthetjük. Legyen ℓ^p azoknak a végtelen (x_n) sorozatoknak a halmaza, amelyekre $\sum_n |x_n|^p$ véges. ℓ^p a

$$\|x\|_p := \left[\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right]^{1/p} \tag{2.1.5}$$

normával normált tér lesz, $1 \le p < \infty$.

ℓ^∞ a korlátos sorozatok tere az

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x_n|\}$$

normával. $\square$

Az $(X, \|\cdot\|)$ normált térben

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

egy távolságot értelmez, amellyel x metrikus térré válik. Ha adott a metrika, akkor beszélhetünk **konvergens** sorozatokról. $x_n \to x$ jelentése $d(x_n, x) \to 0$. A $G \subset X$ **nyílt halmaz**, ha minden $x \in G$ esetén létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$G(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \subset G\,.$$

A bal oldalon álló halmazt x középpontú ε sugarú (nyílt) gömbnek nevezzük. (Amennyiben $\mathbb{R}^3$-at a $\|\cdot\|_2$ normával tekintjük, akkor ez a halmaz a szokásos geometriai értelemben vett gömb, azonban a $\|\cdot\|_\infty$ normát véve x középpontú kockához jutunk.) Az $F \subset X$ **zárt**, ha $x_n \in F$ és $x_n \to x$ esetén $x \in F$. Egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha komplementuma zárt.

4. példa: A korlátos sorozatok ℓ^∞ terében egy c_0 zárt alteret alkotnak a nullához tartó sorozatok. □

5. példa: A $\mathbb{R}^n$ térben a konvergencia egyszerűen koordinátánkénti konvergenciát jelent bármelyik p-normát tekintjük. A konvergens sorozatok és a nyílt halmazok különböző p-normákra ugyanazok. □

Ha az X lineáris téren olyan $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák vannak adva, amelyekre nézve a nyílt halmazok ugyanazok, akkor a két normát (topologikusan) **ekvivalensnek** nevezzük. Az előző példa az $\mathbb{R}^n$ téren mutatott ekvivalens normákat. Megmutatható, hogy véges dimenziós téren bármely két norma ekvivalens.

6. példa: Legyen $C^1[0,1]$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható valós függvények tere. Legyen továbbá

$$\begin{aligned}\|f\|_1 : &= \sup\{|f(x)| : 0 \le x \le 1\} + \sup\{|f'(x)| : 0 \le x \le 1\},\\ \|f\|_2 : &= |f(0)| + \sup\{|f'(x)| : 0 \le x \le 1\}.\end{aligned}$$

Ekkor $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_1$. Ha egy halmaz nyílt $\|\cdot\|_2$-re, akkor bármely pontja körül lehet írni egy valamilyen ε sugarú $\|\cdot\|_2$-gömböt, ami tartalmazza az ugyanilyen sugarú $\|\cdot\|_1$-gömböt. Következésképpen a választott $\|\cdot\|_2$-re nyílt halmaz $\|\cdot\|_1$-re nézve is nyílt.

Másrészt a középértéktétel szerint $f(x) = f(0) + f'(\xi)$, és ezért $\sup\{|f(x)| : 0 \le x \le 1\} \le |f(0)| + \sup\{|f'(x)| : 0 \le x \le 1\}$. Tehát $\|\cdot\|_1 \le 2\|\cdot\|_2$. Ez az egyenlőtlenség elég ahhoz, hogy a fenti gondolatmenetet kis változtatással megismételjük. Ha egy halmaz nyílt $\|\cdot\|_1$-re, akkor bármely pontja körül lehet írni egy valamilyen ε sugarú $\|\cdot\|_1$-gömböt, ami tartalmazza a fele ekkora sugarú $\|\cdot\|_2$-gömböt. A halmaz $\|\cdot\|_2$-re nézve is nyílt. □

Az $F : X \to Y$ leképezést az $x \in X$ pontban **folytonosnak** nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, amelyre $F(G(x,\delta)) \subset G(F(x),\varepsilon)$. Ez azzal ekvivalens, hogy $x_n \to x$ maga után vonja $F(x_n) \to F(x)$-et.

7. példa: Ha n négyzetszám, akkor az $n = m^2$ koordinátáját egy vektornak $m \times m$-es mátrix formájában is elrendezhetjük. A mátrixok $M_n(\mathbb{R})$ lineáris terén is értelmezhetünk egy 2-normát:

$$\|A\|_2 := \Big[\sum_{i,j=1}^{m} |A_{ij}|^2\Big]^{1/2}. \tag{2.1.6}$$

Az a lineáris $F : \mathbb{R}^{m^2} \to M_n(\mathbb{R})$ leképezés, amely a hosszú vektorból feltördeléssel mátrixot készít kölcsönösen egyértelmű, és megtartja a 2-normát. □

A normatartó leképezéseket **izometriának** nevezzük. Minden izometria folytonos.

3. tétel: *Legyen* $(X_1, \|\cdot\|_1)$ *és* $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *két normált tér és* $A : X_1 \to X_2$ *egy lineáris leképezés. Ekkor a következő két tulajdonság ekvivalens:*

(1) A folytonos

(2) Létezik olyan $C > 0$ *szám, amelyre* $\|Ax\|_2 \le C\|x\|_1$ *minden* $x \in X_1$ *esetén.*

Bizonyítás: (1) $\Rightarrow$ (2) : $G_2 = \{x_2 \in X_2 : \|x_2\| < 1\}$ nyílt halmaz X_2-ben és $A0 = 0 \in G_2$. Van olyan nyílt G_1 halmaz a folytonosság miatt, amelyre $0 \in G_1$ és $AG_1 \subset G_2$. Mivel G_1 nyílt, létezik $\varepsilon > 0$, amelyre

$$G_1' = \{x_1 \in X_1 : \|x_1\| < \varepsilon\} \subset G_1\,.$$

Ekkor tetszőleges $x \in X_1$ esetén $\dfrac{\varepsilon}{2\|x\|_1}x \in G_1'$ és

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2\|x\|_1}x\right) \in G_2,$$

azaz

$$\left\|A\left(\frac{\varepsilon}{2\|x\|_1}x\right)\right\|_2 < 1\,.$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in X_1$ esetén

$$\|Ax\|_2 \le \frac{2}{\varepsilon}\|x\|_1$$

teljesül.

(2) $\Rightarrow$ (1) igazolását az olvasóra bízzuk. □

A folytonos $X_1 \to X_2$ lineáris leképezések terét $B(X_1, X_2)$-vel jelöljük. $B(X_1, X_2)$ lineáris tér, de normált tér is. Ha $A \in B(X_1, X_2)$, akkor

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_2 : x \in X_1, \|x\|_1 \le 1\} \tag{2.1.7}$$

az előző tétel jelöléseivel. $\|A\|$ nem más, mint a 3. tétel (2) részében megjelenő lehetséges C számok legkisebbike. Ha X normált tér, akkor $B(X, X)$ helyett röviden $B(X)$-et írunk. $B(X)$-nek nemcsak lineáris, hanem **gyűrű struktúrája** is van, azaz elemeit az összeadás mellett szorozni is lehet: Ha $A, B \in B(X)$, akkor AB az ebben a sorrendben vett kompozíció. Az (2.1.7) **operátornormának** megvan a

$$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\| \tag{2.1.8}$$

szubmultiplikatív tulajdonsága.

8. példa: Legyen g folytonos függvény $[a, b]$-n, és segítségével megadunk egy $F : C[a, b] \to \mathbb{R}$ funkcionált az

$$F(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

képlettel. F az integrál linearitása miatt lineáris. Meg akarjuk mutatni, hogy F folytonos, és ehhez egy olyan $C > 0$ számot kell találnunk, amelyre

$$|F(f)| \le C \sup\{|f(x)| : a \le x \le b\}\,.$$

A következőképpen becslünk:

$$\begin{aligned}
|F(f)| &= \left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \\
&\le \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \\
&\le \int_a^b \sup\{|f(x)| : a \le x \le b\}\,|g(x)|\,dx = \\
&= \int_a^b |g(x)|\,dx\ \sup\{|f(x)| : a \le x \le b\}\,.
\end{aligned}$$

Az F funkcionál tehát folytonos, azaz korlátos, és $\|F\| \le \int_a^b |g(x)|\,dx$.

Az $\|F\|$ pontos értékét könnyen megkaphatjuk, ha például g egy polinom. Ekkor

$$f_0(x) = \operatorname{sign} g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad g(x) > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad g(x) = 0, \\ -1, & \text{ha} \quad g(x) < 0 \end{cases}$$

egyszerű szerkezetű. A g gyökei $[a, b]$-t véges sok részre osztják, és azokon f_0 felváltva ± 1 értékeket vesz fel. Mivel $f_0(x)g(x) = |g(x)|$,

$$\int_a^b f_0(x)g(x)\,dx = \int_a^b |g(x)|\,dx\,.$$

f_0 nem folytonos, ezért folytonos függvénnyel közelítjük, például úgy, hogy g gyökeinek $1/n$ sugarú környezetében változtatjuk meg, ott g-t egy lineáris függvénnyel helyettesítjük, és f_n-et kapjuk. Ekkor $\|f_n\| = 1$ és

$$\left|\int_a^b f_n(x)g(x) - \int_a^b f_0(x)g(x)\right| \le \frac{2N}{n}M\,,$$

ahol N g gyökeinek száma és M $|g(x)|$ felső korlátja. Ezért

$$\left|\int_a^b f_n(x)g(x)\right| \ge \int_a^b |g(x)|\,dx - \frac{2N}{n}M\,,$$

n tetszőleges nagy lehet, tehát

$$\sup\left\{\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| : \|f\| = 1\right\} \ge \int_a^b |g(x)|\,dx\,,$$

és $\|F\| = \int_a^b |g(x)|\,dx$. (Ha g tetszőleges folytonos függvény, akkor Weierstrass approximációs tételét használva polinomokkal közelítve ugyanerre az eredményre jutunk.) $\square$

Ha X egy valós normált tér, akkor a $B(X, \mathbb{R})$ normált teret, ha komplex normált tér, akkor a $B(X, \mathbb{C})$ normált teret X **duális** terének mondjuk, és az X^* jelölést használjuk. Az előző példa tehát azt mondta, hogy $F \in C[a, b]^*$.

Lineáris transzformációkat nemlineáris leképezések differenciálásával is kaphatunk. Legyen X és Y normált tér, $G \subset X$ nyílt halmaz és $f : G \to Y$ a normált terek közötti leképezés. Azt mondjuk, hogy f **Frechet-értelemben differenciálható** az $x \in G$ pontban, ha létezik olyan $A : X \to Y$ folytonos lineáris transzformáció, amelyre

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} \to 0\,,$$

ha $\|h\| \to 0$. Az A transzformációra a $df(x)$ vagy $f'(x)$ jelölést használjuk, és **Frechet-deriváltnak**, esetleg **Frechet-differenciálnak** mondjuk.

Az ismerős

$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + o(\|h\|) \tag{2.1.9}$$

képlet a Frechet-derivált más formában írt definíciója, benne $o(\|h\|)$ olyan mennyiséget jelent, amely $\|h\|$-val osztva 0-hoz tart. Egyébként a (2.1.9) képlet megmutatja, hogy ha f differenciálható az x pontban, akkor ott folytonos is. Ugyanis $\|df(x)(h)\| \le \|df(x)\| \cdot \|h\|$ minden h vektorra, és tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra $\|o(\|h\|)\| \le \varepsilon\|h\|$, ha $\|h\|$ elég kicsi.

A $df(x)$ Frechet-derivált az f leképezés lokálisan legjobb lineáris közelítéseként fogható fel. Ebből az értelmezésből éppen úgy, mint a (2.1.9) képletből világos, hogy korlátos lineáris transzformáció Frechet-deriváltja önmaga.

9. példa: Tekintsük az $n \times n$-es mátrixok $M_n(\mathbb{R})$ lineáris terét az operátor normával ellátva. Legyen $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ a harmadik hatványra emelés, azaz $f(T) = T^3$. Megmutatjuk, hogy f Frechet-deriváltja a T helyen $A : H \mapsto T^2H + THT + HT^2$, azaz $df(T)(H) = T^2H + THT + HT^2$. Ennek igazolására a

$$\frac{\|f(T+H) - f(T) - AH\|}{\|H\|} = \frac{\|H^3 + H^2T + HTH + TH^2\|}{\|H\|}$$

határértékét kell vizsgálni. Felülről becsülhetünk a norma szubmultiplikativitását használva.

$$\frac{\|H^3 + H^2T + HTH + TH^2\|}{\|H\|} \le \frac{\|H\|^3 + 3\|H\|^2\,\|T\|}{\|H\|} = 3\|H\|\,\|T\| + \|H\|^2,$$

ami 0-hoz tart, ha $\|H\| \to 0$.

Ha nem az operátornormát, hanem például az (2.1.6) képlettel adott $\|\cdot\|_2$ normát használjuk, akkor is ugyanez a Frechet-derivált, mert léteznek olyan C_1 és C_2 számok, amelyekre $\|T\|_2 \le C_1\|T\|_1 \le C_2\|T\|_2$. $\square$

A Frechet-deriváltra teljesül a láncszabály:

4. tétel: *Legyen X_1, X_2, X_3 normált tér. Ha $g : X_1 \to X_2$ Frechet-differenciálható az $x \in X_1$ pontban és $f : X_2 \to X_3$ Frechet-differenciálható az $y := g(x)$ pontban, akkor $\Phi := f \circ g$ Frechet-differenciálható az x pontban, és*

$$\Phi'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x). \qquad \Box$$

Legyen ismét X és Y normált tér, $G \subset X$ nyílt halmaz és $f : G \to Y$ a normált terek közötti leképezés. Azt mondjuk, hogy f **Gateaux-értelemben differenciálható** az $x \in G$ pontban, ha létezik olyan $A : X \to Y$ folytonos lineáris transzformáció, amelyre

$$\frac{\|f(x+th) - f(x) - A(th)\|}{t} \to 0\,,$$

ha $t \to 0$. (t valós vagy komplex szám, annak megfelelően, hogy X és Y milyen normált terek.) Az A transzformációt **Gateaux-deriváltnak** vagy **Gateaux-differenciálnak** mondjuk, és Ah-ra a $df(x,h)$ jelölést használjuk.

$$f(x+th) = f(x) + tdf(x,h) + o(t) \tag{2.1.10}$$

a Gateaux-differenciál ekvivalens definiciója. A Gateaux-értelemben differenciálható kétváltozós függvény nem feltétlenül folytonos. Ugyanakkor a definíciók összevetése mutatja, hogy Frechet-differenciálható leképezés Gateaux-differenciálható is, és a Gateaux-derivált megegyezik a Frechet-deriválttal. (Valóban, ha (2.1.9)-ben h helyébe th-t teszünk, akkor egy $\|h\|$ faktortól eltekintve (2.1.10)-ot kapjuk.)

A Gateaux- és Frechet-differenciálok kapcsolatát jól megvilágítja a következő példa.

10. példa: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény. Ha f az $x \in \mathbb{R}^2$ pontban bármilyen irányban differenciálható, és

$$\frac{\partial f(x+th)}{\partial t} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} h_2,$$

akkor f Gateaux-differenciálható, $df(x,h) = h_1 \partial_{x_1} f + h_2 \partial_{x_2} f$. Például, ha

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_2 = x_1^2 > 0 \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

akkor $df(0,h) = 0$, bár f nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

Ha általánosabban $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik az x_0 pontban, akkor ismeretes, hogy iránymenti deriváltjai léteznek, és

$$\frac{\partial f(x_0 + th)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i\,,$$

tehát

$$df(x_0,h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i=\Big\langle\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\Big),h\Big\rangle.$$

A középértéktétel szerint van egy $0\le\xi_h\le 1$, amelyre

$$f(x_0+h)-f(x)=df(x_0+\xi_h h,h).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}f(x_0+h)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i&=\\=\Big\langle\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0+\xi_h h)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0+\xi_h h)-\\-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0+\xi_h h)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\Big),h\Big\rangle,\end{aligned}$$

ami 0-hoz tart $\|h\|$-val osztva a parciális deriváltak folytonossága mellett. Ilyenkor f Frechet-differenciálható, és

$$df(x_0)(h)=\Big\langle\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\Big),h\Big\rangle.$$ □

2.2. Banach-terek

Legyen (x_n) egy sorozat valamilyen normált térben. **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon>0$-ra van egy N küszöbindex, amelyre $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$, ha $n,m\ge N$. Egy normált teret **Banach-térnek** nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozatnak létezik határértéke.

11. példa: $C[a,b]$ a szokásos szuprémum normával Banach-tér. Tételezzük fel ugyanis, hogy f_n Cauchy-sorozat. Ekkor bármilyen $a\le x\le b$ esetén

$$|f_n(x)-f_m(x)|\le\|f_n-f_m\|,$$

és $f_n(x)$ szintén Cauchy-féle számsorozat. Létezik határértéke, amit $f(x)$-szel jelölünk. Megmutatjuk, hogy $\sup|f(x)-f_n(x)|$ tart 0-hoz.

$$|f(x)-f_n(x)|\le|f(x)-f_{m(x)}(x)|+|f_{m(x)}(x)-f_n(x)|$$

nyilvánvalóan. Az x-től függő $m(x)$-et olyan nagynak választjuk, hogy az első tag a jobb oldalon ε-nál kisebb legyen. A második tag viszont x-ben egyenletesen kicsi, ha n és $m(x)$ elég nagy. Tehát f_n tart f-hez egyenletesen, és ebből kapjuk azt, hogy f is folytonos függvény. □

Stefan Banach (1892–1945)

Stefan Banach a mai Lvovban dolgozott. Könyve a lineáris operátorokról 1932-ben jelent meg. Ez a könyv tartalmazta a zárt gráf tételt, az egyenletes korlátosság tételét, a gyenge topológiát és sok mást. A teljes normált terek elmélete olyan sikeresnek bizonyult, hogy hamarosan Banach-tereknek nevezték őket.

5. tétel: *Legyen* $(X_1, \|\cdot\|_1)$ *egy normált tér és* $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *egy Banach-tér. Ekkor* $B(X_1, X_2)$ *az operátor normával ellátva Banach-tér.*

Bizonyítás: A bizonyítás követi az előző példa gondolatmenetét. Tételezzük fel, hogy $A_n \in B(X_1, X_2)$ egy Cauchy-sorozat. Ekkor

$$\|A_n x - A_m x\|_2 \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_1$$

minden $x \in X_1$ esetén, tehát $A_n x$ Cauchy-sorozat az X_2 térben. Mivel az teljes, létezik egy Ax határértéke. Az $x \mapsto Ax$ hozzárendelésről meg kell mutatni, hogy lineáris, majd $\|A_n - A\| \to 0$ bizonyítása megint az előző példát követi. □

2. lemma: *Legyen* X *egy Banach-tér és* $x_1, x_2, \ldots \in X$. *Ha* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, *akkor az* $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ *sorozat konvergens.*

Bizonyítás: A $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < +\infty$ feltételből következik, hogy $\sum_{n=1}^{m}\|x_n\|$ Cauchy-féle számsorozat. Ha $k > m$, akkor

$$\|s_k - s_m\| = \|x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_k\| \leq \sum_{i=m+1}^{k}\|x_i\|,$$

és a becslés mutatja, hogy s_m Cauchy-sorozat, ezért konvergens. □

A $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sort **abszolút konvergensnek nevezzük**, ha $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ konvergens. Az előző lemma azt mondja, hogy Banach-térben abszolút konvergens sor konvergens.

12. példa: Legyen X egy Banach-tér és $A \in B(X)$. A

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

sor abszolút konvergens a $B(X)$ Banach-térben, ugyanis

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}.$$

A sor összegét $\exp(A)$-val jelöljük. Ehhez hasonlóan értelmezhetjük hatványsorral $f(A)$-t, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a teljes számegyenesen konvergens hatványsorba fejthető (úgynevezett analitikus) függvény. Például a $\sin A$ és $\cos A$ operátorok hatványsorral értelmezhetők, és érvényben marad a komplex számok köréből jól ismert

$$\exp(\mathrm{i}\,A) = \cos A + \mathrm{i}\,\sin A$$

összefüggés, ha X komplex normált tér. □

13. példa: Legyen E egy Banach-tér és $A : E \to E$ korlátos lineáris operátor. A

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Au(t)\,, \qquad t \geq 0 \\ u(0) &= u_0 \in E \end{aligned}$$

kezdeti érték probléma explicit megoldását könnyű megadni:

$$u(t) = e^{tA}u_0\,.$$

Világos, hogy $u(0) = u_0$ teljesül. $u(t)$ differenciálását először $t = 0$-ban hajthatjuk végre.

$$\frac{e^{tA}u_0 - u_0}{t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{k!}A^k u_0 = Au_0 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{k!}A^k u_0\,.$$

Továbbá

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{k!}A^k u_0\right\| &\le \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|t|^{k-1}}{k!}\|A\|^k\,\|u_0\|\le\\ &\le |t|\,\|A\|^2\,\|u_0\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}\|A\|^k=\\ &= |t|\,\|A\|^2\,\|u_0\|e^{|t|\,\|A\|},\end{aligned}$$

ami 0-hoz tart, ha $t\to 0$. A tetszőleges t pontban a deriváltat az

$$e^{(t+s)A}=e^{tA}\cdot e^{sA} \tag{2.2.11}$$

azonosság segítségével számolhatjuk ki.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}=\lim_{h\to 0}e^{tA}\frac{e^{hA}u_0-u_0}{h}=\\ &= e^{tA}Au_0=Ae^{tA}u_0=Au(t)\,.\end{aligned}$$

A differenciálegyenlet megoldásának egyértelműsége általános tételekből következik. □

A fenti számolás azt is adja, hogy az operátorértékű $t\mapsto e^{tA}$ függvény Frechet-deriváltja Ae^{tA}.

A (2.2.11) formula szerint e^{tA} **operátor félcsoport**, amelynek 0-ban vett deriváltját **generátornak** nevezzük. Az e^{tA} operátor félcsoport generátora A. Tehát minden korlátos operátor lehet generátor, de sok fontos félcsoport generátora nemkorlátos operátor.

A véges dimenziós terek analíziséből jól ismert középértéktétel a következő alakot ölti:

6. tétel: *Legyen X és Y Banach-tér, $G\subset X$ nyílt halmaz és $f:G\to Y$ a normált terek közötti olyan leképezés, amely minden $x\in G$ pontban Gateaux-differenciálható. Ha $x, x+h\in G$, akkor van olyan $0<t<1$ szám, amelyre*

$$f(x+h)=f(x)+df(x+th,h)\,.$$

A tétel bizonyítása redukálható a középértéktételre, ha azt a $\Phi(s):=f(x+sh)$ $\mathbb{R}$-en értelmezett függvényre alkalmazzuk. A tétel következménye, hogy a 0 Gateaux-differenciállal rendelkező függvény konstans.

3. lemma: *Legyen X egy Banach-tér és $A,B\in B(X)$ felcserélhető lineáris operátorok. Ekkor*

$$\exp(A+B)=\exp A\exp B.$$

Bizonyítás: Tekintsük a $\Phi:t\mapsto\exp(tA+tB)\exp(-tA)\exp(-tB)$ operátorértékű függvényt. Ennek Frechet-deriváltja

$$\exp(tA+tB)(A+B)\exp(-tA)\exp(-tB)-$$

$$\begin{aligned} &- \exp(tA+tB)A\exp(-tA)\exp(-tB) - \\ &- \exp(tA+tB)\exp(-tA)B\exp(-tB) \end{aligned}$$

a Leibniz-szabály alkalmazásával, felhasználva, hogy $t \mapsto \exp(tC)$ Frechet-deriváltja $C\exp(tC)$. Mivel B és $\exp(-tA)$ felcserélhetők, látható, hogy a derivált azonosan 0. Következésképpen Φ konstans és $\Phi(t) = \Phi(0)$ =identitás. Ebből az állítás következik. □

4. lemma: (Neumann-sor) *Legyen X egy Banach-tér, $\lambda \in \mathbb{C}$ és $A \in B(X)$. Ha $|\lambda| > \|A\|$, akkor*

$$\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}A^n$$

abszolút konvergens sor a $B(X)$ Banach-térben, és határértéke a $\lambda I - A$ operátor inverze.

Bizonyítás: Az abszolút konvergencia a $\sum_{n=0}^{\infty}\|\lambda^{-n}A^n\|$ numerikus sor konvergenciáját jelenti. Mivel

$$\|\lambda^{-n}A^n\| \le \|\lambda^{-1}A\|^n$$

és $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, ez világos. Továbbá

$$\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{m}\lambda^{-n}A^n(\lambda I - A) = (\lambda I - A)\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{m}\lambda^{-n}A^n = I - \lambda^{-m-1}A^{m+1},$$

és $\|\lambda^{-m-1}A^{m+1}\| \le \|\lambda^{-1}A\|^{m+1} \to 0$. Ez azt jelenti, hogy a sor S összege eleget tesz az $S(\lambda I - A) = (\lambda I - A)S = I$ feltételnek, tehát $\lambda I - A$ inverze. □

Legyen X egy normált tér, $\lambda \in \mathbb{C}$ és $A \in B(X)$. Ha a $\lambda I - A$ lineáris operátornak nincsen korlátos inverze, akkor azt mondjuk, hogy λ az A **spektrumában** van. A Neumann-féle sorfejtés szerint A spektruma korlátos halmaz, és a $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le \|A\|\}$ körlemez része. A spektrummal részleteiben csak a következő fejezetben foglalkozunk.

5. lemma: *Legyen X normált tér és Y egy Banach-tér. Ha $X_0 \subset X$ sűrű altér és $A \in B(X_0, Y)$, akkor egyértelműen létezik A-nak egy $\tilde{A} \in B(X, Y)$ kiterjesztése, és $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.*

Bizonyítás: Tetszőleges $x \in X$ esetén van olyan X_0-beli (x_n) sorozat, amelyre $x_n \to x$. Ekkor $\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \le \|A\|\,\|x_n - x_m\|$, tehát Ax_n Cauchy-sorozat, és határértékét definiáljuk úgy, mint $\tilde{A}x$. □

7. tétel: *Legyen X egy normált tér. Ekkor létezik egy $\tilde{X}$ Banach-tér és egy $\iota : X \to \tilde{X}$ lineáris izometria, amelyre $\iota(X)$ sűrű $\tilde{X}$-ban.*

Ha az $x \in X$ pontot azonosítjuk a $\iota(x) \in \tilde{X}$ ponttal, akkor $\tilde{X}$-ot X bővítéseként foghatjuk fel. A tételt a szigorú értelemben nem bizonyítjuk be, de vázoljuk a bizonyítás fő gondolatát. (Egy másik bizonyítás a második duálisba való beágyazás segítségével adható.)

Ha X-ben vannak nem konvergens Cauchy-sorozatok, akkor azoknak határértéket kell biztosítani X-hez újabb pontok hozzávételével. Ha (x_n) és (y_n) X-beli Cauchy-sorozatok, akkor $\tilde{X}$-ban konvergensek lesznek, de ugyanaz lesz a határértékük, ha $\lim \|x_n - y_n\| \to 0$. $\tilde{X}$-ot úgy definiáljuk, mint az X-beli Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztályainak halmazát, ha $(x_n) \sim (y_n)$ a $\lim \|x_n - y_n\| \to 0$ esetben. ι az $x \in X$ ponthoz az $(x, x, x, \ldots)$ sorozat ekvivalenciaosztályát adja meg. $\tilde{X}$-n lineáris tér struktúrát és normát kell értelmezni, amit az ekvivalenciaosztályok reprezentánsai segítségével teszünk. Például, ha (x_n) és (x'_n) X-beli Cauchy-sorozatok, akkor

$$(x_n) + (x'_n) := (x_n + x'_n) \qquad \text{és} \qquad \|(x_n)\| := \lim \|x_n\|.$$

Ezek a definíciók jók, mert ha $(x_n) \sim (y_n)$ és $(x'_n) \sim (y'_n)$, akkor $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$, továbbá $\lim \|x_n\| = \lim \|y_n\|$.

$\iota(X)$ sűrű $\tilde{X}$-ban: Legyen (x_n) egy Cauchy-sorozat. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra van egy N küszöbindex, amelyre $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, ha $n, m \geq N$. Tekintsük a konstans $x_N, x_N, \ldots$ sorozatot. Ez $\iota(X)$-ben van és legfeljebb ε távolságra van (x_n)-től. Ezek után még meggondolást igényel $\tilde{X}$ teljességének belátása.

Azt mondjuk, hogy az $\tilde{X}$ Banach-tér az X tér **teljes burka**. (Az $\tilde{X}$ Banach-tér megkapható a második duálisba való beágyazással is.)

14. példa: Legyen X az $[a, b]$ kompakt intervallumon értelmezett polinomok tere az

$$\|p\| = \sup\{|p(x)| : a \leq x \leq b\}$$

normával. X teljes burka a $C[a, b]$ tér. Valóban, ez Banach-tér, és a Weierstrass-féle approximációs tétel szerint X sűrű $C[a, b]$-ben. ☐

15. példa: Az $[a, b]$ intervallumon Lebesgue-értelemben integrálható függvények terét is értelmezhetjük teljes burokként. Ha $C[a, b]$-t nem a szokásos, hanem a Riemann-integrállal adott

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

normával tekintjük, akkor $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ teljes burka az integrálható függvények $L^1[a, b]$ tere.

Nem csak az integrálható függvényeket, de magát a Lebesgue-integrált is értelmezhetjük így. A folytonos függvényeken téglaösszegek határértékeként értelmezett integrál folytonos lineáris funkcionál:

$$\Big| \int_a^b f(x)\, dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx = \|f\|_1 .$$

Az 5. lemma szerint a funkcionál kiterjeszthető a teljes burokra, $L^1[a, b]$-re. Tehát ha $g \in L^1[a, b]$, de g nem folytonos, akkor g integrálja már nem téglaösszegekkel van értelmezve, hanem elég közvetett módon. „Keresünk” egy folytonos függvényekből álló f_n sorozatot, amely $\|\cdot\|_1$ normában konvergál g-hez, és g integrálja az $\int_a^b f_n(x)\,dx$ sorozat határértéke. $\square$

8. tétel: (Nyílt leképezés tétele) *Legyen X_1 és X_2 Banach-terek. Ha $A \in B(X_1, X_2)$ ráképezés, akkor nyílt halmazt nyílt halmazba visz.*

A tétel következménye, hogy Banach-terek közötti kölcsönösen egyértelmű korlátos ráképezésnek az inverze is korlátos.

Legyen X és Y normált tér és A egy lineáris leképezés az X tér $\mathcal{D}(A)$ alteréről az Y térbe. Az $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ párok lineáris teret alkotnak a koordinátánkénti műveletekkel, és

$$\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$$

norma ezen a téren, amelyet $X \oplus Y$-nal jelölhetünk. Ha X és Y teljes, akkor $X \oplus Y$ is az. Az A operátor **gráfja** ennek a térnek az

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}$$

altere. Ha $\Gamma(A)$ zárt, akkor A-t **zárt operátornak** mondjuk.

9. tétel: (Zárt gráf tétel) *Ha X, Y Banach-terek, és $A : X \to Y$ a teljes X téren értelmezett zárt operátor, akkor A korlátos.*

Bizonyítás: A feltevésekből következik, hogy $X \oplus Y$ Banach-tér. $\Gamma(A)$ tehát egy Banach-tér zárt része, és maga is Banach-tér. Az $(x, Ax) \mapsto x$ leképezés a nyílt leképezés tétele szerint nyílt, ezért inverze korlátos, azaz

$$C\|x\| \geq (\|x\| + \|Ax\|).$$

Ez az egyenlőtlenség A korlátosságát mutatja. $\square$

10. tétel: (Az egyenletes korlátosság tétele, Banach–Steinhaus-tétel) *Legyen X egy Banach-tér és Y egy normált tér. Ha $A_t \in B(X, Y)$ $(t \in T)$ korlátos lineáris leképezéseknek olyan családja, hogy*

$$\sup\{\|A_t x\| : t \in T\} < +\infty$$

minden $x \in X$ esetén, akkor $\sup\{\|A_t\| : t \in T\} < \infty$.

16. példa: Legyen X azoknak a folytonos $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ függvényeknek a tere, amelyekre $f(-\pi) = f(\pi)$. Ez Banach-tér a maximum normára nézve. Az X-beli függvényeket **Fourier-sorba** lehet fejteni: $f \in X$ Fourier-sora

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin mx + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos mx\,,$$

ahol

$$a_m := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\,dx \quad \text{és} \quad b_m := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,dx$$

A Fourier-sor n-edik részletösszege

$$A_n(f) := \sum_{m=1}^{n} a_n \sin mx + \sum_{m=0}^{n} b_m \cos mx\,.$$

A_n egy korlátos lineáris $X \to X$ operátor. (Könnyű becslést adni a normájára, de korlátossága abból a tényből is következik, hogy véges rangú.)

$A_n(f) \to f$ azt jelenti, hogy az f függvényhez a Fourier-sora egyenletesen konvergál. Ha ez minden függvényre fennáll, akkor az egyenletes korlátosság tétele szerint $\sup\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ véges. Megmutatjuk, hogy nem ez a helyzet, tehát kell lenni olyan folytonos X-beli függvénynek, amelynek a Fourier-sora nem konvergál egyenletesen.

Tekintsük az

$$\begin{aligned} f_n(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1} - \\ - \frac{\cos(n+2)x}{1} - \frac{\cos(n+3)x}{2} - \ldots - \frac{\cos(2n+1)x}{n} \end{aligned}$$

trigonometrikus polinomot. A

$$\cos t - \cos s = 2 \sin \frac{t+s}{2} \sin \frac{t-s}{2}$$

azonosság alapján

$$f_n(x) = 2 \sin(n+1)x \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\,.$$

Megmutatható,[6] hogy $|f_n(x)| \le 4\sqrt{\pi}$. Mivel

$$A_n f_n(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1}\,,$$

és $\|A_n f_n\| \ge |A_n f_n(0)|$, azt kapjuk, hogy

$$\|A_n\| \ge \frac{\|A_n(f_n)\|}{\|f_n\|} \ge \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Ez jól mutatja, hogy $\|A_n\| \to \infty$.

Az f függvény **folytonossági modulusa**

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \le \delta\}\,.$$

Ha $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) \log \omega(\delta) = 0$, akkor igaz az, hogy $A_n f \to f$, azaz f Fourier-sora egyenletesen konvergál. Természetesen folytonosan differenciálható függvények esetében ez így van. □

2.3. A duális tér

Az X normált tér X^* duálisa az X-en értelmezett korlátos lineáris funkcionálok tere.[7] X^* a 5. tétel értelmében Banach-tér.

17. példa: Tekintsük $\mathbb{R}^n$-et a p-normával, $1 < p < \infty$. Legyen $\varphi \in \left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\right)^*$. Ha

$$\varphi(0^{(1)}, \ldots, 0^{(k-1)}, 1^{(k)}, 0^{(k+1)}, \ldots, 0^{(n)}) = c_k,$$

akkor a linearitás alapján

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k c_k,$$

a φ funkcionált egyértelműen megadhatjuk a $c \in \mathbb{R}^n$ vektorral. Ha $p^{-1} + q^{-1} = 1$, akkor a Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k c_k\right| \leq \|x\|_p \, \|c\|_q,$$

ezért $\|\varphi\| \leq \|c\|_q$. Másrészt legyen $x_k = \operatorname{sign}(c_k)|c_k|^{q-1}$. Ekkor

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^q = \|c\|_q^q = \|c\|_q \|x\|_p,$$

ugyanis $\|x\|_p = \|c\|_q^{q-1}$. Tehát $\|\varphi\| = \|c\|_q$.

Egy izometrikus megfeleltetést létesítettünk a $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\right)^*$ és a $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q\right)$ terek között:

$$\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\right)^* \simeq \left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q\right)$$

Közvetlenül látható, hogy ez az összefüggés $p = 1$ és $p = \infty$ esetén is fennáll. □

18. példa: Legyen $1 < p < \infty$, és az ℓ^p tér duálisát akarjuk meghatározni, az előző példa gondolatmenetét követve. Ha $\varphi \in (\ell^p)^*$, akkor

$$\varphi(0^{(1)}, \ldots, 0^{(k-1)}, 1^{(k)}, 0^{(k+1)}, \ldots) = c_k$$

egy c_k sorozatot határoz meg, amellyel $\varphi(x)$ kifejezhető. A linearitás és a folytonosság alapján

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k.$$

Legyen

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k c_k\,.$$

Mivel ez φ megszorítása egy altérre, $\|\varphi_n\| \le \|\varphi\|$. Másrészt az előző példából tudjuk, hogy

$$\|\varphi_n\| = \Big[\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q\Big]^{1/q}.$$

Ebből adódik, hogy $c \in \ell^q$ és $\|\varphi\| \ge \|c\|_q$. A fordított egyenlőtlenség most is egyszerűen következik a Hölder-egyenlőtlenségből. Megállapíthatjuk, hogy $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$, ha $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Ebből az is következik, hogy ℓ^q terek teljesek. □

Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ egy mértéktér. (Erre vonatkozóan lásd a Függeléket.) Ha $1 \le p < +\infty$-re, akkor $L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \{f : X \to \mathbb{C} : |f|^p \text{ integrálható } \mu\text{-re}\}$. Ezen a téren értelmezhetünk egy normát $\mathbb{R}^n$ p normájához hasonlóan:

$$\|f\|_p := \left[\int |f(x)|^p \, d\mu(x)\right]^{1/p}. \tag{2.3.12}$$

(Valójában csak akkor kapunk normát, ha a majdnem mindenütt megegyező függvényeket azonosnak tekintjük.) Az 1. szakaszban megfogalmazott Minkowski- és Hölder-egyenlőtlenségek érvényben maradnak. Az $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ tér az $X = \mathbb{N}$ és a számláló mérték választásával visszadja az ℓ^p sorozatteret is. Ezért a következő tétel az ℓ^p tér duálisát adó példa általánosítása.

11. tétel: *Ha $\varphi \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)^*$ valamely $(X, \mathcal{B}, \mu)$ σ-véges mértéktérre, és $1 \le p < \infty$, akkor létezik egy $g \in L^q(X, \mathcal{B}, \mu)$ függvény, amelyre*

$$\varphi(f) = \int f(x) g(x) \, d\mu(x),$$

és $\|\varphi\| = \|g\|_q$, továbbá $1/p + 1/q = 1$.

A $p = 2$ eset azért érdekes, mert akkor $q = 2$, tehát az $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ tér duálisa önmaga. Ez egy olyan fontos eset, hogy külön fejezetet szánunk neki. (Az $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ tér talán a „legfontosabb Hilbert-tér”, és minden Hilbert-tér megkapható ebben a formában a mértéktér alkalmas megválasztásával.)

Az $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ terek $1 < p \le \infty$ esetén mind egy normált tér duálisai, tehát az 5. tétel értelmében teljesek.

A folytonos függvények terének duálisát Riesz Frigyes tétele adja meg. A tétel megértése némi mértékelméletet tételez fel, ami a Függelékben megtalálható.

12. tétel: (Riesz-féle reprezentációs tétel) *Ha $\varphi \in C_{\mathbb{C}}[a, b]^*$, akkor egyértelműen létezik olyan komplex értékű $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ függvény, amelyre*

$$\|\varphi\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, \quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$$

és $\varphi(f) = \int_a^b f(x) \, dg(x)$. □

Riesz Frigyes (1880–1956)

Riesz Frigyes Budapesten, Göttingenben és Zürichben tanult, Kolozsváron lett professzor, majd 1920-ban a Kolozsvári Egyetemmel együtt Szegedre költözött. Szegeden Haar Alfréddal együtt hozta létre a Bolyai János Matematikai Intézetet és az Acta Scientiarum Mathematicarum folyóiratot. Riesz a funkcionálanalízis egyik megteremtője volt. Dolgozatait nagyon jó matematikai ízléssel, elegáns stílusban írta, nem volt híve az önmagáért történő általánosításnak. (A kép rektori díszruhában ábrázolja őt.)

Figyelem: A $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ Stieltjes-féle integrál, értelmezése a Függelékben van kifejtve. A tétel szerint a g teljes változása $\|\varphi\|$. Ha $\nu([t,s)) := g(s) - g(t)$, akkor ν kiterjeszthető az intervallumokról az $[a,b]$ intervallum Borel-halmazaira σ-additív komplex mértékké. Ezt a tényt belefogalmazzuk a tétel egy másik változatába, amely a pozitív lineáris funkcionálokat állítja elő integrálként.

13. tétel: (Riesz-féle reprezentációs tétel) *Legyen* $\varphi : C_{\mathbb{R}}[a,b] \to \mathbb{R}$ *olyan lineáris funkcionál, amelyre* $f \geq 0$ *esetén* $\varphi(f) \geq 0$*. Ekkor létezik olyan* σ*-additív mérték* $[a,b]$ *Borel-halmazain, amelyre*

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,d\mu(x)\,.$$

Továbbá $\mu([a,b]) = \|\varphi\| = \varphi(1)$. □

A Riesz-tétel második formája azért előnyösebb, mert kiterjeszthető általánosabb terekre, az $[a, b]$ intervallum helyére kompakt metrikus teret is tehetünk.

14. tétel: (Hahn–Banach-tétel) *Legyen X egy normált tér és X_0 lineáris altere X-nek. Ha $\varphi \in X_0^*$ korlátos lineáris funkcionál X_0-on, akkor létezik φ-nek olyan $\tilde{\varphi} \in X^*$ kiterjesztése, amelyre $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.* □

A tételt nem bizonyítjuk, csak hangsúlyozzuk, hogy a kiterjesztés egyértelműségéről nincsen szó.

Mint már korábban is említettük X^* a 5. tétel értelmében Banach-tér. Ezt a tényt felhasználhatjuk arra, hogy a 7. tételre egy másik bizonyítást adjunk.

Az X^* Banach-tér duálisa X^{**}, X második duálisa. Ha $x \in X$, akkor értelmezhetünk egy $F_x \in X^{**}$ funkcionált az $F_x(\varphi) := \varphi(x)$ képlettel, $\varphi \in X^*$. Az $x \mapsto F_x$ hozzárendelés lineáris és izometrikus:

$$\|F_x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|\varphi\| = 1\} = \|x\| .$$

Valóban, $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \, \|x\|$, és a Hahn–Banach-tétel következményeként minden $x \in X$ vektorhoz van olyan $\varphi \in X^*$ funkcionál, amelyre $\|\varphi\| = 1$ és $\varphi(x) = \|x\|$. Ha a 7. tételben szereplő ι leképezésnek az $x \mapsto F_x$ hozzárendelést, $\tilde{X}$-nek pedig X^{**} Banach-tér $\{F_x : x \in X\}$ lineáris alterének lezárását választjuk, akkor a tétel állítása teljesül.

19. példa: Legyen ℓ^∞ a korlátos számsorozatok tere a

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

normával, és legyen a c a konvergens sorozatokból álló altér. Értelmezzünk c-n egy φ funkcionált a

$$\varphi(x) := \lim x_n$$

képlettel. φ korlátos, $\|\varphi\| = 1$. Ezért a Hahn–Banach-tétel alkalmazásával kaphatunk egy olyan $\tilde{\varphi}$ lineáris funkcionált, amely konvergens sorozatokhoz éppen a határértéküket rendeli. $\tilde{\varphi}$ olyan, mint egy általánosított határérték, amely azonban messze nem egyértelmű. Végtelen sok lehetséges $\tilde{\varphi}$ funkcionál van, például $\tilde{\varphi}$ értékét az $1, -1, 1, -1, 1 - 1, \ldots$ sorozaton tetszőleges -1 és 1 közé eső számnak előírhatjuk.

Legyen $\tilde{\varphi}$ egy általánosított határérték. Ekkor $\tilde{\varphi}(x)$ nem adható meg $\sum_n x_n c_n$ alakban valamilyen $c \in \ell^1$ sorozattal. Ez a tény azt mutatja, hogy ℓ^∞ duálisa bővebb, mint ℓ^1. □

2.4. Multinormált terek

Legyen X egy valós vagy komplex lineáris tér. Ha adott X-en pozitív funkcionáloknak egy olyan $p_i : X \to \mathbb{R}^+$ családja, $i \in I$, amelyre

(i) $p_i(\lambda x) = |\lambda| \, p_i(x)$,

(ii) $p_i(x+y) \le p_i(x) + p_i(y)$,

(iii) $x \in X$ és $x \ne 0$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $p_i(x) \ne 0$,

akkor X-et **multinormált térnek** nevezzük. (Multinormált tér helyett **lokálisan konvex topologikus vektorteret** is szoktak, illetve lehetne mondani.) Az egyik alapvető példa a következő.

20. példa: Multinormált teret képez $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a 2. példában értelmezett $p_{m,r}$ funkcionálokkal. □

Az $(X, p_i, i \in I)$ multinormált térben az $x_n \in X$ sorozatra $x_n \to x \in X$, ha $p_i(x - x_n) \to 0$ minden $i \in I$ esetén. Az $(X, p_i, i \in I)$, $(Y, q_j, j \in J)$ multinormált terek közötti f leképezést folytonosnak nevezzük, ha $x_n \to x$ esetén $f(x_n) \to f(x)$.

21. példa: Ha $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ és $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ multiindexek, akkor legyen

$$r_{\alpha,\beta}(f) = \sup\left\{|x^\alpha D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

az $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ függvényekre. (x^α az $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ függvényt jelenti.) A Schwartz-tér az $r_{\alpha,\beta}$ funkcionálokkal egy multinormált teret képez, éppen úgy, mint a fenti $p_{m,r}$ funkcionálokkal. Megmutatjuk, hogy a két tér **topologikusan ekvivalens**, azaz ugyanazok bennük a konvergens sorozatok.

$$\begin{aligned} p_{m,r}(f) &\le \sum_{|\beta| \le r} \sup\left\{1 + \|x\|_2^2)^m |D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\right\} \le \\ &\le \sum_{|\beta| \le r} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sup\left\{\|x\|_2^{2i} |D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\right\} = \\ &= \sum_{|\beta| \le r} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} r_{\alpha(i),\beta}(f)\,, \end{aligned}$$

ha $\alpha(i) = (2i, 2i, \dots, 2i)$. Az egyenlőtlenség világossá teszi, hogy ha $r_{\alpha,\beta}(f_n) \to 0$ minden α és β multiindexre, akkor $p_{m,r}(f_n) \to 0$ bármilyen m, r pozitív egészre.

Ha m-et elég nagyra választjuk, akkor $x^\alpha (1 + \|x\|_2^2)^{-m}$ a végtelenben eltűnő és ezért korlátos függvény. Alkalmas C konstanssal

$$|x^\alpha D^\beta f| \le C(1 + \|x\|_2^2)^m |D^\beta f|\,,$$

tehát

$$r_{\alpha,\beta}(f) \le C p_{m,0}(D^\beta f) \le C p_{m,|\beta|}(f)\,.$$

Ebből látszik, hogy ha $p_{m,r}(f_n) \to 0$ minden $m, r \in \mathbb{N}$-re, akkor $r_{\alpha,\beta}(f_n) \to 0$ minden α, β multiindexre. □

22. példa: Megmutatjuk, hogy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Ugyanis $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-re

$$\begin{aligned}\left|\int f(x)\,dx\right| &\le \int (1+\|x\|_2^k)^{-1}(1+\|x\|_2^k)|f(x)|\,dx \le \\ &\le \int (1+\|x\|_2^k)^{-1}\,dx \times \sup\{(1+\|x\|_2^k)|f(x)|\},\end{aligned}$$

ha k-t olyan nagynak választjuk, hogy $(1+\|x\|_2^k)^{-1}$ integrálható. Becslésünk egyrészt azt mutatja, hogy $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, másrészt

$$\|f\|_1 \le C\,p_{k,0}(f) \tag{2.4.13}$$

egy C konstanssal. Az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ multinormált teret az $L^1(\mathbb{R}^n)$ normált térbe képező **beágyazás folytonos**. □

23. példa: Az $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény **Fourier-transzformáltját** a

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\mathrm{i}\,(t,x)} f(x)\,dx \tag{2.4.14}$$

képlet értelmezi, $(x,t) = \sum_i x_i t_i$. Világos a definícióból, hogy $\hat{f}$ korlátos:

$$|\hat{f}(t)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |e^{-\mathrm{i}\,(t,x)} f(x)|\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |f(x)|\,dx\,.$$

A dominált konvergencia tételből adódóan $\hat{f}$ folytonos függvény.

Próbáljuk differenciálni $\hat{f}$-ot az egyváltozós esetben.

$$\frac{\hat{f}(t) - f(t')}{t-t'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{e^{-\mathrm{i}\,tx} - e^{-\mathrm{i}\,t'x}}{t-t'} f(x)\,dx\,.$$

Ha a $t' \to t$ határátmenetet akarjuk végrehajtani, akkor integrálható majoránst kell keresnünk. Az integrandusban lévő differenciahányados $-\mathrm{i}\,xe^{-\mathrm{i}\,tx}$-hez tart. Amennyiben $xf(x)$ integrálható

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = -\mathrm{i}\,\widehat{xf(x)}\,. \tag{2.4.15}$$

Ezt iterálva jutunk oda, hogy ha $x^n f(x)$ integrálható, akkor f Fourier-transzformáltja n-szer differenciálható. (Minél gyorsabban tart f a 0-hoz a végtelenben, annál simább a Fourier-transzformáltja.)

A (2.4.15) képlet levezetéséhez hasonlóan látható, hogy az n változós esetben $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ és $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ multiindexekre

$$(\mathrm{i}\,)^{|\beta|+|\alpha|} t^\alpha D^\beta \hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\mathrm{i}\,\langle t,x\rangle} D^\alpha(x^\beta f(x))\,dx\,. \tag{2.4.16}$$

Ebből következik, hogy a Fourier-transzformáció az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ teret önmagába képezi. Valóban, a (2.4.16) képletből

$$\left| \left(\prod_{i=1}^{n} t_i \right) t^\alpha D^\beta \hat{f}(t) \right| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left\| D^{\alpha+1} x^\beta f(x) \right\|_1 ,$$

vagyis

$$|t^\alpha D^\beta \hat{f}(t)| \le \frac{c}{\prod_{i=1}^{n} t_i}.$$

Ez mutatja, hogy $t^\alpha D^\beta \hat{f}$ eltűnik a végtelenben. Tehát $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esetén $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Meg akarjuk mutatni a Fourier-transzformáció folytonosságát is.

$$\begin{aligned} |t^\alpha D^\beta \hat{f}(t)| &\le C \int (1 + \|x\|_2^2)^{-k} (1 + \|x\|_2^2)^k |D^\alpha (x^\beta f(x))| \, dx \le \\ &\le C' \sup\{(1 + \|x\|_2^2)^k |D^\alpha (x^\beta f)(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} , \end{aligned}$$

ha k olyan nagy, hogy $(1 + \|x\|_2^2)^{-k}$ integrálható. Ekkor

$$r_{\alpha,\beta}(f) \le C' p_{k,r}(x^\beta f_n(x)) ,$$

ha $r \ge |\alpha|$. Amennyiben $f_n \to 0$, akkor $x^\beta f_n(x) \to 0$ és $p_{k,r}(x^\beta f_n(x)) \to 0$. Az előbbi egyenlőtlenség miatt $r_{\alpha,\beta}(f) \to 0$. $\square$

A Fourier-transzformáció az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-teret önmagába viszi. Megkérdezhető, hogy a Fourier-transzformációnak mint

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \| \cdot \|_p) \to (\mathcal{S}(\mathbb{R}) , \| \cdot \|_q)$$

leképezésnek mennyi a normája a különböző $1 \le p, q \le \infty$ értékekre, azaz a

$$C(p,q) := \sup \left\{ \frac{\left[\int |\hat{f}(x)|^q \, dx \right]^{1/q}}{\left[\int |f(x)|^p dx \right]^{1/p}} : f \ne 0, \ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \right\}$$

számra vagyunk kiváncsiak. A következő fejezetben tárgyalt **Plancherel-tétel** azt mondja, hogy $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$. Ha p és q nem konjugáltak, vagy $p > 2$, akkor $C(p,q) = +\infty$. Amennyiben konjugáltak, és $1 \le p \le 2$, akkor

$$C(p,q) = \sqrt{\frac{(2\pi q)^{1/q}}{(2\pi p)^{1/p}}} .$$

Az eredményt **Beckner** bizonyította 1975-ben a klasszikus **Hausdorff–Young-egyenlőtlenség** élesítéseként. **Lieb** megmutatta 1990-ben, hogy az

$$\|\hat{f}\|_q = C(p,q) \|f\|_p$$

egyenlőség (az $1 \leq p \leq 2$ és $f \neq 0$ esetben) csak Gauss-függvényekre teljesül, tehát $f(x) = A\exp(-Bx^2 + Cx)$. [8]

Az $\mathcal{S}$ multinormált tér folytonos lineáris funkcionáljait **temperált disztribúcióknak** nevezzük, ezek alkotják az $\mathcal{S}'$ teret. Egyébként $\mathcal{S}'$ is multinormált tér. A Fourier-transzformáció a dualitás segítségével értelmezhető a temperált disztribúciókon. [9]

2.5. Gyakorlófeladatok

1. A normának melyik tulajdonságai teljesülnek a $C[a,b]$-n értelmezett
$$p(f) = |f(b) - f(a)|$$
funkcionálra?

2.^{M} Legyen p_1 és p_2 két norma egy lineáris téren! Igazoljuk, hogy $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ és $q(x) = \max(p_1(x), p_2(x))$ ugyancsak normák!

3.^{M} Bizonyítsa be, hogy ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$ egy normált térben, akkor $x_n + y_n \to x + y$!

4. Bizonyítsa be, hogy ha $x_n \to x$ egy normált térben, és $\lambda_n \to \lambda$ egy számsorozatra, akkor $\lambda_n x_n \to \lambda x$!

5.^{M} Bizonyítsa be, hogy ha $x_n \to x$ egy normált térben, akkor $n^{-1}(x_1 + x_2 + \ldots x_n) \to x$!

6.^{M} Igaz-e, hogy $f_n(x) = nx/(1 + nx^2)$ Cauchy-sorozat $C[0,1]$-ben?

7. Mutassa meg, hogy normált térben Cauchy-sorozatok összege Cauchy-sorozat!

8. Mutassa meg, hogy ha egy normált térben minden Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor a tér teljes!

9. Konvergensek-e a $C[0,1]$ térben a következő sorozatok **a.** $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$, **b.** $y_n(t) = t^n - t^{2n}$?

10.^{M} Konvergens-e az $x_n(t) = t^{n+1}/(n+1) - t^{2n+2}/(n+2)$ sorozat a $C[0,1]$, illetve $C^1[0,1]$ terekben? (A $C^1[0,1]$ térben
$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\} + \sup\{|f'(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$
a norma.)

11. Zárt alteret alkotnak-e $C[0,1]$-ben **a.** a legfeljebb n-edfokú polinomok, **b.** a pontosan n-edfokú polinomok?

12. Nyílt halmazt alkotnak-e $C[a,b]$-ben az olyan f függvények, amelyekre $|f(t)| < 1$? ($a < t < b$ rögzített szám.)

13. A kétváltozós polinomokon tekintsük a

$$\|p(x,y)\| := \sup\{|p(x,y)| : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

Folytonos-e az így kapott normált téren a

$$\frac{\partial^3}{\partial^2 x \partial y}$$

differenciáloperátor?

14. Igazolja, hogy normált térben konvex halmaz lezárása is konvex!

15.^{M} Legyen A és B két konvex halmaz egy normált térben! Az $A \cup B$, $A \cap B$ és $A + B$ halmazok közül melyik konvex?

16. Igazolja, hogy az ℓ^2 térben az alábbi halmazok konvexek: **a** $\{x \in \ell^2 : |x_n| \le 2^{-n}\}$, **b.** $\{x \in \ell^2 : \sum n^2 |x_n|^2 < 1\}$!

17. Az $f \mapsto f(1)$ funkcionál folytonos-e a $C[0,1]$ téren, ha azon **a.** a szokásos sup normát, **b.** az L^2 normát tekintjük?

18.^{M} Legyen X_1 és X_2 két normált tér és $A : X_1 \to X_2$ $B : X_1 \to X_2$ két folytonos lineáris leképezés! Igazolja, hogy $\{x \in X_1 : Ax = Bx\}$ zárt lineáris altér X_1-ben!

19. A folytonosan differenciálható $[a,b] \to \mathbb{R}$ függvények terén legyen

$$\|f\| = \left[\int_a^b f^2(t)\,dt + \int_a^b [f'(t)]^2\,dt\right]^{1/2}.$$

Igazolja, hogy ez norma! Banach-teret alkotnak-e a folytonosan differenciálható függvények ezzel a normával?

20.^{M} Lehet-e egy Banach-tér valódi részhalmaza egyidejűleg zárt és nyílt?

21.^{M} Mutassa meg, hogy

$$L(f) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$C[0,1]$ folytonos lineáris transzformációját értelmezi!

22.^{M} Létezik-e olyan folytonos lineáris funkcionál a korlátos sorozatok ℓ^∞ terén, amely konvergens sorozatokhoz a határértéküket és az $1, -1, 1, -1, \dots$ sorozathoz a $t \in \mathbb{R}$ számot rendeli?

23. Igazolja, hogy $f, g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ esetén $f \cdot g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$!

24. Igazolja, hogy $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esetén $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$!

25. Igazolja az 1. lemmát! (Útmutatás: Adjon geometriai interpretációt az

$$A_1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p} \quad \text{és} \quad A_2 = \int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{b^q}{q}$$

területeknek, gondolva arra, hogy az x^{p-1} és az y^{q-1} függvények egymás inverzei!)

26. Tekintsük a $\mathbb{C}^n$ téren a $\|\cdot\|_p$ normákat. Adjunk meg olyan C_1 és C_2 számokat, hogy $\|\cdot\|_p \le C_1\|\cdot\|_r \le C_2\|\cdot\|_p$, $1 \le p, r \le \infty$!

27. Mutassa meg, hogy integrálható függvény Fourier-transzformáltja folytonos!

28. Tekintsük a mátrixok $M_n(\mathbb{R})$ téren a $\|\cdot\|_p$ p-normát és a $\|\cdot\|$ operátornormát! Adjunk meg olyan C_1 és C_2 számokat, hogy $\|\cdot\|_p \le C_1\|\cdot\| \le C_2\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$!

29. Legyen X a $C[0,1]$ tér polinomokból álló altere! Folytonos-e X-en a differenciális lineáris operátor?

30.^{M} Legyen X és Y két normált tér! Az $\{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$ párok lineáris teret alkotnak a koordinátánkénti műveletekkel. Mutassuk meg, hogy

$$\|(x,y)\|_1 := \|x\| + \|y\| \quad \text{és} \quad \|(x,y)\|_2 := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

ekvivalens normák ezen a téren!

31. Legyen P a valós együtthatós polinomok tere ellátva a

$$\|p\| := \sup\{|p(x)| : 0 \le x \le 1\}$$

normával! Igazoljuk, hogy az $f : p \mapsto p(2)$ funkcionál lineáris, de nem folytonos P-n!

32. Legyen $\varphi : C_{\mathbb{C}}[0,1] \to \mathbb{C}$ olyan komplex lineáris funkcionál, amelyre $\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$! Mutassa meg, hogy $f \ge 0$ esetén $\varphi(f) \ge 0$! (Útmutatás: **a.** $-1 \le g \le 1$ esetén $\|g \pm ni\| \le \sqrt{n^2+1}$ ezért $|\varphi(g) \pm ni| \le \sqrt{n^2+1}$. **b.** Az előző g függvényre $\varphi(g) \in [-1,1]$. **c.** Legyen $0 \le f \le 1$ és alkalmazzuk **b**-t az $g = f$ és $g = 2f - 1$ függvényekre.)

33.^{M} Legyen f egy lineáris funkcionál egy E normált téren! Igazoljuk, hogy f pontosan akkor folytonos, ha $\ker f := \{x \in E : f(x) = 0\}$ zárt lineáris altér!

34. Igazoljuk, hogy minden véges dimenziós normált tér Banach-tér!

35.^{M} Legyen $C_0(\mathbb{R}^n)$ a végtelenben eltűnő folytonos függvények vektortere a sup normával! Banach-tér ez?

36. A kompakt tartójú $\mathbb{R}$-en értelmezett folytonos függvények vektorterét a sup normával tekintjük. Mi a tér teljes burka?

37. Legyen $C_c(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett kompakt tartójú folytonos függvények tere a sup-normával, és legyen X a $C_c(\mathbb{R})$ teljes burka! Igazolja, hogy minden $f \in X$ esetén $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ teljesül!

38.^{M} Sűrűn vannak-e az $L^1[0,1]$ térben azok a polinomok, amelyek integrálja 0?

39. Az $\mathbb{R}^n$ téren tekintsük a p-normákat! Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty\,!$$

40. Mutassuk meg, hogy $\ell^1 \subset \ell^2$, de van olyan ℓ^2-beli sorozat, amely nem ℓ^1-beli!

41. Mutassuk meg, hogy az ℓ^1 tér teljes!

42. Jelölje c a konvergens komplex számsorozatok terét az $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|\}$ normával! **a.** Mutassa meg, hogy a tér teljes! **b.** Írja le a c tér duálisát!

43. Legyen $g \in C[0,1]$ és értelmezzünk egy $A : C[0,1] \to C[0,1]$ lineáris operátort az $Af(x) = g(x)f(x)$ képlettel. Mi A spektruma?

44. Függ-e egy lineáris $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transzformáció spektruma attól, hogy melyik $\|\cdot\|_p$ normát tekintjük $\mathbb{R}^n$-en, $1 \le p \le \infty$?

45.^{M} Igazolja közvetlenül sorfejtéssel, hogy egy korlátos A operátorra $(e^A)^2 = e^{2A}$!

46. Legyenek A és B egy Banach-tér felcserélhető operátorai! Mutassuk meg a hatványsorok átrendezésével, hogy $\exp(A+B) = \exp A \exp B$!

47. Számoljuk ki a $t \mapsto \sin(tA)$ függvény Frechet-deriváltját, ha $t \in \mathbb{R}$ és A egy Banach-tér korlátos operátora! Általánosítsuk az eredményt!

48. Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex zárt halmaz és

$$F(x) = \inf\{\|x-y\|_2 \, : \, y \in K\}\,.$$

Számolja ki az $F : \mathbb{R}^n \setminus K \to \mathbb{R}$ funkcionál $dF(x,h)$ Gateaux-differenciálját!

49. Mutassuk meg, hogy egy Banach-tér nyílt halmazán értelmezett operátor folytonos azokban a pontokban, ahol Frechet-értelemben differenciálható!

50.^{M} Legyen S konvex halmaz egy Hilbert-térben! Mutassa meg, hogy az

$$F(x) = \inf\{\|x-y\| \, : \, y \in S\}$$

konvex funkcionál! ($F(x)$ az x pontnak az S halmaztól való távolsága.)

51. Tekintsük a $\mathbb{C}^n$ teret a p-normával, $1 \le p \le \infty$, és legyen $K \subset \mathbb{C}^n$ egy konvex zárt halmaz! Milyen p értékekre teljesül a Hilbert-térben megfogalmazott Riesz-lemma állítása?

52. Legyen

$$\varphi : L^{4/3}[-1,1] \to \mathbb{C} \qquad f \mapsto \varphi(f) := \int_0^1 f(x)x^3\,dx$$

funkcionál! Határozza meg $\|\varphi\|$ értékét!

53. Mutassuk meg az 22. példát követve, hogy az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ multinormált térnek az $L^p(\mathbb{R}^n)$ normált térbe való beágyazás folytonos!

54.* Legyen p egy valós együtthatós polinom, és tekintsük azt a $P : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ funkcionált az $n \times n$-es mátrixok terén, amelyet a

$$P(A) = \operatorname{Tr} p(A)$$

képlet értelmez! Mutassa meg, hogy $dP(A,H)$ a Gateaux-differenciál $\operatorname{Tr} p'(A)H$!

55.* Legyen p egy valós együtthatós polinom, és tekintsük a $P : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto p(A)$ leképezést az $n \times n$-es mátrixok terén! Mutassuk meg, hogy ha $A = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonális mátrix, akkor a $dP(A)$ Frechet-derivált az alábbiak szerint adható meg!

$$dP(A)(H)_{ij} = H_{ij}L_{ij}\,,$$

ahol

$$L_{ij} = \begin{cases} \dfrac{p(\lambda_i) - p(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}, & \text{ha} \quad \lambda_i \neq \lambda_j\,, \\ p'(\lambda_i), & \text{ha} \quad \lambda_i = \lambda_j\,. \end{cases}$$

(Útmutatás: Először végezzük el a számolást az $p(x) = x^n$ esetben, majd alkalmazzuk a linearitást!)

56. Mutassa meg, hogy $C[a,b]$ szeparábilis! (Egy teret szeparábilisnek mondunk, ha van benne megszámlálható sűrű halmaz.)