Kvantum rendszerek állapotrekonstrukciója

tudományos diákköri dolgozat

Szántó András matematikus hallgató
BME Analízis tanszék

Témavezetők: Hangos Katalin [1] és Petz Dénes [2]

Kivonat

Egy összetett kvantum rendszer állapota rekonstruálható az egyik részrendszeren végzett mérésekből, ha a két részrendszer között kölcsönhatásokat kapcsolunk be. A dolgozatban két kvantum bitől álló összetett rendszert vizsgálunk, és célunk annak megállapítása, hogy minimálisan hány kölcsönhatásra van szükség a hatékony és teljes rekonstrukcióhoz. A kérdés arra a matematikai problémára vezethető vissza, hogy az eredeti rendszerhez tartozó mátrixalgebra hogyan bontható fel olyan részalgebrákra, melyek szintén mátrixalgebrák. A probléma a komplementáris mérések fogalmának részalgebrákra való kiterjesztéséhez is elvezet.

A dolgozatban részletesen tárgyaljuk a két kvantum bitől álló rendszert leíró 4x4-es mátrixalgebra esetét. Megmutatjuk, hogy legalább hat részalgebra szükséges a teljes 4x4-es mátrixalgebra lineáris kifeszítéséhez, ha a részalgebrákat elemi tenzorokkal lehet generálni. Mind a hat részalgebra nem lehet (páronként) komplementáris, de négy páronként komplementáris részalgebra könnyen konstruálható. A lineáris kifeszítéshez egy ötödik részalgebrát véletlen unitérrel is generálhatunk. Érdekességképpen azt is megmutajuk, hogy az ötödik részalgebra Hadamard-mátrixokkal is kifeszíthető.

Petz és Kahn bizonyították, hogy öt páronként komplememtáris részalgebra nem létezik. Erre az eredményre új bizonyítást adunk, és azt is megmutatjuk, hogy ha a négy komplementáris részalgebrát elemi tenzorok generálják, akkor az ortogonális komplementumuk kommutatív algebra.

[1] SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Kutató Laboratórium
[2] BME Analízis tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A kvantum rendszerek leírásának, állapot reprezentációjának és irányításának matematikai problémái napjaink méltán népszerű, elméletileg érdekes és gyakorlati szempontból is fontos kutatási területei. A kvantum rendszerek kezelésének matematikai problémáit az információátvitel újfajta módjai és a kvantumszámítógép elméleti megjelenése is motiválja [3, 2]. Az irányításhoz is szorosan kapcsolódó problémakör a kvantumrendszerek állapotbecslése, másszóval a kvantumtomográfia [1].

Amennyiben a rendszer egészére vonatkozó méréseket végzünk, akkor egy érdekes, és az irodalomban alaposan vizsgált kérdés az, hogy hány és milyen obszervábilis kell ahhoz, hogy az állapotot hatékonyan rekonstruálni tudjuk. Könnyű látni, hogy egy N szintű rendszer állapotrekonstrukciójához legalább $N^2 - 1/(N-1) = N+1$ obszervábilisra van szükség. Természetesen az obszervábiliseket többször is meg kell mérni, a rendszer azonos módon preparált példányain, mivel a mérés kimenetele sztochasztikus.

A dolgozatban vizsgált problémák olyan kvantumtomográfiai kérdések vizsgálatakor vetődtek fel, amikor egy több kvanrum bitből álló rendszernek csak az egyik bitjén végzett mérésekből próbálunk következtetni a rendszer állapotára. Ez volt a szerző hallgatói témalaborja, amely aztán a [9] publikációhoz vezetett. A hatékony állapotbecsléshez kapcsolódik a mérések komplementaritásának fogalma, amely széles irodalommal rendelkezik [14]. Amennyiben a részleges információt a kvantum rendszerről nem méréssel, hanem egy részrendszer ismeretével kapjuk, akkor más, de hasonlónak mondható komplementaritási fogalom jelenik meg.

2. Alapfogalmak

Az alábbiakban összefoglaljuk azokat a kvantummechanikai alapismereteket, melyek szükségesek a dolgozat megértéséhez. A részletes tárgyalás standard, matematikai szemléletű kvantummechanikai tankönyvekben megtalálható, lásd például [7, 8].

2.1. Véges kvantummechanikai rendszerekről

Minden véges kvantummechanikai rendszerhez tartozik egy Hilbert-tér. A rendszer állapotait a Hilbert-téren értelmezett *statisztikus operátoroknak*, azaz 1 nyomú, pozitív operátoroknak feleltethetjük meg. Véges dimenziós esetben, azaz véges rendszerek esetében a statisztikus operátorokat *sűrűségi mátrixoknak* is nevezik.

Egy állapotot *tisztának* nevezünk, ha felírható $D = |x\rangle\langle x|$ alakban, ahol x egy egységvektor. Minden 1 rangú mátrix felírható ilyen alakban. A nem tiszta állapotokat *keverteknek* nevezzük. A kevert állapotok merőlegességét a Hilbert-Schmidt belső szorzattal értelmezzük:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^* B).$$

Egy rendszert N-szintűnek nevezünk, ha a hozzá tartozó Hilbert-tér $\mathbb{C}^N$.

Egy összetett rendszerhez tartozó Hilbert-tér az alrendszerekhez tartozó terek tenzorszorzata.

A mérést egy *obszervábilis*, azaz egy önadjungált operátor segítségével értelmezhetjük. A mérés eredménye az obszervábilis sajátértékeinek egyike, és a mérés után a rendszer tiszta állapotba kerül. Ha $A = \sum_i \lambda_i E_i$ egy obszervábilis spektrális felbontása, akkor a λ_i sajátérték valószínűsége $\mathrm{Tr}DE_i$, ahol D az állapot sűrűsége a mérés előtt, a mérés várható értéke pedig $\mathrm{Tr}AD$, melyre az $\langle A\rangle_D$ jelölést is használják.

Egy $H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ szorzattéren az

$$A_i = \overbrace{I \otimes \ldots \otimes I}^{i-1} \otimes A \otimes I \otimes \ldots \otimes I$$

obszervábilist felfoghatjuk egy, az i-edik komponensre koncentrált mérésnek. Ennek segítségével bevezethetjük a *redukált sűrűségeket*: D_i az i-edik redukáltja D-nek, ha $\mathrm{Tr}DA_i = \mathrm{Tr}D_iA$. A redukált sűrűség a marginális eloszlás analógiája, és ahhoz hasonlóan egy konkrét felbontáshoz tartozó redukált sűrűségek együttesen sem adnak teljes információt az állapotról.

A redukált sűrűségek kiszámolásához hasznos művelet a *parciális nyom*. Ha egy $H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ szorzattéren ható önadjungált operátorok között rögzítünk egy $\{B_1^{i_1} \otimes \ldots \otimes B_n^{i_n}\}_{i_1,\ldots,i_n}$ bázist, akkor a

$$\mathrm{Tr}_k(B_1^{i_1} \otimes \ldots \otimes B_n^{i_n}) = \mathrm{Tr}(B_k^{i_k})\, B_1^{i_1} \otimes \ldots \otimes B_{k-1}^{i_{k-1}} \otimes B_{k+1}^{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes B_n^{i_n}$$

kiterjed egy lineáris leképezéssé, és

$$D_i = \mathrm{Tr}_1 \ldots \mathrm{Tr}_{i-1}\mathrm{Tr}_{i+1} \ldots \mathrm{Tr}_n D$$

2.2. Kvantum bit és állapotának reprezentációja

Az egyik legegyszerűbb kvantummechanikai rendszer a kvantum bit (röviden qubit, vagy másnéven feles spin). A hozzá tartozó Hilbert-tér $\mathbb{C}^2$. A $\mathbb{C}^2$ téren ható önadjungált mátrixok terében ortogonális bázist alkotnak az $I = \sigma_0$ identitás és a

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pauli-mátrixok.

A Pauli-mátrixok önadjungáltak, nulla nyomúak, és teljesül rájuk a következő összefüggés:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}I + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\sigma_k \,,$$

ahol ϵ_{ijk} a Levi-Civita tenzor:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \exists j,k, \text{ hogy } i_j = i_k, \\ 1 & \text{ha } (i_1 i_2 \ldots i_n) \text{ páros permutáció}, \\ -1 & \text{ha } (i_1 i_2 \ldots i_n) \text{ páratlan permutáció}. \end{cases}$$

Egy feles spin állapota felírható

$$\frac{1}{2}(I + \sum_{i=1}^{3} x_i\sigma_i)$$

alakban, ahol $x_i \in \mathbb{R}$. Ekkor a pozitivitás kritériuma ekvivalens a $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \leq 1$ egyenlőtlenséggel, és tiszta állapotot kapunk pontosan akkor, ha $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1$. Így az állapotok egy-egyértelműen megfeleltethetőek az $\mathbb{R}^3$-beli egységgömb pontjainak, és ez a megfeleltetés lineáris. Ezt a reprezentációt nevezzük *Bloch-gömbnek*.

A Bloch-gömbbel történő ábrázolás nagy előnye, hogy könnyen képszerűsíthető.

Ennek a reprezentációnak egy általánosításához, az *általánosított Bloch-vektorhoz* jutunk, ha egy N-szintű rendszer esetén rögzítünk egy $\{\rho_i\}_{i=1}^{N^2-1}$ bázist a $\mathbb{C}^N$ nulla nyomú önadjungált operátorai között, és a

$$D = \frac{1}{N}I + \sum_{i=1}^{N^2-1}\lambda_i\rho_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$$

állapotnak a $\lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{N^2-1} \in \mathbb{R}^{N^2-1}$ vektort feleltetjük meg. A Bloch-vektorok tere $N \geq 3$ esetben nem olyan egyszerű, mint a Bloch-gömb, de mindig része az N-dimenziós egységgömbnek, és tetszőleges N-re a választott bázis bizonyos strukturális konstansaitól függő egyenlőtlenségek formájában pontosan megadható [6].

3. Két kvantum bit állapotának rekonstrukciója

Legyen a két kvantum bitből álló rendszerünk sűrűsége D^0. Ekkor az $M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$ szorzattéren képezhetjük a $D_1^0 = \mathrm{Tr}_2 D$ redukált sűrűséget. A rendszeren bekapcsolt kölcsönhatás egy unitér transzformációnak felel meg: $D^i = U_i D^0 U_i^*$ valamely U_i unitér transzformációval, és az ehhez tartozó redukált $D_1^i = \mathrm{Tr}_2 D^i$. Így redukáltak egy $\{D_1^i\}_{i=1}^{k}$ sorozatához jutunk. A kérdés az, hogy mekkora legyen k minimálisan, hogy az eredeti sűrűséget már meg tudjuk határozni. Megmutatjuk, hogy ez a minimum 5.

A sűrűség helyett az algebrát is transzformálhatjuk, azaz $M_4(\mathbb{C})$ algebrának olyan $\mathcal{A}_i$ részalgebráit keressük, melyek izomorfak az $M_2(\mathbb{C})$ algebrával, és kifeszítik a teljes $M_4(\mathbb{C})$ algebrát.

Mivel $\dim M_4(\mathbb{C}) \ominus \mathbb{C}I = 15$, és $\dim M_2(\mathbb{C}) \ominus \mathbb{C}I = 3$, ezért legalább 5 részalgebrára mindenképp szükség van. Azt kell tehát megmutatni, hogy ennyi elég is.

3.1. Absztrakt Pauli-mátrixok

Egy $S = \{S_i\}_{i=1}^3 \subset M_4(\mathbb{C})$ hármast *absztrakt Pauli-mátrix hármasnak*, vagy egyszerüen csak *Pauli-hármasnak* nevezünk, ha nulla nyomúak, önadjungáltak, és teljesül rájuk a Pauli-mátrixok szorzásszabálya, azaz

$$S_i S_j = \delta_{ij} I + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} S_k$$

Egyszerű számolásból következik, hogy ez ekvivalens a

$$S_1^2 = I, S_2^2 = I$$

$$S_1 S_2 + S_2 S_1 = 0$$

$$S_3 = -\mathrm{i} S_1 S_2$$

egyenletekkel.

Az $S_i \in M_4(\mathbb{C})$ absztrakt Pauli-mátrixok esetén a $\sigma_i \mapsto S_i$ megfeleltétes kiterjed az $M_2(\mathbb{C})$ algebrának az $M_4(\mathbb{C})$ algebrába való beágyazásává.

3.2. Elemi tenzorok esete

Elemi tenzornak nevezzük a $\sigma_{k(1)} \otimes \ldots \otimes \sigma_{k(n)}$ alakú szorzatokat.

A következő tétel mutatja, hogy két feles spin esetében elemi tenzorokból nem létezik minimális rekonstrukció.

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a két feles spinhez tartozó rendszer minden redukáltját elemi tenzorokból álló absztrakt Pauli-mátrix hármasokkal adunk meg. Ekkor legalább 6 redukált szükséges a rekonsrukcióhoz.*

Bizonyítás. Legyen egy ilyen redukált a $\{T_1, T_2, T_3\}$ Pauli hármas. Ha $T_1 = \sigma_i \otimes \sigma_j$ és $T_2 = \sigma_k \otimes \sigma_l$, $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$, akkor a T_i-kre vonatkozó szorzási szabályok alapján

$$\mathrm{i}\, T_3 = T_1 T_2 = (\sigma_i \sigma_k) \otimes (\sigma_j \sigma_l)$$

és az σ_i-kre vonatkozók alapján

$$\mathrm{i}\,T_3 = -\sum_{m,n}(\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\sigma_m\otimes\sigma_n)+\mathrm{i}(\delta_{ik}\sum_{n}(\epsilon_{jln}\sigma_0\otimes\sigma_n)+\delta_{jl}\sum_{m}(\epsilon_{ikm}\sigma_m\otimes\sigma_0))+\delta_{ik}\delta_{jl}\sigma_0\otimes\sigma_0$$

amiből (mivel T_3 önadjungált, de $\mathrm{i}\sigma_i \otimes \sigma_j$ nem az) látszik, hogy $i = k$ és $j = l$ közül pontosan az egyiknek kell fennállnia, és minden ilyen redukáltban legalább az egyik tagnak $\sigma_0 \otimes \sigma_j$ vagy $\sigma_j \otimes \sigma_0$ alakúnak kell lennie.

Viszont nyilván az sem lehet, hogy pontosan két ilyen tag van, mert

$$(\sigma_i \otimes \sigma_0)(\sigma_j \otimes \sigma_0) = \pm\mathrm{i}\sigma_k \otimes \sigma_0$$

is ilyen alakú, azaz három ilyen tagot kapunk, illetve $(\sigma_i\otimes\sigma_0)$ és $(\sigma_0\otimes\sigma_j)$ kommutálnak, így nem alkothatnak Pauli-mátrix hármast.

Ekkor viszont a skatulya elvből és abból, hogy összesen három-három $\sigma_0 \otimes \sigma_j$ és $\sigma_j \otimes \sigma_0$ alakú elemi tenzor van, következik, hogy ha a redukáltak elemei kifeszítik a teret, akkor legalább hat ilyen redukáltra van szükség. □

A tétel egy általánosítását Szőllősi Ferenc mutatta meg [9] az alábbi tétel formájában:

2. Tétel. *Ha az n feles spinből álló rendszer minden redukáltját elemi tenzorokból álló absztrakt Pauli-mátrix hármasokkal adunk meg, akkor több, mint $\frac{2^{2n}-1}{3}$ redukáltra van szükség.*

Bizonyítás. Világos, hogy egy elemi tenzor mátrix minden eleme tisztán valós vagy tisztán képzetes, mert az egyetlen Pauli-mátrixnak, amelynek képzetes elemei is vannak, minden eleme tisztán képzetes.

Ebből következik, hogy egy $\{T_1, T_2, T_3\}$ Pauli hármasnak vagy egy vagy három tisztán képzetes tagja van. Legyen egy rekonstrukcióban az előbbiek száma N, az utóbbiaké M. Ekkor, mivel a tisztán képzetes önadjungált mátrixok altere $\frac{2^{2n}-2^n}{2}$ dimenziós, ezért

$$N + 3M = \frac{2^{2n} - 2^n}{2}$$

ami nem állhat egyszerre fent a minimalitásból következő

$$N + M = \frac{2^{2n} - 1}{3}$$

egyenlőséggel. □

3.3. Rekonstrukció elemi tenzorokkal

A 1. tétel szerint öt elemi tenzorokkal generált részalgebrákkal nem létezik rekonstrukció, hattal viszont már igen. Az alábbi hatos egy lehetséges megoldást mutat.

$$\begin{array}{c}\{\sigma_1\otimes\sigma_1,\sigma_1\otimes\sigma_2,I\otimes\sigma_3\}\\ \{\sigma_2\otimes\sigma_2,\sigma_2\otimes\sigma_3,I\otimes\sigma_1\}\\ \{\sigma_3\otimes\sigma_3,\sigma_3\otimes\sigma_1,I\otimes\sigma_2\}\\ \{\sigma_2\otimes\sigma_2,\sigma_3\otimes\sigma_2,\sigma_1\otimes I\}\\ \{\sigma_3\otimes\sigma_3,\sigma_1\otimes\sigma_3,\sigma_2\otimes I\}\\ \{\sigma_1\otimes\sigma_1,\sigma_2\otimes\sigma_1,\sigma_3\otimes I\}\end{array} \tag{1}$$

Ez a rekonstrukció nem minimális, de jól áttekinthető a struktúrája, továbbá nem egyértelmű, például a Pauli-mátrixok indexeit testszőlegesen permutálva egy másik kapható.

3.4. Minimális rekonstrukció

A következő négy Pauli-hármast 0 nyomú elemi tenzorok alkotják:

$$\{I\otimes\sigma_1,\sigma_1\otimes\sigma_2,\sigma_1\otimes\sigma_3\}$$
$$\{I\otimes\sigma_2,\sigma_2\otimes\sigma_3,\sigma_2\otimes\sigma_1\}$$
$$\{\sigma_1\otimes I,\sigma_2\otimes\sigma_2,\sigma_3\otimes\sigma_2\}$$
$$\{\sigma_2\otimes I,\sigma_3\otimes\sigma_1,\sigma_1\otimes\sigma_1\}$$

Ha találunk hozzá egy olyan ötödik Pauli-hármast, hogy az azt alkotó mátrixok főátlója független, akkor egy teljes, és minimális rekonstrukciót kapunk. Erre egy példát Szőllősi Ferenc talált számíógépes kereséssel [9]:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}&\mathrm{i}&-1\\-\mathrm{i}&-1&-1&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&-1&1&-\mathrm{i}\\-1&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\mathrm{i}&1&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&1&\mathrm{i}&1\\1&-\mathrm{i}&1&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&1&-\mathrm{i}&-1\end{pmatrix}.$$

Az ötödik részalgebrát a fenti Hadamard-mátrixok [13] feszítik ki lineárisan.

Egy másik megközelítésben az ötödik részalgebrát véletlen unitér generálásával is kereshetjük [12].

3.5. Minimális rekonstrukció véletlen unitér transzformációkkal

Könnyen látható, hogy azok a $W_1, W_2, \dots, W_5$ unitér transzformációk, amelyekre az $W_i(I\otimes M_2(\mathbb{C}))W_i^*$ részalgebrák nem feszitik ki lineárisan a 4×4-es mátrixok algebráját egy alacsonyabb dimenziós részhalmazát alkotják az $U(2)$ Lie-csoport ötödik hatványának. Ezért ez a halmaz a Haar-mértékre nézve 0 mértékű kell, hogy legyen.

Ha tehát a W_i unitéreket a Haar-mérték szerint véletlenül választjuk, akkor a

$$\{W_i(I \otimes \sigma_j)W_i^*\}_{j=1}^3$$

Pauli-hármasok 1 valószínűséggel lineárisan függetlenek lesznek, és így az identitással együtt lineárisan kifeszítik az egész $M_4(\mathbb{C})$ algebrát [9, 12]. Ez a módszer tetszőleges számú feles spin esetében alkalmazható.

4. Komplementaritás

A komplementáris, vagy kölcsönösen torzítatlan bázisok fontos szerepet játszanak a például kvantumtomográfiában [14] és a kvantummechanika más területein [15]. A kölcsönösen torzítatlan mérések páronként komplementáris, maximális kommutatív algebráknak felelnek meg [5]. A következő tétel ennek egy analógiája:

3. Tétel. *[9] Legyenek az $\mathcal{A}_1$ és az $\mathcal{A}_2$ részalgebrái az $M_n(\mathbb{C})$ algebrának, és legyenek izomorfak az $M_k(\mathbb{C})$ algebrával. Ekkor az $\mathcal{A}_1 \ominus \mathbb{C}I$ és az $\mathcal{A}_2 \ominus \mathbb{C}I$ alterek pontosan akkor ortogonálisak, ha minden $P_1 \in \mathcal{A}_1$ és $P_2 \in \mathcal{A}_2$ minimális projekcióra* $\mathrm{Tr} P_1 P_2 = \frac{n}{k^2}$.

A hasonlóság indokolja a következő elnevezést: azt mondjuk, hogy a fenti tételben szereplő $\mathcal{A}_1$ és az $\mathcal{A}_2$ részalgebrák *komplementárisak*, ha az $\mathcal{A}_1 \ominus \mathbb{C}I$ és az $\mathcal{A}_2 \ominus \mathbb{C}I$ alterek ortogonálisak.

A komplementáris mérések hatékonyabb állapotrekonstrukciót tesznek lehetővé [14], ez az oka annak, hogy komplementáris részalgebrákat igyekszünk találni.

4.1. Hasznos unitérek

Felmerül a kérdés, hogy mikor lesz két részalgebra komplementáris. Valójában elég a $\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C})$ algebrával való komplementaritást vizsgálni, hiszen tetszőleges $U, W \in M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ unitér transzformációk esetén ha a $\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C})$ és $W(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))W^*$ algebrák komplementárisak, akkor nyilván az

$$U(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))U^* \quad \text{és} \quad UW(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))W^*U^*$$

algebrák is azok.

4. Tétel. *[10] Legyen $W = \sum_{ij} = E_{ij} \otimes U_{ij}$ unitér mátrix, ahol $E_{ij}, U_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$, és $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. A $W(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))W^*$ algebra pontosan akkor komplementáris a $\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C})$ algebrával, ha $\{W_{ij}\}$ ortonormált bázist alkot a $M_n(\mathbb{C})$ mátrixok között.*

A tételbeli W unitér mátrixokat *hasznos unitéreknek nevezünk.*

Hasznos unitérre egy jó példa a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & \sigma_3 \\ \sigma_1 & \mathrm{i}\sigma_2 \end{pmatrix}$$

blokkmátrix alakban írt transzformáció.

A tétel szerint k páronként komplementáris részalgebra létezése ekvivalens hasznos unitérek olyan $W_0 = I, W_1, W_2, \dots, W_{k-1}$ családjának létezésével, hogy $W_i W_j^*$ is hasznos unitér.

4.1.1. Konstrukció

Hasznos unitérek konstrukciójára jól használható az alábbi módszer.

Legyen $\{|e_i\rangle\}_{i=0}^{n-1}$ egy bázis, $q = e^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{n}}$ és legyenek X és Y a következő unitér transzformációk:

$$X|e_i\rangle = \begin{cases} |e_{i+1}\rangle, & \text{ha } i \in \{0, 1, \dots, n-2\} \\ |e_0\rangle, & \text{ha } i = n-1 \end{cases}$$

$$Y = \sum_i q^i |e_i\rangle\langle e_i|.$$

Látható, hogy $YX = qXY$, vagy általánosabban

$$Y^j X^k = q^{jk} X^k Y^j$$

teljesül. Legyen

$$S_{j,k} = Y^j X^k = \sum_{i=0}^{n-1} q^{ij} |e_i\rangle\langle e_{i+k}|,$$

ahol az indexbeli összeadás modulo n értendő. Ekkor

$$S_{j,k} S_{l,m} = q^{kl} S_{j+l,k+m},$$

és $\mathrm{Tr} S_{j,k} = 0$, kivéve, ha $j = 0$, vagy $k = 0$, így a $\{S_{j,k} : 0 \le j, k \le n-1\}$ unitér mátrixok páronként ortogonálisak. Legyen

$$U_{ij} = c_{ij} S_{i,j},$$

ahol (c_{ij}) unitér. Ha

$$W = \sum_{ij} = E_{ij} \otimes U_{ij},$$

akkor

$$(WW^*)_{ik} = \sum_j U_{ij} U_{kj}^* = \sum_j c_{ij} c_{kl}^* X^{i-k} = \delta_{ik} I$$

és W unitér mátrix. Másrészt $\mathrm{Tr} U_{ij} U_{ij}^* = |c_{ij}|^2 \mathrm{Tr} I = n|c_{ij}|^2$. Ha ez 1, akkor W egy hasznos mátrix lesz.

4.2. Komplementaritás két kvantum bit esetében

Ha $W \in M_4(\mathbb{C})$ hasznos unitér, akkor létezik W Cartan felbontása [11]:

$$W = (L_1 \otimes L_2)N(L_3 \otimes L_4),$$

ahol $L_i \in M_2(\mathbb{C}), i = 1, \dots, 4$ unitér mátrixok, és

$$N = e^{\mathrm{i} \sum_j \alpha_j \sigma_j \otimes \sigma_j} \in M_4(\mathbb{C})$$

unitér.

Egyszerű behelyettesítésből látszik, hogy a $W(\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C}))W^*$ algebra nem függ az L_3, L_4 mátrixoktól, a $\mathbb{C}I \otimes M_n(\mathbb{C})$ algebrával való komplementaritás pedig az L_1, L_2 mátrixoktól.

Így feltehetjük, hogy $L_i = I$. A 4. tétel alapján kapjuk, hogy

$$N = \sum_{i=0}^{3} c_i \sigma_i \otimes \sigma_i,$$

ahol

$$\begin{aligned}
c_0 &= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \mathrm{i} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \\
c_1 &= \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 + \mathrm{i} \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \\
c_2 &= \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 + \mathrm{i} \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \\
c_3 &= \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 + \mathrm{i} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3,
\end{aligned}$$

és

$$|c_i|^2 = \frac{1}{4},$$

azaz a (4.2) képletben szereplő α_i paraméterek közül kettő $\pi/4 + k\pi/2$ alakú, a harmadik tetszőleges [10]. Legyen $\mathcal{N}$ a feltételeket kielégítő unitér mátrixok halmaza, és

$$\mathcal{N}_i = \{N \in \mathcal{N} : \alpha_i \text{ tetszőleges, a másik kettő } \pi/4 + k\pi/2 \text{ alakú}\}$$

1. Lemma. *Ha* $N_i \in \mathcal{N}_i, akkor N_i(I \otimes \sigma_i)N_i^* = \pm\sigma_i \otimes I$

Bizonyítás. Jelöljük $\mathcal{N}$ elemeit $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$-al a paraméterek függvényeként. A c_i paraméterek szimmetriájából adódik, hogy ha ρ egy permutáció, akkor

$$N(\alpha_{\rho(1)}, \alpha_{\rho(2)}, \alpha_{\rho(3)}) = \sum_{i=0}^{3} c_{\rho(i)} \sigma_i \otimes \sigma_i = \sum_{i=0}^{3} c_i \sigma_{\rho(i)} \otimes \sigma_{\rho(i)},$$

ezért elég a tétel állítását egy konkrét i-re belátni.

Legyen $N_{k,l}(\phi) = N(\pi/4 + k\pi/2, \pi/4 + l\pi/2, \phi) \in \mathcal{N}_3$. Ekkor $N_{k,l}(\phi)$ az alábbi alakú:

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}(k-l)\pi)e^{\mathrm{i}\phi} & 0 & 0 & \sin(\frac{1}{2}(k-l)\pi)\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\phi} \\ 0 & \sin(\frac{1}{2}(k+l)\pi)e^{-\mathrm{i}\phi} & \cos(\frac{1}{2}(k+l)\pi)\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\phi} & 0 \\ 0 & cos(\frac{1}{2}(k+l)\pi)\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\phi} & -\sin(\frac{1}{2}(k+l)\pi)e^{-\mathrm{i}\phi} & 0 \\ \sin(\frac{1}{2}(k-l)\pi)\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\phi} & 0 & 0 & \cos(\frac{1}{2}(k-l)\pi)e^{\mathrm{i}\phi} \end{pmatrix}.$$

Mivel $N_{k,l}(\phi) = -N_{(k+2),l}(\phi)$, illetve $N_{k,l}(\phi) = -N_{k,(l+2)}(\phi)$, ezért elegendő az $\{N_{k,l}(\phi) : (k,l) \in \{0,1\}^2\}$ transzformációkat vizsgálni, az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} N_{0,0}(\phi)(I\otimes\sigma_1)N^*_{0,0}(\phi) &= \sin(2\phi)\sigma_1\otimes I + \cos(2\phi)\sigma_2\otimes\sigma_3, \\ N_{0,0}(\phi)(I\otimes\sigma_2)N^*_{0,0}(\phi) &= \sin(2\phi)\sigma_2\otimes I - \cos(2\phi)\sigma_1\otimes\sigma_3, \\ N_{0,0}(\phi)(I\otimes\sigma_3)N^*_{0,0}(\phi) &= \sigma_3\otimes I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{0,1}(\phi)(I\otimes\sigma_1)N^*_{0,1}(\phi) &= -\sin(2\phi)\sigma_1\otimes I - \cos(2\phi)\sigma_2\otimes\sigma_3, \\ N_{0,1}(\phi)(I\otimes\sigma_2)N^*_{0,1}(\phi) &= \sin(2\phi)\sigma_2\otimes I - \cos(2\phi)\sigma_1\otimes\sigma_3, \\ N_{0,1}(\phi)(I\otimes\sigma_3)N^*_{0,1}(\phi) &= -\sigma_3\otimes I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1,0}(\phi)(I\otimes\sigma_1)N^*_{1,0}(\phi) &= \sin(2\phi)\sigma_1\otimes I + \cos(2\phi)\sigma_2\otimes\sigma_3, \\ N_{1,0}(\phi)(I\otimes\sigma_2)N^*_{1,0}(\phi) &= -\sin(2\phi)\sigma_2\otimes I + \cos(2\phi)\sigma_1\otimes\sigma_3, \\ N_{1,0}(\phi)(I\otimes\sigma_3)N^*_{1,0}(\phi) &= -\sigma_3\otimes I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1,1}(\phi)(I\otimes\sigma_1)N^*_{1,1}(\phi) &= -\sin(2\phi)\sigma_1\otimes I - \cos(2\phi)\sigma_2\otimes\sigma_3, \\ N_{1,1}(\phi)(I\otimes\sigma_2)N^*_{1,1}(\phi) &= -\sin(2\phi)\sigma_2\otimes I + \cos(2\phi)\sigma_1\otimes\sigma_3, \\ N_{1,1}(\phi)(I\otimes\sigma_3)N^*_{1,1}(\phi) &= \sigma_3\otimes I \end{aligned}$$

Az egyenlőségekből látható, hogy valóban teljesül a lemma állítása. Látható az is, hogy az $N_{k,l}(\phi)(\mathbb{C}I\otimes M_n(\mathbb{C}))N^*_{k,l}(\phi)$ algebra nem függ k és l választásától. □

A 1. lemma egy fontos következménye a következő két tétel:

5. Tétel. *Ha $\mathcal{A}$ az $M_4(\mathbb{C})$ algebra részalgebrája az $M_2(\mathbb{C})$ algebrával izomorf, és az $\mathbb{C}I\otimes M_2(\mathbb{C})$ algebrával komplementáris, akkor $\mathcal{A}$ és $M_2(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}I$ metszete nem triviális.*

Bizonyítás. Van olyan $W = (L_1\otimes L_2)N$ hasznos unitér és $i \in \{1,2,3\}$, hogy $N \in \mathcal{N}_i$, és $\mathcal{A} = W(\mathbb{C}I\otimes M_n(\mathbb{C}))W^*$. Ekkor

$$(L_1\otimes L_2)N(I\otimes\sigma_i)N^*(L_1^*\otimes L_2^*) = \pm L_1\sigma_i L_1^*\otimes I,$$

és $L_1\sigma_i L_1^* \neq cI$, hiszen σ_i spektruma $\{1,-1\}$. □

6. Tétel. *Az $M_4(\mathbb{C})$ algebrának nincs 5 páronként komplementáris, az $M_2(\mathbb{C})$ algebrával izomorf részalgebrája.*

Bizonyítás. Legyenek az $\{\mathcal{A}\}_{i=1}^{4}$ algebrák a tétel feltételében szereplő tulajdonságúak. Ekkor az $\mathcal{A}_i$ algebra metszete a $(M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}I) \ominus \mathbb{C}(I \otimes I)$ térrel legalább 1 dimenziós, és mivel $\dim(M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}I) \ominus \mathbb{C}(I \otimes I) = 3$, ezért az $\mathcal{A}_i$ algebrák nem lehetnek páronként komplementárisak. $\square$

A 6. tétel első bizonyítását Petz Dénes és Jonas Kahn adta [10].

4.2.1. Páronként komplementáris algebrák ortokomplementuma

Érdekes kérdés az, hogy a 4 részalgebra ortogonális komplementuma (az identitást hozzáadva) algebra struktúrával is rendelkezik-e, és ha igen, milyennel? Azt találtuk, hogy elemi tenzorok esetében ez egy kommutatív algebra lesz, és azt sejtük, hogy ez mindig így van.

7. Tétel. *Ha az $\mathcal{A}_i \subset M_4(\mathbb{C}), i = 1, \ldots, 4$ elemi tenzorokkal generált részalgebrák az $M_2(\mathbb{C})$ algebrával izomorfak és páronkét komplementárisak, akkor az ortogonális komplementumuk egy kommutatív algebra.*

Bizonyítás. Minden az $\mathcal{A}_i$ részalgebrához tartozó Pauli-hármas tartalmaz pontosan egy vagy három $\sigma_k \otimes I$ vagy $I \otimes \sigma_k$ alakú elemet (lásd az 1.tétel bizonyításában). Tegyük fel, hogy az egyik, például $\mathcal{A}_0$ az $\mathbb{C}I \otimes M_2$ részalgebra. Ekkor az 5. tétel miatt minden $\sigma_j \otimes I, j = 1, 2, 3$ benne van pontosan az egyik részalgebrához tartozó Pauli-hármasban, legyen ez $\mathcal{A}_j$. Tehát az $\mathcal{A}_j$ részalgebrát generáló Pauli-hármas $\{\sigma_{k_j} \otimes \sigma_{n_j}, \sigma_{l_j} \otimes \sigma_{n_j}, \sigma_j \otimes I\}$ alakú, ahol rögzített j-re k_j, l_j, j különbözők, nem nullák, és ugyan ez teljesül az n_1, n_2, n_3 indexekre is. Tehát a három kimaradó elemi tenzor a $\{\sigma_j \otimes \sigma_{n_j}\}_{j=1}^{3}$, és ezek az indexek különbözősége miatt egy kommutatív algebrát generálnak. Az $\mathcal{A}_0 = M_2 \otimes \mathbb{C}I$ eset ugyanígy bizonyítható.

Tegyük fel most azt, hogy nincs a négy részalgebra között $\mathbb{C}I \otimes M_2$. Ekkor, mivel összesen hat $\sigma_k \otimes I$ vagy $I \otimes \sigma_k$ alakú elemi tenzor van, ezért ezek közül kettő olyan van, amelyik nem eleme egyik $\mathcal{A}_i$ részalgebrának sem.

Belátjuk, hogy az nem lehet, hogy a két kimaradó elemi tenzorban az identitás ugyan abban a tenzorfaktorban van. Tegyük fel indirekt, hogy az $\mathcal{A}_0$ részalgebrához tartzó Pauli-hármas a $\{\sigma_r \otimes I, \sigma_y \otimes \sigma_x, \sigma_z \otimes \sigma_x\}, x \neq 0$, és az $\mathcal{A}_k, k = 1, 2, 3$ részalgebrához tartzó pedig a $\{I \otimes \sigma_k, \sigma_{l_k} \otimes \sigma_{m_k}, \sigma_{l_k} \otimes \sigma_{n_k}\}$, ahol m_k, n_k, k különbözők, nem nullák, és ugyanez teljesül az r, y, z indexekre is. Nyilván ha $p \neq q$, akkor $l_p \neq l_q$, hiszen csak három $\sigma_{l_k} \otimes \sigma_s, s \neq 0$ alakú elemi tenzor van, és így $\sigma_{l_m} \otimes \sigma_x \notin \mathcal{A}_k \forall k$ pontosan akkor, ha $m = x$. Ekkor viszont az $\mathcal{A}_0$ részalgebrának a többi részalgebrával való komplementaritásához az $z = l_x = y$ egyenlőségnek teljesülnie kell, ami viszont ellentmondás, mert $z \neq y$.

Ezek alapján feltehetjük, hogy $\{\sigma_r \otimes I, I \otimes \sigma_s\} \cap \mathcal{A}_k = \emptyset, k = 0, 1, 2, 3$, ahol r, s nem nullák. $\sigma_r \otimes \sigma_s$ nem lehet benne egyik $\mathcal{A}_k$ részalgebrában sem, mert ha például az $\mathcal{A}_0$ algebrához tartozó Pauli-hármas a $\{\sigma_n \otimes I, \sigma_r \otimes \sigma_s, \sigma_m \otimes \sigma_s\}$ lenne, ahol n, r, m különbözők, nem nullák, akkor, mivel abban a két részalgebrában, melyek Pauli-hármasában van $I \otimes \sigma_p$ alakú tag, kell lennie $\sigma_q(p) \otimes \sigma_s$ alakú tagnak is, már négy $\sigma_x \otimes \sigma_s, x \neq 0$ alakú elemi tenzort kapnánk, ami ellentmond az $\mathcal{A}_k$ részalgebrák komplementaritásának. Ekkor viszont $\sigma_r \otimes \sigma_s \notin \mathcal{A}_k$, és a $\{\sigma_r \otimes I, I \otimes \sigma_s, \sigma_r \otimes \sigma_s\}$ Pauli-hármas egy kommutatív részalgebrát generál. □

5. Összefoglalás

Az állapotrekontstrukciót abban az esetben vizsgáltuk, amikor a mérések csak az egyik biten hajthatók végre a két kvantum bitből álló rendszerben.

Beláttuk, hogy két kvantum bit esetében elemi tenzorokból legalább hatra van szükség a rekonstrukcióhoz, és megadunk egy Hadamard mátrixokat használó rekonstrukciót is. Ezen túlmenően mutattunk egy algoritmust véletlenül generált minimális rekonstrukció előállítására [9], ahol az utóbbi tetszőleges méretű rendszerre kiterjeszthető.

Vizsgáltuk a komplementaritást két kvantum bit esetében, és új bizonyítást adtunk a komplementáris algebrák maximális számáról szóló tételre [10], valamint megmutattuk, hogy ha a négy komplementáris algebrát elemi tenzorok generálják, akkor az ortogonális komplementumuk kommutatív algebra.

5.1. További kutatási irányok

A további kutatások során szeretnénk meghatározni két qubit esetében a páronként komplementáris algebrák ortokomplementumát az általános esetben, és megbecsülmi a komplementáris részalgebrák számát több kvantum bit esetén. Világos, hogy az n kvantum bitből álló rendszer $2^{2n} - 1$ dimenziós, így legfeljebb $\frac{2^{2n}-1}{3}$ ilyen algebra lehet, de a 2. Tétel alapján arra következtethetünk, hogy a felső korlát általában nem érhető el.

Hivatkozások

[1] C. W. Helstrom: *Quantum Decision and Estimation Theory*, Academic Press, New York, 1976.

[2] M. A. Nielsen, I. L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.

[3] M. Ohya, D. Petz: *Quantum Entropy and its Use*, Springer-Verlag, Berlin, 1993. 2nd ed. 2004.

[4] A. Klappenecker, M. Rötteler: Constructions of mutually unbiased bases, *arXiv:quant-ph/0309120*, 2003.

[5] K. R. Parthasarathy: On estimating the state of a finite level quantum system, *arXiv:quant-ph/0408069*, 2004.

[6] G. Kimura: The Bloch-vector for N-level systems, *Physics Letters A*, **314**, 5-6, 339-349, 2003.

[7] D. Petz: *Lectures on Quantum Information Theory*, kézirat, 2005.

[8] Petz D.: *Lineáris Analízis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2001.

[9] D. Petz, K. M. Hangos, F. Szöllősi, A. Szántó: State tomography for two qubits using reduced densities, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**(2006) 10901-10907.

[10] D. Petz, J. Kahn: Complementary reductions for two qubits, *arXiv:quant-ph/0608227*, 2006.

[11] J. Zhang, J. Vala, K. B. Whaley, S. Sastry: A geometric theory of non-local two-qubit operations, *Phys Rev. A*, **67**, 042313 2003.

[12] Hangos K. M.: Systems and control methods for quantum systems, http://daedalus.scl.sztaki.hu/PCRG/quantum, 2006.

[13] W. Tadej, K. Zyczkowski: A concise guide to complex Hadamard matrices, *arXiv:quant-ph/0512154*, 2005.

[14] W. K. Wooters, B. D. Fields: Optimal state determinationby mutually unbiased measurements *Ann. Phys.*, NY, **191** 363-81, 1989.

[15] K. Kraus: Complementarity and uncertainty relations *Phys. Rev.* D **35** 3070-5, 1987.