VIK A3 Matematika, Gyakorlati anyag 2.

2018. november

Sorok

1. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjuk meg a határértéküket!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

   (f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}}$

   (g) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2}-(-2)^{k+2}}{5^k}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (def alapján!)

2. Alternáló sorok, Leibniz kritérium. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjunk közelítést a sorösszegre, legfeljebb 0.1-es pontossággal!

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\lg n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

   (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n}{n^2-1}$

   (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-n}{n+1}\right)^n$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1000}$

3. Majoráns és minoráns kritérium.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^6+2n^2-\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5+n^3+1}{n^8-n^2+3}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^7+n^2-n+3}$

(j) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

4. Konvergensek-e az alábbi sorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1}\right)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$

(f) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{ha } n = 2k-1 \\ \frac{1}{3^n}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan n\right)^n$

5. Integrálkritériummal döntsük el, hogy konvergensek-e?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
   (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$

6. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét legfeljebb 10^{-3} hibával, amennyiben konvergensek!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^n$
   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!-n!}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n+10^n}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$

7. Mekkora hibát követümk el, ha a sorösszeget a 10. részletösszeggel közelítjük?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+\sqrt{2}}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3^n}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}+n^2+3}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n^2+n}$

8. Abszolút illetve feltételesen konvergensek-e? (**iMSc**)

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+4)}{n^2+4}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-3n+8}$
   (d) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} - \dots$
   (e) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \dots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \dots$

9. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} x^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{\sqrt{(4n-1)2^n}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}5^{\sqrt{n}}}$

10. Adjuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^{n+1}}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{5^{n+2}}x^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}(x+4)^n$

11. (**iMSc**) Bizonyítsuk be, hogy

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots\right).$$

Útmutatás: Irjuk fel $\arctan x$ 0 körüli Taylor-sorát, az $\frac{1}{1+x^2}$ geometriai sor integrálásával, és éljünk az $x=1$ helyettsítéssel!

12. Adjuk meg az

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\, \mathrm{d}\, x$$

integrál értékét $0,01$ pontossággal!

13. (**iMSc**) Adjuk meg az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

14. (**iMSc**) Adjuk meg az

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét! Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

15. Adjuk meg az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^2}$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét! ($\frac{1}{1-x}$ deriválásával)

16. Adjuk meg a következő függvvények $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát és határozzuk meg a sor konvergenciatartományát!

   (a) $f(x) = \arctan 2x$
   (b) $f(x) = \frac{3}{8+x^3}$
   (c) $f(x) = \sin^2 x$
   (d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
   (e) $f(x) = \sqrt[3]{1-2x^2}$
   (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{27-x}}$
   (g) $f(x) = e^{-2x^2}$
   (h) $f(x) = \cos x^2$

17. Adjuk meg a következő függvvények $x_0 = 1$ körüli Taylor-sorát és határozzuk meg a sor konvergenciatartományát!

   (a) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 3$
   (b) $f(x) = e^{-2x}$
   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$
   (d) $f(x) = e^x$

18.

$$f(x) = x^5 e^x, \quad f^{(67)}(0) = ?$$

19.

$$f(x) = \ln(8 - 3x^2), \quad f^{(9)}(0) = ?, \quad f^{(10)}(0) = ?$$

20.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(n^3 x^2 + \pi)}{3^n + n^2 x^2} =$$

21. Adjuk meg

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$$

0 körüli Taylor-sorát és konvergenciatartományát! Mennyi

$$(x^{100} f(x))^{(200)}(0)?$$

22.

$$f(x) = \sqrt[12]{1+2x^2} - \sqrt[18]{1+3x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} =?$$

23. Adjuk meg

$$\int_0^1 \cos x^2 \,\mathrm{d}\, x$$

értékét 2 tizedesjegy pointossággal!

24. Adjuk meg

$$\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \,\mathrm{d}\, x$$

értékét 2 tizedesjegy pointossággal!

25. Adjuk meg

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}\, x$$

értékét 2 tizedesjegy pontossággal!

Vektoranalízis

1. Számoljuk ki az alábbi térgörbék ívhosszát!

   (a) $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \sin t\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

   (b) $\mathbf{r}(t) = (t+1)\,\mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\,\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{2t^3}}{3}\,\mathbf{k}$, $-2 \le t \le 0$

   (c) $\mathbf{r}(t) = (\sinh t + \cosh t)\,\mathbf{i} + (\cosh t - \sinh t)\,\mathbf{j} + \sqrt{2}t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le \ln 2$

   (d) $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\,\mathbf{i} + \sin^3 t\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

2. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(u,v)$ vektor-vektor függvénnyel adott felület (u_0, v_0) paraméterponthoz tartozó érintősíkjának egyenletét!

   (a) $\mathbf{r}(u,v) = (u^2 - 2v^2)\,\mathbf{i} + (uv - v^3)\,\mathbf{j} + (u^4 - 2v)\,\mathbf{k}$, $(u_0, v_0) = (-1, 1)$

   (b) $\mathbf{r}(u,v) = (2v + \cos u)\,\mathbf{i} + (\sin u - v)\,\mathbf{j} + 3v\,\mathbf{k}$, $(u_0, v_0) = (\pi, 1)$

3. Az $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ egyenletű felülethez keressünk olyan érintősíkokat, melyek párhuzamosak az $x + 4y + 6z = 0$ síkkal! (**IMSC**)

4. Az a paraméter mely értékeinél érinti az $x + 2y + 3az = -1$ sík az $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ egyenletű hiperboloidot?(**IMSC**)

5. A $z^2 = x^2 + y^2$ egyenleű kúpfelületnek vannak-e olyan pontjai, melyekhez tartozó érintősíkok párhuzamosak a $2x + y = 2z$ síkkal, és átmennek a $P(3, 1, -1)$ ponton? (**IMSC**)

6. Számoljuk ki az adott felületdarabok felszínét!

   (a) $\mathbf{r}(u,v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u\cos v\,\mathbf{j} + 2u \sin v\,\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1{,}0 \le v \le \frac{\pi}{2}$

   (b) $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u \sin v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $-1 \le u \le 1{,}0 \le v \le 2\pi$

   (c) $\mathbf{r}(u,v) = u \cos \ln v\,\mathbf{i} + u \sin \ln v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$, $0 \le u \le 2{,}1 \le v \le 2$

   (d) $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$

   (e) $x^2 = 2yz$, $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$

   (f) Számítsuk ki az $y^2 + z^2 = x^2$ egyenletű kúpfelület nemnegatív x koordinátákhoz tartozó és az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű hengeren belüli darabjának a felszínét! (**IMSC**)

7. Számoljuk ki az adott $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvények divergenciáját és rotációját! Ha léteznek, adjuk meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvények $U(\mathbf{r})$ potenciálfüggvényét is!

   (a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x^2y - y^3)\,\mathbf{i} + (x^3 - 3xy^2)\,\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2 - y^2)\,\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\,\mathbf{j} + (z^2 - x^2)\,\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz - xz)\,\mathbf{i} + (xz - \frac{x^2}{2} + yz^2)\,\mathbf{j} + (xy + y^2 z)\,\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 5\,\mathbf{r}$

(e) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \ln |\,\mathbf{r}\,|$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ rögzített

(f) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\,|\,\mathbf{r}\,|$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ rögzített

8. Számoljuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvények görbementi integrálját az adott G görbe mentén!

(a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 - x^2)\,\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} - x^2\,\mathbf{k}$, $\quad G : (t, t^2, t^3)$, $\quad 0 \leq t \leq 1$

(b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y + z)\,\mathbf{i} + (x + z)\,\mathbf{j} - (x + y)\,\mathbf{k}$, $\quad G : \mathbf{r}(t) = \sin^2 t\,\mathbf{i} + \sin 2t\,\mathbf{j} + \cos^2 t\,\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$

(c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy - z)\,\mathbf{i} + (x^2 + z)\,\mathbf{j} + (y - x)\,\mathbf{k}$, ahol G az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 1$ egyenletű ellipszis, pozitív körüljárási iránnyal.

(d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, G az xy síkban fekvő origó középpontú egységkör negatív körüljárással.

9. Számoljuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvények felületmenti integrálját az adott F felület mentén!

(a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\quad F : \mathbf{r}(u, v) = (u + 2v)\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + (u - v)\,\mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 1$

(b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$, $\quad F : \mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \sin v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$

(c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, $\quad F : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $\quad z \geq 0$

(d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}\,|^3$, F az origó körüli egységgömbfelszín befelé mutató normálissal.

10. Számoljuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvények görbementi integrálját az adott G úton, ha lehet Stokes-tétellel!

(a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y + z)\,\mathbf{i} + (x + z)\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}$, $\quad G : \mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -x^y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$, $G : x^2 + y^2 = 4$, $\quad z = 0$, pozitív forgásiránnyal

(c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy - z)\,\mathbf{i} + (x^2 + z)\,\mathbf{j} + (y - x)\,\mathbf{k}$, ahol G az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 1$ egyenletű ellipszis, pozitív körüljárási iránnyal.

(d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, G az xy síkban fekvő origó középpontú egységkör negatív körüljárással.

11. Számoljuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvények felületmenti integrálját az adott F felület mentén Gauss-Osztrogradszkij-tétellel!

   (a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}, \quad F: x^2 + y^2 + z^2 = 25$, befele mutató normálissal

   (b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 3xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - 4xz\,\mathbf{k}, \quad F: x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 4 = 0$, kifele mutató normálissal.

   (c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2y^2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, ahol F a $z = 25 - x^2 - y^2$ és $z = 0$ által határolt zárt felület, kifele mutató normálissal.

   (d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, F a koordinátasíkok és az $x^2 + y^2 + 2z = 1$ által határolt zárt felület, kifele mutató normálissal. (**IMSC**)