VIK A3 Matematika 2018/19 I. félév, Differenciálegyenletek

1-4. gyakorlatok

Minden feladattípusból legfeljebb 2-3 darab szerepeljen a gyakorlatokon, a többi otthoni gyakorlásra szolgál. Ha valamelyikkel nem boldogulnak, kérésre térjünk vissza rá. Az **iMSc** jelű feladatokkal csak az iMSc gyakorlatokon foglalkozzunk! A feladatsorban végig $y = y(x)$ függést tételezünk fel!

1. Elsőrendű differenciálegyenletek

1. **Írjuk fel az alábbi paraméteres síkgörbeseregek differenciálegyenletét!**
   (a) $y = cx^2$
   (b) $x^2 + y^2 = cx$
   (c) $y = ae^{x/a}$, $a \neq 0$ (**iMSc**)
   (d) $y = c_1x^2 + c_2e^{2x}$ (**iMSc**)
   (e) $(x - u)^2 + (y - v)^2 = 2$
   (f) $y = e^x(c_1x + c_2)$
   (g) $ax + by^2 + c = 0$, $b \neq 0$
   (h) $y = ae^{bx}$

2. Határozzuk meg azoknak az xy síkban fekvő köröknek a differenciálegyenletét, melyek az x-tengelyt (y-tengelyt) az origóban érintik!

3. Határozzuk meg azoknak az xy síkban fekvő paraboláknak a differenciálegyenletét, melyeknek a tengelye párhuzamos az y-tengellyel, átmennek az origón és a $P(a, 0)$ ponton! (**iMSC**)

4. Határozzuk meg azoknak az xy síkban fekvő paraboláknak a differenciálegyenletét, melyeknek a tengelye párhuzamos az x-tengellyel, csúcspontjai pedig az $y = x$ egyenesen fekszenek! (**iMSC**)

1.1. Szétválasztható változójú és arra visszavezethető differenciálegyenletek

1. Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú differenciálegyenleteket, illetve kezdeti érték problémákat!

   (a) $(2x+1)y' - 3y = 0$

   (b) $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$

   (c) $y' = \frac{e^x}{y}$, $y(0) = 1$

   (d) $y' = -\frac{\sin x}{y}$, $y(0) = -2$

   (e) $(x^2+1)\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}\,y = 0$, $y(-1) = 1$

   (f) $y' = \frac{x+1}{y^4+1}$, $y(0) = 0$

   (g) $y' = y^2x^3$, a) $y(0) = 0$, b) $y(0) = 1$

   (h) $xy' - y = y^3$, $x \neq 0$

2. A kemencéből kivett kenyér 10 perc alatt $100°C$-ról $60°C$-ra hül le. A környező levegő hőmérséklete $20°C$. Mikorra hül le a kenyér $25°C$-ra? Használjuk fel a Newton-féle hülési törvényt, mely szerint egy test hőmérsékletének változási sebessége egyenesen arányos a környezet és a test hőmérsékletének különbségével, azaz $T'(t) = K(T_k - T(t))$, ahol $K > 0$ állandó, T_k a külső hőmérséklet.

3. **Szétválasztható változójúra visszavezethető diffegyenletek I.**
   ($y' = f(\frac{y}{x})$ típusúak, $u = \frac{y}{x}$ helyettesítés)

   (a) $y' = \frac{x+y}{x}$

   (b) $y' = \frac{x+2y}{x}$

   (c) $y' = \frac{2y^4+x^4}{xy^3}$

   (d) $(x^2+xy+y^2)\,\mathrm{d}\,x = x^2\,\mathrm{d}\,y$

   (e) $(xe^{y/x}+y)\,\mathrm{d}\,x = x\,\mathrm{d}\,y$

4. **Szétválasztható változójúra visszavezethető diffegyenletek II.**
   ($y' = f(ax+by+c)$ típusúak, $u = ax+by+c$ helyettesítés

   (a) $y' = \frac{1-x-y}{2x+2y-3}$, $(u = x+y)$

   (b) $(2x-5y+3)\,\mathrm{d}\,x - (2x+4y-6)\,\mathrm{d}\,y = 0$

   (c) $(x+y)\,\mathrm{d}\,x + (3x+3y-4)\,\mathrm{d}\,y = 0$

   (d) $y' = (y-x)^2$

(e) $y' = (3x + 4y)^2$

(f) $y' = \sqrt{y - 2x}$

(g) $y' = \frac{1}{x+y}$

1.2. Egzakt differenciálegyenletek

Az egzakt differenciálegyenleteket megoldására mutassunk példát görbementi integrálásos módszerre is és szukcesszív integrálásos módszerre is (ha a tartomány egyszeresen összefüggő)!

1. Igazoljuk, hogy az alábbi differenciálegyenletek egzektak és oldjuk meg őket!

   (a) $e^y + (xe^y - 2y)y' = 0$

   (b) $2x^3 - xy^2 + (2y^3 - x^2y)y' = 0$

   (c) $2xy \,\mathrm{d}\,x + (1 + x^2) \,\mathrm{d}\,y = 0$

   (d) $\ln(y^2 + 1) \,\mathrm{d}\,x + \frac{2y(x-1)}{y^2+1}$

   (e) $6y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

   (f) $y' + y = e^{-x}$

   (g) $\sqrt{1 + x^2}y' + y = 2x$

   (h) $x(1 - x^2)y' + (2x^2 - 1)y = x^3 - x^5$

   (i) $y' \cos x + y \sin x - \cos^2 x = 0$

   (j) $y' + 2y = x^2 + 3 \cosh x$

   (k) $y' \tan x + y = \sin 3x + \frac{1}{\sin 2x}$ **(iMSc)**

   (l) $y' \sin x - y \cos x = e^x \sin^2 x$ **(iMSc)**

2. Oldjuk meg integráló tényező keresésével a következő differenciálegyenleteket! (Csak x-től, vagy csak y-tól függő multiplikátorokkal foglalkozzunk!)

   (a) $y + (ye^x - 1)y' = 0$

   (b) $\frac{x+y}{y} + \frac{2x+3y^2}{2y}y' = 0$

   (c) $2x - y \cos y + (x \sin y)y' = 0$

   (d) $y^2 + 1 + (xy + 1)y' = 0$

   (e) $x^3 + y^4 + 8xy^3y' = 0$ **(iMSc)**

   (f) $e^{-y} + (xe^{-y} - 2ye^{-2y})y' = 0$ **(iMSc)**

1.3. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

1. Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémákat!
   (a) $xy' + 2y = 3x$, $y(0) = 0$
   (b) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 1$
   (c) $y' + x^2 y = x^2$, $y(2) = 1$
   (d) $y' + \frac{y}{x} + e^x = 0$, $y(1) = 0$

2. Egy C kapacitású kondenzátort egy R ellenállással sorba kötve rákapcsolunk egy U feszültségre. Ekkor a Q töltés időfüggését a
$$R\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} + \frac{Q}{C} = U$$
differenciálegyenlet adja meg. Írjuk fel Q időfüggését, ha $t = 0$-ban $Q = 0$ és $U =$állandó. Mi történik, ha $U = U_0 \sin \omega t$? (**iMSc**)

3. Egy L önindukciójú tekercsre, egy R ellenállással sorba kötve rákapcsolunk egy $U_0 \cos \omega t$ váltakozó feszültségre. Ekkor az I áramerősség időfüggését a
$$L\frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,t} + RI = U_0 \cos \omega t$$
differenciálegyenlet adja meg. Írjuk fel I időfüggését, ha $t = 0$-ban $I = 0$. Disszkutáljuk a történteket az R/L hányados függvényében! (**iMSc**)

4. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket a javasolt helyettesítések alkalmazásával! (**iMSc**)
   (a) $3xy' - 2y = x^3 y^{-2}$, $u(x) := y^3(x)$
   (b) $y(xy+1) + x(1 + xy + x^2y^2)y' = 0$, $u(x) := xy(x)$
   (c) $(x^2y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0$, $u(x) := \frac{1}{xy(x)}$
   (d) $xy' \sinh y - \cosh y = x^2 \sinh x$, $u(x) := \cosh y(x)$
   (e) $xy' \sin y + \cos y = 1$, $u(x) := \cos y$

5. Izoklínák (Mondjuk el a gyakorlaton röviden, hogy mi az!)
   (a) Írjuk fel az $y' = x - y^2$ izoklínáinak egyenletét. Mely pontokban van a megoldásoknak szélsőértéke és milyen a szélsőérték jellege?
   (b) Milyen lokális tulajdonsága van az $y' = x^3 + y^3 - 9$ differenciálegyenlet $(2, 1)$ ponton átmenő megoldásának az adott pontban?

2. Magasabbrendű differenciálegyenletek

2.1. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

1. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek I.
   $F(x, y', y'') = 0$ típus, $p(x) := y'(x)$ helyettesítéssel.

   (a) $xy''(e^{y'} + 1) - e^{y'} - y' = 0$
   (b) $(1 - x^2)y'' + xy' = 0$
   (c) $(y'')^2 = y'$
   (d) $y'(1 + (y')^2) - 3y'' = 0$
   (e) $y'' + (y')^2 = 1$
   (f) $y'' - \frac{1}{x}y' + (y')^2 = 0$
   (g) $y'' = x(y')^3$

2. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek II.
   $F(y, y', y'') = 0$ típus, $y'(x) = p(y(x))$ helyettesítés, ahol y-t tekintjük független változónak.

   (a) $y' - 1 = yy''$
   (b) $y^3y'' = 1$
   (c) $yy'' = 1 + (y')^2$
   (d) $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$
   (e) $y(y'')^2 = 1$
   (f) $yy'' = 2(y')^2$

2.2. Lineáris differenciálegyenletek

1. Vizsgáljuk meg, hogy az adott Y_1, Y_2, illetve Y_1, Y_2, Y_3 függvények hol képezik az ugyanott szereplő differenciálegyenletek alaprendszerét. Írjuk fel az általános megoldást is!

   (a) $xy'' - (x + 1)y' + y = 0$; $Y_1(x) = e^x, Y_2(x) = -(x + 1)$
   (b) $y'' \sin^2 x + y' \sin x \cos x - y = 0$; $Y_1(x) = \cot x, Y_2(x) = \frac{1}{\sin x}$
   (c) $xy''' - y'' + xy' - y = 0$; $Y_1(x) = x, Y_2(x) = \cos x, Y_3(x) = \sin x$
   (d) $xy''' + 2y'' = 0$; $Y_1(x) = 1, Y_2(x) = x, Y_3(x) = \ln x$
   (e) $xy''' - y'' - xy' + y = 0$; $Y_1(x) = x, Y_2(x) = \cosh x, Y_3(x) = \sinh x$

(f) $xy'' - 2y' = 0$; $Y_1(x) = x^3, Y_2(X) = 1$

2. Határozzuk meg az állandók variálásának módszerével az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyetek általános megoldását, ha ismerjük a hozzájuk tartozó homogén egyenlet $\{Y_1, Y_2\}$ alaprendszerét!

   (a) $xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x$; $Y_1(x) = e^x, Y_2(x) = -(x+1)$
   (b) $y'' \sin^2 x + y' \sin x \cos x - y = x \sin^2 x$; $Y_1(x) = \cot x, Y_2(x) = \frac{1}{\sin x}$
   (c) $xy'' + (x-1)y' - y = x^2$; $Y_1(x) = e^{-x}, Y_2(x) = x - 1$
   (d) $x^2y'' - 2y = 4x^3$; $Y_1(x) = \frac{1}{x}, Y_2(x) = x^2$
   (e) $xy'' + 2y' + xy = 1$; $Y_1(x) = \frac{\sin x}{x}, Y_2(x) = -\frac{\cos x}{x}$
   (f) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = (x \ln x - x)^2$; $Y_1(x) = x, Y_2(x) = x^2 - 1$

3. **Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek**
   Adjuk meg a következő differenciálegyenletek általános megoldását! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását kereshetjük kisérletező feltevéssel, vagy ha szükséges, állandók variálásának módszerével!

   (a) $y'' - y = x^2 - x + 1 + e^x$
   (b) $y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' = x + 1$
   (c) $y^{(4)} - 2y'' + y = 2e^x$
   (d) $y'' - 2y' = e^x \sin x$
   (e) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
   (f) $y'' + 4y = \sin^2 2x$
   (g) $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$
   (h) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$
   (i) $y^{(4)} + 4y''' + 3y'' - 2y' - 6y = 150 \cosh 2x - 6x^2$ (a karakterisztikus polinomnak 1 és -3 is gyöke)

4. Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémákat!

   (a) $y'' + y = x - 4 \cos x$, $y(0) = 2$, $\quad y'(0) = 2$
   (b) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, $\quad y(1) = 0$, $\quad y'(1) = 1$
   (c) $y'' - y = e^x(2x + 3)$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 4$
   (d) $y'' - 4y' + 3y = -15 \cosh 2x$, $\quad y(0) = 3$, $\quad y'(0) = 2$
   (e) $y'' - 3y' - 4y = -6e^{2x} + 17 \sin x$, $\quad y(0) = 3$, $\quad y'(0) = 4$

5. Írjunk fel egy egy olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós homogén differenciálegyenletet melynek megoldásai a következő függvények!

   (a) $5e^x - 4e^{-x} + 7e^{2x}$
   (b) $3x^2 - e^{-3x}$
   (c) $x^2e^{-x}, \quad x^3e^{2x}$
   (d) $e^{2x}\sin 3x, \quad e^{-3x}$
   (e) $e^{2x}\sin x, \quad x^2e^{2x}\sin x, \quad 1$

6. Vegyes példák (**iMSc**)

   (a) Milyen α érték mellett lesz a
   $$y'' + \alpha y' + 3y = 0$$
   differenciálegyenlet minden megoldásfüggvényére igaz, hogy $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$?
   (b) Oldjuk meg minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $y'' + \alpha y' + \alpha y = 0$ differenciálegyenletet!
   (c) Írjuk fel az $y^{(4)} + 4y'' = \cos x$ differenciálegyenlet periodikus megoldásait!

3. A Laplace-transzformáció és alkalmazásai

A Laplace-transzformációhoz használható táblázat letölthető a honlapomról.

1. Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg a következő kezdeti érték problémákat!

   (a) $y'' - 2y' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0$
   (b) $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 3$
   (c) $y'' - 4y' + 9y = -\cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0$
   (d) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$
   (e) $y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -7$
   (f) $y'' - 16xy' + 32y = 14, \quad y(0) = y'(0) = 0$
   (g) $y'' + 8xy' = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$

2. Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg a következő differenciálegyenlet rendszereket!

(a)

$$\begin{aligned} y'(x) &= -z(x) \\ z'(x) &= y(x), \\ y(0) = 1 \quad &, \quad z(0) = 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y'(x) + 3y(x) - 4z(x) &= 9e^{2x} \\ z'(x) + 2y(x) - 3z(x) &= 3e^{2x}, \\ y(0) = 2 \quad &, \quad z(0) = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 5\dot{x} + 4\dot{y} + x &= 2 \\ 2\dot{x} + 4\dot{y} + 2y &= e^t, \\ x(0) = 1 \quad &, \quad y(0) = 0 \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet rendszereket! **(iMSc)**

(a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 2e^t \\ \dot{y} &= x + t^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} &= y - 2x \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \cos t \\ \dot{y} &= -x + \sin t \end{aligned}$$