1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT - MEGOLDÁSOKKAL

Analízis 1 — 2018. október 16.

MATEMATIKA BSC HALLGATÓKNAK — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. (**10 pont**)
Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő függvény, akkor a

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

függvény metrika $\mathbb{R}$-en. A továbbiakban tekintsük az $(\mathbb{R}, d_f)$ metrikus teret, ahol $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

(a) Adjuk meg a $B(0, 2)$, $B(0, 4)$, $B(1, 4)$ gömböket $(\mathbb{R}, d_f)$-ben.

(b) Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}, d_f)$ tér nem teljes.

Megoldás: Bármely $x, x \in \mathbb{R}$ esetén $d_f(x, y) \geq 0$ és $d_f(x, y) = 0$ pontosan akkor, ha $f(x) = f(y)$. Mivel f szigorúan monoton, ezért injektív, így ez pontosan akkor teljesül, ha $x = y$. $d_f(x, y) = d_f(y, x)$ nyílvánvaló. A háromszög-egyenlőtlenséghez, legyen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$d_f(x, y)+d_f(y, z) = |f(x)-f(y)|+|f(y)-f(z)| \geq |f(x)-f(y)+f(y)-f(z)| = |f(x)-f(z)| = d_f(x, z).$$

Mivel az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en, így a vele képzett $(\mathbb{R}, d_f)$ metrikus tér. Mivel az arctg függvény értékkészlete $(-\pi/2, \pi/2)$, ezért

(a)

$$B(0, 2) = \{x \in \mathbb{R} : |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0| < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : |\operatorname{arctg} x| < 2\} = \mathbb{R}\,.$$

$$B(0, 4) = \{x \in \mathbb{R} : |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0| < 4\} = \{x \in \mathbb{R} : |\operatorname{arctg} x| < 4\} = \mathbb{R}\,.$$

$$B(1, 4) = \{x \in \mathbb{R} : |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1| < 4\} = \{x \in \mathbb{R} : |\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}| < 4\} = \mathbb{R}\,.$$

(b) Tekintsük az $x_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot $(\mathbb{R}, d_f)$-ben. Mivel $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$, ezért bármely pozitív ε esetén van $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$d_f(x_m, x_n) = |\operatorname{arctg} m - \operatorname{arctg} n| < \varepsilon,$$

amennyiben $m, n \geq N$, vagyis (x_n) Cauchy-sorozat. Viszont nem lehet konvergens $(\mathbb{R}, d_f)$-ben, hiszen tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$d_f(x, x_n) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} n| \xrightarrow{n\to\infty} |\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}| > 0.$$

Így a tér nem teljes.

2. (**10 pont**)
Legyen (X, d) egy teljes metrikus tér. Mutassuk meg, hogy ha A egy nem üres, zárt, megszámlálható részhalmaza X-nek, akkor A-nak van izolált pontja.

Megoldás: X teljes, A zárt halmaz X-ben, így teljes. Tegyük fel, hogy A-nak nincs izolált pontja, azaz bármely pontja torlódási pont. Legyen $x \in A$ tetszőleges, ekkor mivel A megszámlálható, $\{x\}$ zárt A-ban. Így $U_x := A \setminus \{x\}$ nyílt A-ban. Mivel A-nak nincs izolált pontja, ezért $\overline{U_x} = A$, azaz U_x egy sűrű nyílt halmaz A-ban. A Baire-féle kategóriatétel miatt $\cap_{x \in A} U_x$ is sűrű A-ban, hiszen sűrű halmazok megszámlálható metszete sűrű és A megszámlálható. Node $\cap_{x \in A} U_x = \emptyset$, ami lehetetlen.

3. (**10 pont**)
Legyen (X, d) egy metrikus tér, $A \subset X$. Szokás szerint jelölje A' az A halmaz derivált halmazát, vagyis A torlódási pontjait. Bizonyítsuk be, hogy A' zárt halmaz. Mutassuk meg, hogy ha $A' \neq \emptyset$, akkor A egy végtelen halmaz.

Megoldás: Ha $A' = \emptyset$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $A' \neq \emptyset$. Legyen $x_0 \in (A')'$. Ekkor tetszőleges $B(x_0, r)$ gömb esetén létezik $y \in A'$, melyre $y \in B(x_0, r)$. Legyen $r' = r - d(y, x_0)$, ekkor miután $y \in A'$, ezért $B(y, r')$ A végtelen sok pontját tartalmazza. De $B(y, r') \subseteq B(x_0, r)$, így $B(x_0, r)$ is A végtelen sok pontját tartalmazza. Mivel r tetszőleges volt, így $x_0 \in A'$, vagyis $(A')' \subseteq A'$, azaz A' zárt.

Tegyük fel, hogy A véges: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.Mivel $A' \neq \emptyset$, létezik $a^* \in A'$. Legyen

$$\varepsilon = \min\{d(a^*, a_i) : a_i \neq a^*, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ekkor $\varepsilon > 0$ és $B(a^*, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, ami lehetetlen, mert a^* torlódási pont volt, azaz A végtelen.

4. (**10 pont**)
Minden $A, B \subset \mathbb{R}$ esetén legyen

$$A \pm B = \{x \pm y : x \in A, y \in B\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

(a) $A + B$ nyílt, ha A nyílt.
(b) ha A I. kategóriájú (sovány) halmaz, akkor $A^c - A^c = \mathbb{R}$.

Megoldás:

(a) Mivel

$$A + B = \cup_{b \in B}(A + \{b\}),$$

és nyílt halmazok tetszőleges uniója nyílt, így elég belátni, hogy $A + \{b\}$ nyílt minden $b \in B$ esetén. Legyen $x \in A + \{b\}$ tetszőleges. Ekkor létezik $a \in A$, hogy $x = a + b$. Mivel A nyílt, így létezik $r > 0$, melyre $B(a, r) \subset A$. Ekkor

$$B(x, r) = B(a + b, r) = B(a, r) + \{b\} \in A + \{b\},$$

vagyis $A + \{b\}$ nyílt.

(b) Indirekt módon, tegyük fel, hogy valamely $r \in \mathbb{R}$ esetén $r \neq x - y$, minden $x, y \in A^c$ esetén. Ekkor $y + r \neq x$ minden $x, y \in A^c$-re, azaz $r + A^c \subset A$. Mivel A I. kategóriájú, így minden részhalmaza, így $r + A^c$ is az. Mivel $r + A^c$ az A^c eltoltja, így A^c is I. kategóriájú, de ekkor $\mathbb{R} = A \cup A^c$ is az lenne, ami nonszensz.

5. (**10 pont**)
Legyen (X, d) egy metrikus tér. Tegyük fel, hogy $A \subset X$ egy olyan nem megszámlálható halmaz, melyhez létezik $\varepsilon > 0$, hogy minden $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén $d(x, y) \geq \varepsilon$. Mutassuk meg, hogy X nem szeparábilis.

Megoldás: Tegyük fel, hogy X szeparábilis, azaz létezik $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ halmaz, mely sűrű X-ben. Ekkor bármely $x \in A$ -ra

$$B(x, \varepsilon/2) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset,$$

azaz valamely x_n-re $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Legyen

$$n_x = \min\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon/2\}.$$

Legyen $f : A \to \mathbb{N}$, $f(x) = n_x$. Megmutatjuk, hogy f injektív. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz valamely $x, y \in A$ esetén $x \neq y$, de $f(x) = f(y)$, azaz $n_x = n_y$. Mivel $d(x_{n_x}, x) < \varepsilon/2$ és $d(x_{n_y}, y) < \varepsilon/2$, ezért a háromszög egyenlőtlenség miatt

$$d(x, y) \leq d(x, x_{n_x}) + d(x_{n_x}, x_{n_y}) + d(x_{n_y}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami ellentmondás, mert a feladat feltétele szerint minden $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén $d(x, y) \geq \varepsilon$. Mivel f injektív, így A megszámlálhatónak kell lennie, ami ellentmondás, így X nem szeparábilis.

6. (extra feladat **10 pontért**)
Legyen (X, d) egy teljes metrikus tér. Mutassuk meg, hogy X-beli sűrű G_δ halmazok megszámlálható metszete sűrű G_δ halmaz X-ben.

Megoldás: Legyen $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ X-ben sűrű G_δ halmazok megszámlálható halmaza és legyen $F_n = G_n^c$. Ekkor F_n sehol sem sűrű F_σ halmaz. Bizonyítsunk indirekt módon, és tegyük fel, hogy $\cap_n G_n$ nem sűrű. Ekkor $(\cap_n G_n)^c = \cup_n F_n$ tartalmaz egy nyílt gömböt, ami tartalmaz egy kisebb nem üres zárt gömböt, amit jelöljünk B-vel. B zárt X-ben, így maga is teljes. Mivel $B = \cup_n (B \cap F_n)$, ezért B előáll sehol sem sűrű F_σ halmazok megszámlálható uniójaként, ami teljes terek esetén a Baire-tétel értelmében lehetetlen.