Analízis 1, 2018/19. 1. félév, Normált terek 1.

10. gyakorlat

1. Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér. Mutassuk meg, hogy ha $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ fennáll valamely $x, y \in X$ esetén, akkor $\|\lambda x + \mu y\| = \lambda\|x\| + \mu\|y\|$ bármely $\lambda, \mu \geq 0$-ra.

2. Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér. Mutassuk meg, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

   (a) Minden $x, y \in X$, $y \neq 0$ esetén, ha $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, akkor $x = \lambda y$, ahol $\lambda \geq 0$.

   (b) Minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén, ha $\|x\| = \|y\| = 1$, akkor $\|x+y\| < 2$.

3. Legyen (X, d) egy metrikus tér. Mutassuk meg, hogy a d metrika pontosan akkor származtatható normából, ha teljesülnek a következők:

   - d eltolásinvariáns, azaz $d(x+z, y+z) = d(x,y)$, minden $x, y, z \in X$-re;
   - d abszolút homogén, azaz $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, minden $x, y \in X$-re és $\lambda \in \mathbb{K}$.

4. Mutassuk meg, hogy a valós sorozatok terén értelmezett

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

   metrika nem származtatható normából.

5. Tekintsük az $(X, \|.\|)$ normált térben a $\sum_n x_n$ abszolút konvergens sort.

   (a) Mutassuk meg, hogy a részletösszegek (s_n) sorozata Cauchy-sorozat.

   (b) Mutassuk meg, hogy ha $\sum_n x_n$ konvergens, akkor X Banach-tér.

6. Igazoljuk, hogy ha $e_n = (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}}$, akkor az $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ térben a $\sum_n \frac{1}{n} e_n$ sor tetszőleges átrendezése konvergens, de a sor nem abszolút konvergens.

7. Mutassuk meg, hogy ha $-\infty < a < b < \infty$ és
$$X = \{u \in C^1[a,b] : u(a) = u(b) = 0\},$$
akkor a
$$\|u\|_p := \int_a^b (|u| + |u'|), \quad \|u\|_q := \int_a^b |u'|, \quad u \in X$$
normák ekvivalensek.

8. Előadáson meggondoltuk, hogy ha két norma ekvivalens, akkor ugyanazt a topológiát generálják, azaz ugyanazok a két térben a nyílt halmazok. Mutassuk meg, hogy a megfordítás is igaz, azaz, ha két normált térben ugyanazok a nyílt halmazok, akkor a két norma ekvivalens.

9. Legyen $(X, \|.\|)$ egy normált tér. Mutassuk meg, hogy X pontosan akkor Banach-tér, ha az $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ egységszféra teljes a $d(x,y) = \|x-y\|$ metrikával.

10. Legyen X egy Banach-tér, Y az X egy altere és a szokásos módon
$$d(x,Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$
   (a) Mutassuk meg, hogy ha Y véges dimenziós, akkor létezik $y_0 \in Y$, melyre $d(x,Y) = \|x - y_0\|$.
   (b) Mutassuk meg, hogy ha Y végtelen dimenziós, akkor nem biztos, hogy létezik ilyen y_0, még akkor sem, ha Y zárt.
   (Útmutatás: Legyen $X = C([-1,1])$ és $Y = \{y \in X : \int_{-1}^0 y = \int_0^1 y = 0\}$.)
   (c) Tegyük fel, hogy X még a következőt is tudja: a háromszög egyenlőtlenségben pontosan akkor áll fenn az $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ egyenlőség, ha x és y lineárisan függetlenek. Mutassuk meg, hogy ekkor már létezik a fent említett y_0, ráadásul egyértelműen!

11. Mutassuk meg, hogy a $C[a,b]$ normált térben az $\mathcal{A} := \{f \in C[a,b] : f(a) = 0\}$ halmaz zárt altér.

12. Igazoljuk, hogy ha
$$C_0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ folytonos és } \lim_{\pm\infty} f = 0\},$$
akkor a $(C_0(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ Banach-tér.