Analízis 1, 2018/19. 1. félév, Folytonos függvények metrikus terekben

8. gyakorlat

1. Legyenek $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrikus terek. Mutassuk meg, hogy egy $f : X_1 \to X_2$ függvény pontosan akkor folytonos, ha bármely $Y_2 \subseteq X_2$ esetén
$$f^{-1}(Y_2^\circ) \subseteq (f^{-1}(Y_2))^\circ.$$

2. Legyen $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrikus terek, $f : X \to Y$ egy folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy ha X szeparábilis, akkor $f(X)$ is az.

3. Legyen $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ a valós függvények tere. Mutassuk meg, hogy X nem látható el olyan d metrikával, hogy az (X, d) metrikus térben való konvergencia ekvivalens legyen a pontonkénti konvergenciával.

   (Útmutatás: Használjuk fel, hogy a Dirichlet-függvény nem állítható elő folytonos függvények pontonkénti limeszeként (azaz nem Baire 1. osztályú).)

4. Legyen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ minden $x > 0$ esetén. Mutassuk meg, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

5. Tekintsünk egy két metrikus tér között ható $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvényt. Az f függvény gráfján a
$$G = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$
halmazt értjük. Tegyük fel, hogy (Y, d_Y) kompakt. Mutassuk meg, hogy f akkor és csak akkor folytonos, ha G zárt részhalmaza $X \times Y$-nak, ahol $X \times Y$-t a következő metrikával látjuk el:
$$d_{X\times Y}((x, y), (u, v)) = d_X(x, u) + d_Y(y, v).$$
Igaz marad-e az állítás, ha Y nem kompakt?

6. Legyen (X, d) metrikus tér, $x_0 \in X$. Jelölje $C_b(X, \mathbb{R})$ az X-en értelmezett, valós értékű, folytonos és korlátos függvényeket az uniform metrikával. Mutassuk meg, hogy az $f_x : X \to C_b(X, \mathbb{R})$,

$$f_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0), \quad x, y \in X$$

izometria X és $C_b(X, \mathbb{R})$ között.
(Megjegyzés: Ebből már könnyen bizonyítható, hogy bármely metrikus térnek egyértelműen létezik **teljes burka**, azaz olyan legszűkebb teljes metrikus tér, ami őt tartalmazza. Bizonyítsuk be, ha kedvünk szottyan rá!)

7. Legyen (X, d) egy metrikus tér, A egy nem üres részhalmaza X-nek. A

$$d(., A) : X \to \mathbb{R}, \quad d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

függvényt nevezzük az A halmaztól való távolság függvényének. Mutassuk meg, hogy $d(x, A) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x \in \overline{A}$. Legyen A és B két diszjunkt nem üres zárt részhalmaza X-nek és definiáljuk a következő függvényt:

$$f : X \to [0, 1], \quad f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Mutassuk meg a következőket:

(a) f folytonos ;

(b) $f^{-1}(\{0\}) = A$, $f^{-1}(\{1\}) = B$;

(c) ha $d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0$, akkor f egyenletesen folytonos.

8. Az előző feladatra támaszkodva mutassuk meg, hogy ha az X metrikus térben az A, B nem üres halmazokra fennáll, hogy $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$, akkor léteznek nemüres, diszjunkt, nyílt U, V halmazok, hogy $A \subseteq U$ és $B \subseteq V$.

9. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

függvény homeomorfizmus. Mutassuk meg, hogy f egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en.

10. A fenti példa alapján:

(a) Igaz-e, hogy egy teljes metrikus tér homeomorfizmus általi képe teljes? (És ha még egyenletesen folytonos bijekció is?)

(b) Legyen f egy izometria az (X_1, d_1) és az (X_2, d_2) metrikus terek között. Mutassuk meg, hogy ekkor f homeomorfizmus is. Igaz-e a megfordítás?

11. Legyen K egy folytonos függvény az $0 \le x, y \le 1$ egységnégyzeten, melyre $|K(x,y)| \le M < 1$ minden $x, y \in [0,1]$ esetén. Mutassuk meg, hogy létezik $f \in C[0,1]$, melyre

$$f(x) + \int_0^1 K(x,y) f(y) \, \mathrm{d}\, y = e^{x^2}.$$

Hány ilyen f van?

12. Legyen g egy valós értékű folytonos függvény $[0,1]$-en. Mutassuk meg, hogy létezik olyan valós értékű $f \in C[0,1]$, melyre

$$f(x) - \int_0^x f(x-t) e^{-t^2} \, \mathrm{d}\, t = g(x).$$