VIK A1 Matematika, 1-2. Gyakorlati anyag

BOSCH-Hatvan képzés

I. Logikai feladatok

Az alábbi feladatokban a $\wedge$ jelöli az „ÉS”, $\vee$ a „VAGY”, $\neg$ a „negálás” műveletét. Igazoljuk a következő azonosságokat!

1. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
2. $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
3. $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)]$
4. $[\neg p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p \equiv 1$
5. $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$
6. $\neg[((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Irjuk fel az alábbi állítások tagadását! A szöveges feladatoknál formalizáljuk az állításokat logikai műveletek és kvantorok segítségével!

1. Minden ajtón van kilincs.
2. A házban $\exists$ ablak, ami nyitva van.
3. A házban $\exists$ emelet, ahol $\forall$ ablak nyitva van.
4. $\forall$ emeleten $\forall$ ablak nyitva van.
5. A villamos kar bármely szak minden évfolyamán van lány hallgató.
6. A villamos karon létezik olyan szak, amelyiknek van olyan évfolyama, amelyben minden hallgató lány.
7. $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$ számra, ha $|x-a| < \delta$, akkor $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

II. Teljes indukció

Bizonyítsuk be a következő azonosságokat illetve egyenlőtlenségeket!

1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$
3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
4. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$
5. $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$
6. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
7. $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$
8. $(1+x)^n \geq 1 + nx$
9. $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$
10. $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$
11. $$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$$
12. $$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$$
13. $$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}},$$

    ahol a bal oldalon n darab gyökjel van.

III. Egyenlőtlenségek igazolása

Emlékeztetünk a harmonikus, mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenségre (bizonyítás előadáson, kicsit később): Ha $n \geq 2$ természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket! Mikor van egyenlőség?

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$
2. $||a| - |b|| \leq |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{R}$
3. $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$, $n \in \mathbb{N}$
4. $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}, n \in \mathbb{N}$
5. $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}, \quad (n = 2, 3, \ldots)$
6. $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valósak,
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$
7. $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valósak,
$$a_1 a_2 \cdots a_n \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \cdots a_n^n}{n}$$
8. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok körében! A két egyenletnek ugyanazok a megoldásai?
   (a) $2x + \sqrt{(2x-1)x^2} = x^2$
   (b) $2x - \sqrt{(2x-1)x^2} = x^2$

IV. Halmazalgebra

Legyenek A, B, C halmazok. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat! Felülvonás jelöli a komplementum képzést.

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
2. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

3. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

4. $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

5. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$

6. Ha $A \subset C$, akkor $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$.

7. $(A \setminus B) \cup B = A$ akkor és csak akkor, ha $B \subset A$.

8. $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$ akkor és csak akkor, ha $C = \emptyset$.

9. $(A \cup B) \setminus B = A$ akkor és csak akkor, ha $A \cap B = \emptyset$.

10. Adjunk meg négy olyan halmazt, amelyekre teljesül az alábbi feltételek mindegyike:
    (a) Bármely kettőnek van közös eleme.
    (b) Bármely három halmaz metszete üres halmaz.
    (c) A halmazok elemszáma egyenlő.
    (d) A halmazok elemszáma a lehető legkisebb.

V. Néhány feladat a számossággal kapcsolatban

Az alábbi feladatokban a $|A|$ jelöli A halmaz elemeinek számát. Csak véges halmazok szerepelnek még!
Bizonyítsuk be a következőket!

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

3. $$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

4. Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben TV, 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz?

5. Egy 33 fős tankörben háromféle idegen nyelven tanulnak. 20 diák tud angolul, 16 németül és 6 franciául. 5 diák tud pontosan két nyelven és két diák tu mindhárom nyelven. Hányan nem tudnak egyetlen idegen nyelven sem és hányan beszélnek pontosan egy idegen nyelvet?

VI. Binomiális együtthatók

1. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k31} = \binom{n+1}{k+1}$
2. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$
3. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$
4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots = 2^{n-1}$
5. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.