VIK A1 Matematika - BOSCH, Hatvan, 3-4. Gyakorlati anyag

2018/19 I. félév

I. Függvények

1. Injektívek illetve szürjektívek-e az alábbi hozzárendelések? Függvények-e egyáltalán?
   (a) f hozzárendeli minden emberhez az édesanyját.
   (b) g hozzárendeli minden édesanyához a legidősebb gyermekét.
   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto [x]$, ahol $[x]$ jelöli x egészrészét.
   (d) i minden másodfokú polinomhoz hozzárendeli a legnagyobb valós gyökét.
   (e) $j : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$.
2. Irjuk fel az összes $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ bijekciót. Ha f és g ilyen bijekciók, akkor határozzuk meg $f \circ g$-t!
3. Határozzuk meg $f \circ g$-t és $g \circ f$-et, illetve értelmezési tartományukat és értékkészletüket, ha
   (a) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = x^2$,
   (b) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$,
   (c)
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-\infty, 0] \\ x, & \text{ha } x \in (0, \infty) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-\infty, 0] \\ -x^2, & \text{ha } x \in (0, \infty) \end{cases}.$$
4. Legyen $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $g(x) = \cos x$ és $h(x) = \ln x$. Határozzuk meg $f \circ g \circ h$-t és $h \circ g \circ f$-et értelmezési tartományukkal és értékkészletükkel együtt!

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ Határozzuk meg $f \circ f$, illetve $f \circ f \circ f$ függvényeket!

6. Mutassuk meg, hogy az alábbi valós függvények invertálhatók és adjuk meg az inverzüket!

   (a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \neq 2$.

   (b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$.

   (d) $f(x) = x^2$, $D_f = (-\infty, -1]$.

   (e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

   (f)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{7x-5}{3}, & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ \frac{2}{1+x}, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

   (g) Mely α értéknél lesz
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ 2\alpha - x, & \text{ha } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$
   invertálható? Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

II. Komplex számok

1. Hozzuk algebrai alakra a következő kifejezéseket és adjuk meg az abszolút értéküket!

   (a) $\frac{2}{(1-i)(3+i)}$, $\frac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$, $\frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}$.

   (b) $(1+i)^{12}$, $(\sqrt{3}+i)^7$, $(1+i)^4(1-\sqrt{3}i)^6$, $(1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}i)^{-6}$, i^i.

   (c) $6(\cos 75° + i \sin 75°)(\cos 305° + i \sin 305°)$, $6\sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)(\cos 175° + i \sin 175°)$, $6(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$.

2. Határozzuk meg az alábbi z komplex számok n-dik gyökét!

   (a) $z = 1$,$n = 3$. (b) $z = -1$, $n = 7$. (c) $z = i$, $n = 2$. (d) $z = -2 + 2i$, $n = 3$.

3. Az alábbi sokszögeknek komplex számokkal megadjuk néhány csúcsát. Határozzuk meg a hiányzó csúcsokat!

   (a) $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = 5 + i$ csúcspontú szabályos háromszög.

   (b) $z_1 = -4 + i$, $z_2 = 3 - 3i$ csúcspontú négyzet.

   (c) i középpontú és $z_1 = 3 - 4i$ csúcsú szabályos ötszög.

   (d) $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - 2i$ és $z_3 = 2 + 3i$ csúcsú paralelogramma.

4. Határozzuk meg az alábbi egyenletek gyökeit a komplex számok körében.

   (a) $z + 2 - 2iz - 5 = 0.$

   (b) $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$

   (c) $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$

   (d) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

   (e) $z^3 + 2z^2 - 3 = 0.$

   (f) $\overline{z} = z^n, \quad n \in \mathbb{N}.$

5. Adjuk meg a következő műveletek eredményét algebrai és exponenciális alakban! Minden paraméter valós!

   (a) $ae^{i\alpha} + be^{i\beta}$

   (b) $(a + ib)e^{c+id}$

   (c) $\sqrt{a + ib}$

   (d) $\frac{1}{1-e^{-i\alpha}}$

   (e)
$$\left|\frac{1}{(ai)^2 + bi + c}\right|.$$

6. Készítsünk megoldóképletet az
$$x^4 + px^2 + q = 0$$
egyenlethez, ha p és q valósak!