

# VIK A1 Matematika - BOSCH, Hatvan

## 5-6. Gyakorlati anyag

2018/19/1. félév

### I. Vektoralgebra

1. Milyen  $z$  szám esetén lesz  $\mathbf{a} = (6, -2, z)$  vektor merőleges a  $\mathbf{b} = (2, -3, 1)$  vektorra?
2. Ha az  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  vektor merőleges a  $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$  vektorra, az  $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$  pedig merőleges a  $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  vektorra, akkor mekkora az  $\mathbf{a}$  illetve  $\mathbf{b}$  által bezárt szögek koszinusza?
3. Legyen  $|\mathbf{a}| = 2$ ,  $|\mathbf{b}| = 5$  és a két vektor szöge 120 fok. A  $t$  paraméter mely értékeire lesz merőleges  $t\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$  és  $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ?
4. Legyen  $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, 2)$ ,  $\mathbf{c} = (-1, 2, 1)$ . Mi lesz a  $\mathbf{c}$  vektor  $\mathbf{a}$  illetve  $\mathbf{b}$  vektorok egyenesére vett merőleges vetülete és mi az az összegük?
5. Legyen  $\mathbf{a} = (7, -1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (3, -4, 5)$ ,  $\mathbf{c} = (4, 3, 5)$ . Melyik  $\mathbf{x}$  egységvektor zár be mindhárom vektorral ugyanolyan szöget?
6. Legyen  $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, 2)$ ,  $\mathbf{c} = (-1, 2, 1)$ . Számoljuk ki a vektoriális szorzatukat!

### II. Analitikus térgeometria, egyenesek és síkok megadása

1. Adott az  $A(3, -1, 0)$  és a  $B(2, 2, 1)$  pont. Ha a  $C(0, y, 0)$  pont végigfut az  $y$  tengelyen, hogyan változik eközben az  $ABC$  háromszög területe?
2. Egy tetraéder csúcsai:  $A(2, -4, 3)$ ,  $B(1, -4, 4)$ ,  $C(-3, 2, 0)$  és  $D(2, 0, t)$ .  $t$  milyen értékeire lesz a tetraéder térfogata 4 egység?
3. Az  $A(1, 0, s)$ ,  $B(2, -1, 3)$ ,  $C(2, 0, t)$ ,  $D(1, 1, -1)$  pontnégyes  $s, t$  milyen értékeire lesz egysíkú?

4. Határozzuk meg annak azon síkoknak az egyenletét, melyek átmennek az  $A(1, 5, 2)$  ponton és párhuzamosak illetve merőlegesek a  $7x - y + 3z + 2 = 0$  egyenletű síkkal!
5. Igazoljuk, hogy a  $2x + y - z - 2 = 0$ ,  $x - 3y + z + 1 = 0$ ,  $x + y + z - 3 = 0$  síkok egyetlen pontban metszik egymást. Fektesünk a közös ponton átmenő és az  $x + y + 2z = 0$  síkra merőleges síkot!
6. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az  $A(1, -3, 0)$  és  $B(3, 7, -4)$  pontokat összekötő szakaszt harmadolja és merőleges rá!
7. Irjuk fel a következő egyenesek paraméteres és paraméter nélküli egyenletrendszerét!

- (a) Átmegy az  $A(5, -1, 2)$  ponton és párhuzamos az  $\mathbf{a} = (-2, 4, -7)$  vektorral.
- (b) Átmegy a  $P(2, -3, 4)$  és a  $Q(2, 4, 6)$  pontokon.
- (c) Merőleges az  $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$  és a  $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$  vektorra és átmege az  $A(6, -3, 4)$  ponton.
- (d) Párhuzamos az  $x - y - 4z = 0$  és a  $2x + y - 2z - 4 = 0$  síkok metszészvonalával és átmege az origón.
- (e) Párhuzamos a  $3x + y - z + 1 = 0$  és az  $x + y + z = 0$  síkkal és az  $yz$  síkot a  $P(0, 4, 1)$  pontban metszi.
- (f) Átmegy a  $P(-1, 2, -3)$  ponton, merőleges az  $\mathbf{a} = (6, -2, -3)$  vektorra és metszi az

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{3 - z}{5}$$

egyenest.

- (g) Merőleges a  $2x + 4y - z + 5 = 0$  síkra és metszi az

$$e : \frac{x}{2} = -y = z, \quad f : \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z}{3}$$

egyenletű egyeneseket.

- (h) Az  $x - 3y + z + 2 = 0$  és a  $2x - 5y - z + 4 = 0$  síkok metszészvonala.

8. Irjuk fel a következő síkok egyenletét!

- (a) Átmegy a  $P(-2, 1, 0)$  ponton és illeszkedik az  $e : x = t + 2, y = 3t, z = 2$  egyenesre.
- (b) Átmegy a  $P(3, 0, 1)$  ponton és párhuzamos az  $e : x = 1 - 2t, y = 2 + t, z = -2t$  és az

$$f : \frac{x + 2}{2} = y = -z$$

egyenesekkel.

(c) Illeszkedik az

$$\frac{x-5}{3} = y-1 = z$$

egyenesre és merőleges  $2x - y + z = 0$  síkra.

(d) Párhuzamos az  $x = 2y = 3z$  egyenessel és áthalad az  $x + y + z = 0$  és a  $2x - y + 3z = 0$  síkok metszéspontján.

(e) Átmegy a  $P(1, 2, 3)$ , a  $Q(-1, -5, 2)$  és az  $R(0, 0, -3)$  pontokon.

9. Az  $\alpha$  paraméter mely értékénél lesz:

(a) az  $\frac{x+2}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z-1}{4}$  és az  $\frac{x-3}{\alpha} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{7}$  egyenesek merőlegesek egymásra?

(b) az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{\alpha}$  egyenes és az  $x + 3y - 2\alpha z = 0$  sík párhuzamos egymással?

(c) az  $x = 1 + \alpha t, y = -2t, z = 1$  egyenes metszi a  $2x + \alpha y + z + 1 = 0$  síkot?

(d) az  $\frac{x-1}{5} = \frac{1-2y}{3} = -z$  és a  $\frac{x+3}{\alpha} = \frac{2y-3}{4} = 1 + z$  egyenesek metszik egymást?

(e) az  $A(2, 4, -1)$  és a  $B(\alpha, \alpha + 6, 3)$  ponton átmenő egyenes merőleges a  $3x + 5y + \alpha z/4 = 0$  síkra?

10. Mi lesz az  $A(4, -3, 5)$  pont  $x - y + z - 9 = 0$  síkra vett tükörképe?

11. Tükrözzük az  $A(2, -1, 3)$  pontot az  $x = 3t = y = 5t, z = 2t + 2$  egyenesre!

12. Tükrözzük az  $x = 1 - 2t, y = 3 + 2t, z = -4 - 9t$  egyenest a  $3x + y - 2z = 0$  síkon!

### III. Távolságok és szögek

1. Adjuk meg azokat a pontokat melyek rajta vannak az

$$e : \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+3}{3}$$

egyenesen és 2 egység távolságra vannak az  $x - 2y + z - 1 = 0$  síktól!

2. Mekkora a  $2x - 4y + 2z - 1 = 0$  és az  $x - 2y + z - 1 = 0$  síkok távolsága?

3. Határozzuk meg a  $z$  tengelyen azt a pontot, amely egyenlő távolságra van  $12x + 9y - 20z + 19 = 0$  és a  $16x - 12y + 15z - 9 = 0$  síkktól!

4. Határozzuk meg a  $P(-2, 3, 7)$  pont távolságát a  $\frac{x-1}{3} = 2 - y, z = 2$  egyenestől!

5. Határozzuk meg az  $x + y + z - 2 = 0$  és az  $x + 2y - z - 1 = 0$  síkok metszéspontján azt a pontot, amely egyenlő távol van az  $x + 2y + z + 1 = 0$  és az  $x + 2y + z - 3 = 0$  síkktól!

6. Melyek azok a síkok, melyek az  $x = 1, y = 3 + 3t, z = 4 + 4t$  egyenesre illeszkednek, egységnyi távolságra vannak a  $P(2, 1, 3)$  ponttól? Adjuk meg a hajlásszögük cosinusát!
7. Adjuk meg azon egyenesek egyenletrendszerét, melyek átmennek az origón és mindhárom koordinátatengellyel azonos szöget zárnak be!
8. Határozzuk meg az  $x - 3y + 2z - 2 = 0$  és a  $2x + y + 3z - 5 = 0$  síkok szögfelező síkjainak egyenletét!
9. Irjuk fel azon síkok egyenletét, melyek átmennek a  $P(1, 1, 1)$  ponton, párhuzamosak az  $x + 2y - z - 1 = 0$ ,  $2x - y + z - 1 = 0$  síkok metszészíkjával és mindkét síkkal ugyanakkora szöget zárnak be. Mi lesz ezen szög cosinusa?

#### IV. Vegyes feladatok

1. Egy szabályos háromszög egyik csúcsa  $A(1, 1, 1)$  A  $B$  és  $C$  csúcs az  $x + y + z = 1$  és  $2x - y - z = 0$  síkok metszészíkján van. Határozzuk meg a koordinátáikat!
2. Létezik-e olyan szakasz, melynek a merőleges vetülete az  $(x - 2)/2 = (y + 2)/3 = -z/6$  egyenesen 2 egység, az  $x = (y - 1)/4 = (1 - z)/8$  egyenesen 3 egység, az  $(1 - 2x)/2 = y/8 = (z + 1)/4$  egyenesen 1 egység. Mi a hossza?
3. Tükrözzük a  $P(1, -1, 3)$  pontot a  $Q(-1, 3, 2)$  pontra, az  $x = -(y + 1)/2 = -z$  egyenesen és a  $2x - y + 3z - 2 = 0$  síkon. Számítsuk ki a  $P$  pont és a három tükörkép által meghatározott sík távolságát!