VIK A1 Matematika - BOSCH, Hatvan
4. Gyakorlati anyag

2018. november

Numerikus sorozatok

1. Mutassuk meg, hogy az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozatra teljesül, hogy a második tagtól kezdve a sorozat mindegyik tagja a szomszédos tagok harmonikus közepe, azaz

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}.$$

2. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgáljuk meg a következő sorozatokat!

   (a) számtani sorozatok

   (b) mértani sorozatok

   (c) $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

   (d) $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$

   (e) $a_n = \frac{1-7n}{2n-1}$

   (f) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

   (g) $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

3. Mutassuk meg, hogy ha az a_n sorozat monoton, akkor a számtani közepekből képzett

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

   sorozat is monoton. (Érdeklődőbbeknek: mit mondhatunk a korlátosságról?)

4. Definíció alapján bizonyítsuk be, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}) = 0.$

(b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1}) = 1.$

(c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1} - n) = 0.$

(d) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}) = +\infty.$

(e) $\lim_{n\to\infty}(\frac{5n^3+2n^2-1}{2n^3+n+1}) = \frac{5}{2}.$

(f) $\lim_{n\to\infty}(\frac{2-3n^2}{n+1}) = -\infty.$

5. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, mi a határértékük?

(a) $a_n = \frac{5-2n^5}{3n^5+n^4-2n^3+2}, \quad b_n = \frac{3n^5-7\cdot 10^{23}n^3}{10^{-38}n^6-67n^2+9n}, \quad c_n = \frac{-n^7+n^6-3}{n^5-n^2+4}$

(b) $a_n = \frac{(3n+1)^4}{2n^4+n^2-n+5}, \quad b_n = \frac{(2n^3+3)^2}{(3n+6)^6}$

(c) $a_n = \frac{(n+1)!}{(3-2n)n!}, \quad b_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}, \quad c_n = \frac{\binom{2n}{4}}{\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}}$

(d) $a_n = \sqrt{n^4+2n^2+3} - \sqrt{n^4+n}, \quad b_n = \sqrt[3]{n^3-3n+8} - \sqrt[3]{n^3+n+1}, \quad c_n = \frac{1}{n-\sqrt{n^2+3n+5}}$

(e) $a_n = \frac{3^{2n}}{(-3)^n+10^n}, \quad b_n = \frac{3^{2n}}{3^n+9^n}, \quad c_n = \frac{9^n}{3^n+2^n}$

(f) $a_n = \frac{4^{n-1}+n^5 3^{n+2}}{2^{2n+3}+2^{n-2}}, \quad b_n = \frac{n^3 2^n+3^n}{2^{2n}-3n^2}$

(g) $a_n = \sqrt[3n]{3n}, \quad b_n = \sqrt[n]{3n}, \quad c_n = \sqrt[3n]{n}, \quad d_n = \sqrt[5n]{3n}$

(h) $a_n = \sqrt[n]{2n^3+3}, \quad b_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+6}{3n^2+2n}}, \quad c_n = \sqrt[n]{\frac{5n^2+4n-5}{n^3+6n^2-n}}.$

6. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = (\frac{3n-1}{3n+2})^{2n}$

(b) $a_n = (\frac{n-2}{n})^{n^2}$

(c) $a_n = (2 - \frac{1}{n})^n$

(d) $a_n = (\frac{2^n+3}{2^n+1})^n$

(e) $a_n = (\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1})^n$

(f) $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$

(g) $a_n = (\frac{n^2-2n+1}{n^2-2n+4})^{3n^2-6n+5} + \frac{\sqrt{n^4-n^2+6}-\sqrt{2n^3+n-1}}{n^2+1}$

(h) $a_n = n^2(\sqrt{3n^4+2n-1} - \sqrt{3n^4+n^2-n})(\frac{-3n+1}{3n+4})^{4n-2}$

(i) $a_n = (\frac{(n+3)!}{n!n^3})^{n-1}$

(j) $a_n = (\frac{4n+3}{5n})^{5n^2}$

(k) $a_n = n^2 \sin \frac{5}{n^2+1}$

(l) (N) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n} - 1) = 1$.

(m) (N) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} n \ln(1 + 1/n) = 1$

7. Konvergensek-e az alábbi sorozatok?

   (a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

   (b) $a_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}$

   (c) $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2 + 1})$

   (d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n} + 2^n}$

   (e) $a_n = \frac{n^3 2^{2n}}{3^{n+1}(2+1/n)^n}$

8. Rekurzív sorozatok határértéke.

   (a) $a_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \in [0, 1], \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+\alpha}{2}$

   (b) Mikor konvergens?
   $a_1 = \sqrt{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n}$

   (c) Mikor konvergens?
   $a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{2\alpha a_n}{a_n+\alpha}$

   (d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3+1}$

9. Keressük meg a sorozatok $\liminf$-jét és $\limsup$-ját!

   (a) $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$

   (b) $a_n 1 + (-1)^n + \frac{n+2}{n+1}$

   (c) $a_n = \sqrt{n^2 + (-1)^n n^2}$

Függvény határértéke

1. Bizonyítsuk be definíció alapján a következőket!

   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$

   (b) $\lim_{x\to 4} \frac{x^{-}16}{x^2-4x} = 2$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$

   (d) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty$

2. Számoljuk ki a határértékeket!

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

(b) $\lim_{x\to-\infty} (\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x)$

(c) $\lim_{x\to 1} (\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-2})$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1-5x}{x^2+x^5}$

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

(f) $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

(i) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x)$

(j) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\sin x}$

(l) $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x})$

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(n) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 3\pi x}$

3. Előadáson bizonyítjuk, így használható (persze nem muszáj!):
Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, és $\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1) = b$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^b.$$

Itt x_0 véges, vagy $\pm\infty$.

(a) $\lim_{x\to 0} (\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$

(b) $\lim_{x\to 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$

(c) $\lim_{x\to\pi/2} \sin x^{\tan x}$

4. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket! (Szakadási helyek vizsgálata.)

(a) $f(x) = \frac{3(1-x^2)+|1-x^2|}{2(1-x^2)-|1-x^2|}$

(b) $f(x) = 3 + \frac{1}{1+3^{\frac{1}{1-x}}}$

(c) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

(d) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2(x-3)^2}$

(e) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$

5. Határozzuk meg, ha lehetséges, a paramétereket úgy, hogy a függvény mindenütt folytonos legyen!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{ha } x \geq 0, \\ -x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{ha } x \leq 0, \\ ax+b & \text{ha } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } |x| \leq 1, \\ x^2+ax+b & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

6. Adjuk meg az alábbi függvények lineáris aszimptotáit!

(a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x-1}$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$