Kalkulus 1
11-12. Feladatsor

2020/21. 1. félév

Folytonosság, egyenletes folytonosság

1. Legyen $H \subset \mathbb{R}$, és $f, g : H \to \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy ha f és g folytonos, akkor az
$$F, G : H \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (8x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
függvények is folytonosak.

2. Legyen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x \in (0, \infty))$, valamint $H_1 = (0, 1]$, $H_2 = [1, 2]$ és $H_3 = (2, 3)$. Kompaktak-e az $f(E_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ halmazok?

3. Legyen $f : (a, b)\,\mathbb{R}$ függvény folytonos. Bizonyítsuk be, hogy ha f invertálható, akkor f szigorúan monoton.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f zérushelyeinek halmaza zárt.

5. Van-e megoldása az $x^5 - 18x + 2 = 0$ egyenletnek $[-1, 1]$-ben?

6. Felveszi-e az $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ függvény a $7/3$ értéket a $[-2, 2]$ intervallumon?

7. Legyen f a $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvény, melyre $f(0) = f(1) = 0$. Mutassuk meg, hogy bármely $0 < d \leq 1$ számhoz megadható a függvény grafikonjának olyan húrja, amely d hosszúságú.

8. Döntsük el definíció alapján, hogy egyenletesen folytonosak-e az alábbi függvények az adott halmazon?
   (a) $f(x) = x^2$, $E = [0, \infty)$,
   (b) $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $= (-3, 2)$.

9. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \frac{x^3-1}{5x-5}$ függvény a $[-4, 1)$ intervallumon?

10. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = x^2 - 2x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény az $E_1 = [0, 2)$ illetve $E_2 = [0, \infty)$ intervallumon?

Deriválás

1. Az értelmezési tartományuk mely pontjaiban deriválhatóak az alábbi függvények! Számoljuk ki a deriváltakat!

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}$

   (b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   (c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

   (d)
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

   (e) $f(x) = (\frac{ax+b}{cx+d})^{-2/3}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

2. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az
   $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq x_0 \\ ax + b, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$
   differenciálható legyen x_0-ban!

3. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az
   $$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ ax^2 + bx + c, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$
   differenciálható legyen $x = 0$-ban!

Érintőegyenessel kapcsolatos feladatok

1. Adjuk meg az alábbi függvények x_0-beli érintőegyenesének egyenletét!

   (a) $f(x) = \sin \sqrt{x}, \quad x_0 = \pi^2$

   (b) $f(x) = x^3 - 8x, \quad x_0 = 3$

   (c) $f(x) = e^{\sin x}, \quad x_0 = \pi.$

2. Adjuk meg az alábbi síkgörbék adott P pontbeli érintőegyenesének egyenletét!

   (a) $x^3 + y^3 - 6xy = 0, \quad P(3,3)$

   (b) $y = \sin(x + y), \quad P(\pi, 0)$

   (c) $y^2 = 4x - x^2, \quad P(2, -2)$

3. Milyen összefüggés áll fenn a, b és c között, ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabola érinti az x tengelyt?

4. Igazoljuk, hogy ha az $f(x) = x^3 + px + q$ függvény érinti az x tengelyt, akkor $(p/3)^3 + (q/2)^2 = 0$!

5. Irjuk fel annak az egyenesnek a képletét, mely átmegy az origón és érinti az $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ görbét!

6. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m^2}{|x|}, & \text{ha } |x| > c \\ ax^2 + b, & \text{ha } |x| \leq c \end{cases}$$

   görbe mindenütt folytonos legyen és minden pontjában rendelkezzen érintővel!

Deriválás gyakorlása, logaritmikus deriválás

1. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjait, ahol léteznek!

   (a) $f(x) = 2^{\arctan x^2}$

   (b) $f(x) = x^x + x^{x^x}, \quad x > 0$

   (c) $f(x) = \ln(\ln(\ln x)), \quad x > e$

   (d) $f(x) = \frac{(x+3)^4 e^{x^3} \cos \arctan x}{\sin^2 x^7 \ln(2x+2)^4}$

   (e) $f(x) = \arctan \frac{2x}{1+x^2} \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

   (f) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{(x-2)(x^2+2)(x+3)}}$

2. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény, $g(x) = \sin^2 x$ és $h(x) = \cos^2 x$. Határozzuk meg az $F = (f \circ g) + (g \circ h)$ függvény deriváltját.

3. Irjuk fel zárt alakban!

   (a) $F(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}, \quad n \geq 2$

(b) $G(x) = 1 + 2^2 x + \dots n^2 x^{n-1}, \quad n \geq 2$
(Megjegyzés: vegyük észre, hogy $G(x) = (xF(x))')$

Magasabbrendű deriváltak

1. $(\sin(3x+1))^{(4)} =$
2. $(\frac{1}{1-x})^{(5)} =$
3. $(x^2 e^x)^{(100)} =$

Középértéktételek

1. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^7 + 14x - 3$ polinomnak pontosan egy zérushelye van!
2. Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = x^n + ax + b$ valós függvénynek legfeljebb két zérushelye van, ha n páros és legfeljebb három, ha n páratlan.
3. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$
Bizonyítsuk be, hogy f'-nek végtelen sok zérushelye van!
4. Bizonyítsuk, be, hogy $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$!
5. Bizonyítsuk be, hogy $|\tan x + \tan y| \geq |x + y|$, ha $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$!

l'Hospital-szabály

1. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$,
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)}$
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$
4. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x e^{x/2}}{e^x + x}$
5. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}}$

6. $\lim_{x\to 0+} x \ln \sin x$

7. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{1+\ln \sin x}$

8. $\lim_{x\to 0}(\arcsin x)(\cot x)$

9. $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$

10. $\lim_{x\to 0}(1/x - 1/(e^x-1))$

11. $\lim_{x\to 1}(1/\ln x - 1/(x-1))$

12. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

13. $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$

14. $\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\ln x}$

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!

1. $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$
2. $f(x) = x - 2\arctan \frac{x}{x+1}$
3. $f(x) = x^2 e^{1/x}$
4. $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$
5. $f(x) = x^2\sqrt{1-x}$
6. $f(x) = x^2 \ln x^2$
7. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Szélsőértékek meghatározása

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$ abszolút szélsőértékeit a $[-6, 6]$ intervallumon!
2. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \ln x$ abszolút szélsőértékeit az $[1, e]$ intervallumon!
3. Határozzuk meg az $f(x) = xe^{-x}$ szélsőértékeit az $[1/2, \infty]$ intervallumon!
4. Határozzuk meg a $[0, 1]$ intervallumon az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x^3$ függvények távolságát!
5. Bontsuk fel a pozitív b számot két szám összegére, úgy hogy a szorzatuk maximális legyen!
6. Adott térfogatú egyenes hengerek közül melyiknek a legkisebb a felszíne?
7. Határozzuk meg az $A(2, 0)$ pont és az $x^2 + y^2 = 1$ körvonal pontjai közötti legnagyobb és legkisebb távolságot!
8. Határozzuk meg az $a_n = \frac{n^2}{n^3+100}$ sorozat legnagyobb elemét!
9. Bizonyítsuk be, hogy minden valós x esetén
$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2.$$

Taylor-formula

1. Számítsuk ki $\cos 0,2$-t 3 tizedesjegy pontossággal!
2. Adjuk meg $\sqrt{102}$-t 2 tizedesjegy pontossággal!
3. Adjuk meg $e^{0,1}$-t 3 tizedesjegy pontossággal!
4. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor $\sinh x > x + x^3/3$!
5. Irjuk fel $\sin x$ $x_0 = \pi/6$-hoz tartozó 3-ad fokú Taylor-polinomját és írjuk fel a maradéktagot!