Kalkulus 1
2. Feladatsor

2020/21. I. félév

I.Halmazalgebra

1. Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket!
   (a) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
   (b) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
   (c) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
   (d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$
   (e) Ha $A \subset C$, akkor $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$.
   (f) $(A \setminus B) \cup B = A$ akkor és csak akkor, ha $B \subset A$.
   (g) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$ akkor és csak akkor, ha $C = \emptyset$
   (h) $(A \cup B) \setminus B = A$ akkor és csak akkor, ha $A \cap B = \emptyset$

2. Jelölje $\mathcal{P}(A)$ az A halmaz hatványhalmazát, vagyis A részhalmazainak halmazát!
   (a) Adjuk meg $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ elemeit!
   (b) Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B halmazokra $A \subset B$ pontosan akkor, ha $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
   (c) Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B halmazokra $A = B$ pontosan akkor, ha $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.
   (d) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
   (e) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

3. Az A és B halmazok Descartes-szorzatát a szokott módon $A \times B$-vel jelöljük. Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok. Mutassuk meg a következőket!

(a) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$, vagy $B = \emptyset$.

(b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

(c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

II. Relációk, függvények

1. Határozzuk meg az alábbi R relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

   (a) $A := \{-5, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B := \{-2, 1, 2, 3\}$, $R \subset A \times B$ és xRy pontosan akkor, ha $x + y = 7$.

   (b) $A := \{0, 1, 2\}$, $B := \{0, 3, 5\}$, $R \subset A \times B$ és xRy pontosan akkor, ha $xy = 0$.

2. Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek ekvivalenciarelációk, parciális rendezések, illetve rendezések!

   (a) $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, és xRy akkor és csak akkor, ha x ugyanazokból a számjegyekből áll a tizes számrendszerben, mint y.

   (b) Legyen A egy adott sík egyeneseinek halmaza, $R \subset A \times A$, és xRy pontosan akkor, ha x-nek és y-nak nincs közös pontja.

   (c) Legyen A egy adott sík háromszögeinek halmaza, $R \subset A \times A$, és xRy pontosan akkor, ha x hasonló y-hoz.

   (d) $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, és xRy akkor és csak akkor, ha $y - x$ osztható 3-mal.

3. Legyenek x, y, z különböző elemek és $A = \{x, y, z\}$. Adjuk meg az összes ekvivalenciarelációt A halmazon!

4. Legyenek x, y, z különböző elemek és $A = \{x, y, z\}$. Adjuk meg az összes parciális rendezést A halmazon! Melyek lesznek ezek közül rendezések?

5. Legyenek A, B, C, D tetszőleges halmazok, valamint $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$, $H \subset C \times D$. Mutassuk meg, hogy

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

6. Az alábbi relációk közül melyek függvények? Amikor R függvény, akkor invertálható-e?

   (a) $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és xRy pontosan akkor, ha $x|y$ (x osztója y-nak).

   (b) $R \subset P \times P$ és xRy pontosan akkor, ha $x|y$, ahol P a prímszámok halmaza.

(c) $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és xRy pontosan akkor, ha $x^2 = y^2$.

(d) $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és xRy pontosan akkor, ha $x^2 = y^2$.

7. Legyen A egy adott halmaz, és $R \subset A \times A$ egy ekvivalenciareláció A-n. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy R függvény legyen?

8. Injektívek illetve szürjektívek-e az alábbi hozzárendelések? Függvények-e egyáltalán?

   (a) f hozzárendeli minden emberhez az édesanyját.

   (b) g hozzárendeli minden édesanyához a legidősebb gyermekét.

   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto [x]$, ahol $[x]$ jelöli x egészrészét.

   (d) i minden másodfokú polinomhoz hozzárendeli a legnagyobb valós gyökét.

   (e) $j : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$.

9. Irjuk fel az összes $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ bijekciót. Ha f és g ilyen bijekciók, akkor határozzuk meg $f \circ g$-t!

10. Egy nem üres A halmaz **karakterisztikus függvényén** a

$$\chi_A : A \to \{0, 1\},$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

függvényt értjük. Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges nem üres A halmaz esetén az

$$f : \mathcal{P}(A) \to \{\chi_B\}_{B \in \mathcal{P}(A)},$$
$$f(B) = \chi_B$$

függvény bijektív.

11. Határozzuk meg $f \circ g$-t és $g \circ f$-et, illetve értelmezési tartományukat és értékkészletüket, ha

   (a) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = x^2$,

   (b) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$,

   (c)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-\infty, 0] \\ x, & \text{ha } x \in (0, \infty) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-\infty, 0] \\ -x^2, & \text{ha } x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

12. Legyen $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $g(x) = \cos x$ és $h(x) = \ln x$. Határozzuk meg $f \circ g \circ h$-t és $h \circ g \circ f$-et értelmezési tartományukkal és értékkészletükkel együtt!

13. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ Határozzuk meg $f \circ f$, illetve $f \circ f \circ f$ függvényeket!

14. Emlékeztetünk, hogy egy adott $f : X \to Y$ függvény és $A \subset Y$ esetén

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} \subset X$$

jelöli A halmaz ősképét. Legyen $f : X \to Y$ adott függvény és $A, B \subset Y$. Mutassuk meg az alábbiakat:

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$,

(d) amennyiben $A \subset B$, akkor $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

15. Legyen

$$f(x) = \alpha(\alpha + 1)x^2 + (2\alpha + 3)x + 1, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

A valós α paraméter mely értékeire lesz $f^{-1}([0, \infty)) = \mathbb{R}$?

16. Mutassuk meg, hogy az alábbi valós függvények invertálhatók és adjuk meg az inverzüket! (Deriválni még nem tudunk!)

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \neq 2$.

(b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$.

(d) $f(x) = x^2$, $D_f = (-\infty, -1]$.

(e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7x-5}{3}, & \text{ha } -1 \le x < 1 \\ \frac{2}{1+x}, & \text{ha } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(g) Mely α értéknél lesz

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & \text{ha } -1 \le x < 0 \\ 2\alpha - x, & \text{ha } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

invertálható? Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!