Kalkulus 1
6. feladatsor

2020/21. I. félév

Numerikus sorozatok határértéke I.

1. Tetszőleges α,A,B valós számokból kiindúlva, képezzük a következő rekurzív sorozatot:
$$a_1 := \alpha, \quad a_{n+1} := Aa_n + B, (\text{ ha } n \geq 1).$$
A α, A, B és az n számok függvényeként adjuk meg a sorozat n-dik tagját! (Ha $A = 1$, akkor (a_n) számtani, ha $B = 0$, akkor (a_n) mértani sorozat.)

2. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy az (a_n) sorozat nem konvergens! Mutassuk, meg ez alapján, hogy a $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem konvergens!

3. A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy

   (a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 12n + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2} = \frac{1}{2}.$$

   (b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 - n^2 + \sqrt{n} + 1}{5n^2 - 17n + 2} = -\frac{1}{5}.$$

   (c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{n + 7} = +\infty.$$

   (d)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + n^2 - 3n^3}{n^2 + 3n + 7} = -\infty.$$

4. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat minden tagja pozitív és a határértéke A. Mutassuk meg, hogy

   (a) $A \geq 0$.

   (b) az $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

5. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

   (a) $a_n = \frac{5-2n^5}{3n^5+n^4-2n^3+2}$, $\quad b_n = \frac{3n^5-7\cdot 10^{23}n^3}{10^{-38}n^6-67n^2+9n}$, $\quad c_n = \frac{-n^7+n^6-3}{n^5-n^2+4}$

   (b) $a_n = \frac{(3n+1)^4}{2n^4+n^2-n+5}$, $\quad b_n = \frac{(2n^3+3)^2}{(3n+6)^6}$

   (c) $a_n = \frac{(n+1)!}{(3-2n)n!}$, $\quad b_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$, $\quad c_n = \frac{\binom{2n}{4}}{\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}}$

   (d) $a_n = \sqrt{n^4+2n^2+3} - \sqrt{n^4+n}$, $\quad b_n = \sqrt[3]{n^3-3n+8} - \sqrt[3]{n^3+n+1}$,
   $c_n = \frac{1}{n-\sqrt{n^2+3n+5}}$

   (e) $a_n = \frac{3^{2n}}{(-3)^n+10^n}$, $\quad b_n = \frac{3^{2n}}{3^n+9^n}$, $\quad c_n = \frac{9^n}{3^n+2^n}$

   (f) $a_n = \frac{4^{n-1}+n^5 3^{n+2}}{2^{2n+3}+2^{n-2}}$, $\quad b_n = \frac{n^3 2^n+3^n}{2^{2n}-3n^2}$

   (g) $a_n = \sqrt[3n]{3n}$, $\quad b_n = \sqrt[n]{3n}$, $\quad c_n = \sqrt[3n]{n}$, $\quad d_n = \sqrt[5n]{3n}$

   (h) $a_n = \sqrt[n]{2n^3+3}$, $\quad b_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+6}{3n^2+2n}}$, $\quad c_n = \sqrt[n]{\frac{5n^2+4n-5}{n^3+6n^2-n}}$.

   (i) $a_n = (\frac{3n-1}{3n+2})^{2n}$

   (j) $a_n = (\frac{n-2}{n})^{n^2}$

   (k) $a_n = (0.9+\frac{1}{n})^n$, $\quad b_n = (2-\frac{1}{n})^n$

   (l) $a_n = (\frac{2^n+3}{2^n+1})^n$

   (m) $a_n = (\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1})^n$

   (n) $a_n = (1-\frac{1}{n^2})^n$, $\quad b_n = (1-\frac{1}{n})^{n^2}$

   (o) $a_n = (\frac{n^2-2n+1}{n^2-2n+4})^{3n^2-6n+5} + \frac{\sqrt{n^4-n^2+6}-\sqrt{2n^3+n-1}}{n^2+1}$

   (p) $a_n = n^2(\sqrt{3n^4+2n-1} - \sqrt{3n^4+n^2-n})(\frac{-3n+1}{3n+4})^{4n-2}$

   (q) $a_n = (\frac{(n+3)!}{n!n^3})^{n-1}$

   (r) $a_n = (\frac{4n+3}{5n})^{5n^2}$

   (s) $a_n = n^2 \sin\frac{5}{n^2+1}$

   (t) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1) = 1$.

   (u) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} n\ln(1+1/n) = 1$

6. Konvergensek-e az alábbi sorozatok?

(a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

(b) $a_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}$

(c) $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2 + 1})$

(d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n} + 2^n}$

(e) $a_n = \frac{n^3 2^{2n}}{3^{n+1}(2+1/n)^n}$