

# Kalkulus 1

## 7. feladatsor

2020/21. I. félév

### Numerikus sorozatok határértéke II.

1. Legyen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  és  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  két valós sorozat, melyre  $a_n \leq 0 \leq b_n$  minden  $n$ -re és legyen  $c_n = a_n - b_n$ . Mutassuk meg, hogy ha  $(c_n)$  egy nullsorozat (azaz egy 0-hoz tartó sorozat), akkor  $(a_n)$  és  $(b_n)$  is nullsorozat!
2. Határozzuk meg az  $a, b, c$  valós paraméterek értékét úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(an - \sqrt{cn^2 + bn - 2}) = 1$$

legyen.

3. Legyen  $a \geq 0$  és  $b \geq 0$  két rögzített valós szám. Konvergensek-e az alábbi sorozatok?

(a)  $(\sqrt[n]{a^n + b^n})$ .

(b)  $(\sqrt[n]{|a^n - b^n|})$ .

Amennyiben konvergensek, mi lesz a határértékük?

4. Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  valós számok, melyekre  $|\alpha| \neq |\beta|$  és legyen

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n + \beta^n}.$$

Disszkutáljuk, hogy mikor lesz az  $(a_n)$  sorozat konvergens illetve divergens!

5. Legyenek  $a_1, a_2, \dots, a_k$  nemnegatív valós számok. Számoljuk ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}$$

határértéket!

(*Útmutatás:* Feltehető, hogy  $a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Adjunk  $a_1$  segítségével becslést a fenti kifejezésre! )

6. Legyen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  egy adott valós sorozat és

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Mutassuk meg, hogy

- (a) ha  $(a_n)$  monoton növekvő, akkor  $(A_n)$  is monoton növekvő.
- (b) ha  $(a_n)$  monoton csökkenő, akkor  $(A_n)$  is monoton csökkenő.
- (c) ha  $(a_n)$  konvergens, akkor  $(A_n)$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .
- (d) ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$ .
- (e) Mutassunk olyan példát, hogy az  $(a_n)$  sorozat divergál, de az  $(A_n)$  sorozat konvergens.

7. A fenti módszert **Cesaro-féle átlagolási eljárásnak** is hívják. Alkalmazásként mutassuk meg, hogy ha  $(a_n)$  egy olyan sorozat, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = A$ , akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = A.$$

8. Legyen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  egy pozitív tagú sorozat és

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Mutassuk meg, hogy

- (a) ha  $(a_n)$  konvergens, akkor  $(G_n)$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ .
- (b) ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = +\infty$ .

9. Legyen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  egy pozitív tagú sorozat és

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Mutassuk meg, hogy

- (a) ha  $(a_n)$  konvergens, akkor  $(H_n)$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n$ .  
(b) ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty$ .

10. Legyen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  egy pozitív tagú sorozat. Legyen

$$b_1 := a_1, \quad b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \geq 1), \quad \text{és} \quad c_n := \sqrt[n]{a_n} \quad (n \geq 1).$$

Mutassuk meg, hogy

- (a) ha  $(b_n)$  konvergens, akkor  $(c_n)$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .  
(b) ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ .  
(c) Mutassunk olyan  $(a_n)$  sorozatot, melyre  $(c_n)$  konvergens, de  $(b_n)$  divergens.  
(*Útmutatás:* Használjuk az előző feladat eredményét!)

11. Az előző feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$