Kalkulus 1
8. feladatsor

2020/21. I. félév

Numerikus sorozatok konvergenciája

1. A Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok, ahol

   (a)
   $$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

   (b)
   $$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

   (c)
   $$a_n = b_0 + b_1 q + \cdots + b_n q^n,$$

   ahol $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ és $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ egy korlátos valós számsorozat.

2. Legyen $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Mutassuk meg, hogy ha $a_n \leq b_n$ majdnem minden n-re és a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ahol $c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, akkor a $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens, ahol $d_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
   (*Útmutatás:* Használjuk a Cauchy-kritériumot!)

3. Mutassuk meg, hogy ha $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = 0$, akkor a $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ahol $d_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

4. A monotonitás illetve a korlátosság vizsgálatával döntsük el, hogy az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek-e, ahol

(a)

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1/2)^k}{k^2}.$$

(b)

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1,1)^{-k}}{\sqrt{k}}.$$

(c)

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-2k}{k+1}.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$, ahol $\alpha < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

6. A fenti feladat alkalmazásaként mit mondhatunk az alaábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok határértékeiről, ahol

(a)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

(b)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^k}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ rögzített.}$$

(c)

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n.$$

Rekurzív sorozatok

1. Vizsgáljuk meg az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekurziv sorozatokat konvergencia szempontjából és adjuk meg a határértéket, amennyiben létezik!

(a) $a_1 = 6$, $a_n = 5 - \frac{6}{a_{n-1}}$, ha $n \geq 2$.

(b) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$, ha $n \geq 2$.

(c) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$, ha $n \geq 2$.

(d) $a_1 = \sqrt{3}$, $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, ha $n \geq 2$.

(e) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}$, ha $n \geq 2$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha \in [0,1]$, akkor az

$$a_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + \alpha}{2}, \quad (n \geq 2)$$

formulákkal megadott rekurziv sorozat konvergens.

3. Milyen $\alpha > 0$ értékek esetén lesznek az alábbi rekurziv sorozatok konvergensek? Adjuk meg a határértéküket is!

   (a) $a_1 = \sqrt{\alpha}, \quad a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n}, \quad (n \geq 2).$

   (b) $a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{2\alpha a_n}{a_n + \alpha}, \quad (n \geq 2).$