Kalkulus 1.

Írásbeli vizsgadolgozat I.

2018. 01. 08.

Név:

Neptun kód:

Előadó:

1.	2.	3.	4.	$\sum$:

Tudnivalók:

1. A munkaidő 60 perc.
2. A megoldáshoz segédeszköz nem használható.
3. A I. feladatban az előadáson elhangzott formában kérjük a tételeket és a definíciókat kimondani.
4. A II. feladatban nem kell indokolni!
5. Csak a kiadott dolgozat lapjain lehet dolgozni.
6. A sikeres vizsgához az I. feladatban legalább 8 jó választ kell adni és összesen legalább 40 pontot kell elérni.

I. Minimumkövetelmény. *(12×3 pont)*

1. Mit jelent, hogy az a pont az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja?

2. Mit értünk egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz lezárásán?

3. Mikor mondjuk az (a_n) sorozatról, hogy Cauchy-sorozat?

4. Definiálja egy sorozat torlódási pontját!

5. Írja le a sorokra vonatkozó minoráns kritériumot!

6. Mit állít a d'Alembert-féle hányadoskritérium?

7. Mit mond ki a Heine-tétel?

8. Mit jelent az, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az x_0 pontban?

9. Mit állít a Rolle-tétel?

10. Mit állít Weierstrass tétele kompakt halmazon értelmezett folytonos függvényekről?

11. Hogyan definiáljuk egy korlátos függvény (Darboux-féle) alsó integrálját?

12. Mit értünk primitív függvényen?

II. Igaz vagy Hamis? *(15×3 pont)*

Az állítás előtti I vagy H betűt karikázza be, annak megfelelően, hogy az állítás igaz vagy hamis.

1. I H Lehet-e egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek egy pontban egyszerre lokális minimuma és maximuma?
2. I H Minden sorozatnak létezik monoton részsorozata.
3. I H Ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor van neki $+\infty$-hez divergáló részsorozata.
4. I H Minden szigorúan növő sorozat divergens.
5. I H Ha egy sorozat konvergens, akkor monoton és korlátos.
6. I H Ha egy sorozat monoton és létezik konvergens részsorozata, akkor a sorozat konvergens.
7. I H Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható.
8. I H A racionális számok halmaza zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben.
9. I H Kompakt halmazon folytonos függvény korlátos.
10. I H Kompakt halmazon folytonos függvény differenciálható.
11. I H Ha az (a, b)-n értelmezett f függvénynek lokális maximuma van $x_0 \in (a, b)$ pontban és $f(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{1}{f}$-nek lokális minimuma van x_0-ban.
12. I H Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha nem zárt.
13. I H Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény páros, akkor $f'(x)$ páratlan.
14. I H Minden $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{Z}$ számra $\operatorname{ch}^2 nx - \operatorname{sh}^2 nx = 1$ teljesül.
15. I H Az $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cos x$ függvény integrálható a $[-1, 1]$ intervallumon.

III. Bizonyítás. *(10 pont)* Az I intervallumban legyen az f függvény kétszer deriválható és $f'(x) \neq 0$, $x \in I$. Bizonyítsa be, hogy az $f(I)$ intervallumban

$$\left(f^{-1}(y)\right)'' = -\frac{f''(f^{-1}(y))}{\left[f'(f^{-1}(y))\right]^3}.$$

IV. Ellenpélda. *(3×3 pont)*

1. Adjon meg a valós számok halmazában végtelen sok olyan zárt halmazt, amelyek uniója nem zárt

.

2. Adjon meg olyan kétszer differenciálható f és g függvényeket, melyekre valamely a pontban teljesül, hogy $f'(a) = f''(a) = 0$, illetve $g'(a) = g''(a) = 0$, úgy, hogy f-nek a-ban lokális minimuma van, míg g-nek a-ban nincs lokális szélsőértéke.

3. Adjon meg egy olyan (a_n) pozitív tagú nullsorozatot, melyre a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ alternáló sor divergens.