Kalkulus 2,
10. Feladatsor

2020/21. 2. félév

Felületek felszíne

1. Számoljuk ki az adott felületdarabok felszínét!

   (a) $\mathbf{r}(u,v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u\cos v\,\mathbf{j} + 2u\sin v\,\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1, 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

   (b) $\mathbf{r}(u,v) = u\cos\ln v\,\mathbf{i} + u\sin\ln v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$, $0 \le u \le 2, 1 \le v \le 2$.

   (c) $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

   (d) $x^2 = 2yz$, $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.

Felületi integrál

1. Számoljuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvények felületmenti integrálját a megadott irányítású F felület mentén!

   (a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $F : \mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + (u-v)\,\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3, 0 \le v \le 1$, ahol F normálvektora $\mathbf{k}$-val hegyesszöget zár be.

   (b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$, $F : \mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1, 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$, ahol F normálvektora $\mathbf{k}$-val tompaszöget zár be.

   (c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}\,|^3$, F az origó körüli egységgömbfelszín xy-sík feletti része, a gömb középpontja felé mutató normálissal.

Integrál átalakító tételek

1. Számoljuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvények görbementi integrálját az adott G úton, ha lehet Stokes-tétellel!

   (a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z)\,\mathbf{i} + (x+z)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}, \quad G : \mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

   (b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -x^y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$,, $G : x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$, pozitív forgásiránnyal

   (c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy - z)\,\mathbf{i} + (x^2 + z)\,\mathbf{j} + (y - x)\,\mathbf{k}$, ahol G az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 1$ egyenletű ellipszis, pozitív körüljárási iránnyal.

2. Számoljuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvények felületmenti integrálját az adott F felület mentén Gauss-Osztrogradszkij-tétellel!

   (a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 3xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - 4xz\,\mathbf{k}, \quad F : x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 4 = 0$, kifele mutató normálissal.

   (b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2y^2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, ahol F a $z = 25 - x^2 - y^2$ és $z = 0$ által határolt zárt felület, kifele mutató normálissal.

   (c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, F a koordinátasíkok és az $x^2 + y^2 + 2z = 1$ által határolt zárt felület, befele mutató normálissal.