Kalkulus 2,
1. Feladatsor

2020/21. 2. félév

I. Improprius integrál

1. Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét, amennyiben konvergensek!

   (a)
   $$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

   (b)
   $$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$$

   (c)
   $$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2+3x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

   (d)
   $$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$$

   (e)
   $$\int_{-1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{2y+1}}\,\mathrm{d}\,x$$

   (f)
   $$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}\,x$$

   (g)
   $$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

(h)

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos x \,\mathrm{d}\, x$$

(i)

$$\int_0^1 \ln^n x \,\mathrm{d}\, x, \quad (n \in \mathbb{N})$$

(j)

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\, x$$

(k)

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}\, x}{x^2 - 3x + 2}$$

(l)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} \,\mathrm{d}\, x$$

Javasolt helyettesítés: $t = \sqrt{x}$.

(m)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\, x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

Javasolt helyettesítés: $t = \operatorname{tg} x$.

(n)

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}\, x}{x^2 - 4x + 3}$$

2. Vizsgáljuk meg a következő integrálok konvergenciáját!

(a)

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} \,\mathrm{d}\, x$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{1 - x^3}} \,\mathrm{d}\, x$$

(c)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{\sin x}}$$

(d)

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}, \quad (b > a)$$

(e)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x^p + x^q}$$

3. Legyen

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Mutassuk meg, hogy a $\int_0^\infty f$ improprius integrál konvergens, de $\int_0^\infty |f|$ divergens.

4. Az integrálkritérium alkalmazásával döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi numerikus sorok?

(a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha+1}}, \quad (\alpha \geq 0)$$

(b)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^{\alpha+1}}, \quad (\alpha \geq 0)$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$$

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n}{1 + \operatorname{ch}^2 n}$$