Kalkulus 2,
2. Feladatsor

2020/21. 2. félév

$\mathbb{R}^n$ topológiája, pontsorozatok

Jelölések

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

1. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, skalárszorzat $\mathbb{R}^n$-ben
2. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, metrika $\mathbb{R}^n$-ben
3. $B(x, r) \equiv B_x(r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$, x körüli r sugarú nyílt gömb

1. Legyen $x, z \in \mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy egy $y \in \mathbb{R}^n$ pontra pontosan akkor teljesül, hogy
$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z),$$
ha y az x-et és z-t összekötő szakaszon fekszik.

2. Igazoljuk, hogy minden $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ esetén
$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

3. Legyen $(x_n), (y_n)$ két sorozat $\mathbb{R}^p$-ben. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_n \to a$ és $y_n \to b$, akkor $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle a, b \rangle$ és $\|x_n\| \to \|a\|$.

4. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-n a következő rekurzív sorozatot! $x_0 = (0, 0)$,
$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + (2^{-n}, 0), & \text{ha } n \text{ páros}, \\ x_n + (0, 2^{-n}), & \text{ha } n \text{ páratlan}. \end{cases}$$
Bizonyítsuk be, hogy (x_n) konvergens. Mi a határértéke?

5. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat korlátosság és konvergencia szempontjából!

   (a) $x_n = \left((-1)^n \frac{1}{n}, 1 + (-1)^n\right) \in \mathbb{R}^2$

   (b) $x_n = \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}, \frac{1}{n^2}, (1 + \frac{1}{n})^2\right) \in \mathbb{R}^3$

   (c) $x_n = \left((1 + \frac{1}{n})^{n+1}, \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \frac{5n^2+3n-1}{1-2n^2}\right) \in \mathbb{R}^3,$

   (d) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{n^2}{n+2}, \ldots, \frac{n^{p-1}}{n+p-1}\right) \in \mathbb{R}^p,$

   (e) $x_n = \left(n(\sqrt[n]{2} - 1), n(\sqrt[n+1]{2} - 1), \ldots, n(\sqrt[n+p-1]{2} - 1)\right) \in \mathbb{R}^p.$

6. Vizsgálja meg az adott térben az alábbi halmazokat nyíltság, korlátosság és ívszerűen összefüggőség szempontjából!

   (a) $A = \{(x, y) : a < x < b, y = 0\} \in \mathbb{R}^2,$

   (b) $A = \{(x, y) : x^2 - y^2 < 1\} \in \mathbb{R}^2,$

   (c) $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\} \in \mathbb{R}^2,$

   (d) $A = \left\{(x, y) : x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}\right\} \in \mathbb{R}^2,$

   (e) $A = \{(x, x) : x \neq 0, x, y \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^2.$

7. Legyen
$$H \subset \mathbb{R}^2, \quad H := \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   Határozzuk meg H torlódási pontjait $\mathbb{R}^2$-ben.

8. Határozzuk meg az
$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) : x > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$
   halmaz belsejét, határát és lezártját!

9. Mutassuk meg, hogy bármely $H \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\partial\partial H \subseteq \partial H$. Mutassunk példát arra, amikor a tartalmazás valódi.

10. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$ és H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a H elemeinek i-edik koordinátáiból álló halmaz. Bitonyítsuk be, hogy H pontosan akkor korlátos $\mathbb{R}^n$-ben, ha mindegyik H_i korlátos $\mathbb{R}$-ben.

11. Mutassuk meg, hogy ha $B(x, r) \equiv B_x(r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$, akkor a lezártja $\overline{B}(x, r) \equiv B_x(r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}$. Igaz-e ez tetszőleges metrikus térben?

12. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt. Bizonyítsuk be, hogy létezik $a \in A$, melyre $d(x, a) = d(x, A)$, ahol
$$d(x, A) = \inf \{d(x, b) : b \in A\}$$
    az x pont távolsága az A halmaztól.