Kalkulus 2,
3. Feladatsor

2020/21. 2. félév

Többváltozós függvények határértéke, folytonossága

1. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét. A szintvonalak illetve síkmetszetek vizsgálatával ábrázoljuk vázlatosan a függvényeket! (Ha van lehetőségünk, rajzoltassuk ki valamilyen programcsomag segítségével!)
   (a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$,
   (b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$,
   (c) $f(x,y)=1+2x^2+3y^2$,
   (d) $f(x,y)=y^2-x^2$,
   (e) $f(x,y)=\frac{1}{2x^2+3y^2}$.
2. Határozzuk meg az alábbi függvények szintfelületeit!
   (a) $f(x,y,z)=x^2+y^2-\frac{z^2}{2}$,
   (b) $f(x,y,z)=x+y^2+z^2$,
   (c) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$.
3. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!
   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$,
   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x^2y}{x^2\cos y^2}$,
   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{2x^2+2y^2}$,
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5xy^3}{2x^2+2y^2}$,
   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,1-0)}\frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$,

(f) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2}$,

(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$,

(h)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}, \quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}, \quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}$$

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin 2y}{x^2+y^2}$,

(j) $\lim_{x\to3, y\to\infty} \frac{xy-1}{y+1}$.

(k) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2+4y^2) \arctan\frac{x}{y}$.

4. Vizsgáljuk meg az alábbi többváltozós függvényeket folytonosság szempontjából!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} (2x+3y)\ln(x^2+y^2), & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{y}, & \text{ha } y \neq 0, \\ 0, & \text{ha } y = 0 \end{cases}$$

(d) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

(e) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$

5. Folytonos-e az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{xy}, & \text{ha } xy \neq 0, \\ 1, & \text{ha } xy = 0 \end{cases}$$

függvény a $(0,0)$ pontban

(a) $\mathbb{R}^2$-re vonatkozólag?

(b) az $A = \{(x,y) : y = 2x\}$ halmazra vonatkozólag?

(c) a $B = \{(x,y) : y = -x\}$ halmazra vonatkozólag?

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény, melyre teljesülnek az alábbiak:

(a) $x \mapsto f(x, y_0)$ folytonos minden $y_0 \in \mathbb{R}$ esetén,

(b) $y \mapsto f(x_0, y)$ folytonos minden $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén,

(c) $f(K)$ kompakt minden $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt halmazra.

Mutassuk meg, hogy f folytonos.