Kalkulus 2,
4. Feladatsor

2020/21. 2. félév

Többváltozós függvények deriválhatósága

1. Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeinek értelmezési tartományát és határozzuk meg a parciális deriváltfüggvényeket!

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$,

   (b)
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (c)
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. A termodinamikában az ideális gáz T hőmérséklete, p nyomása és V térfogata közötti összefüggést a $pV = RT$ egyenlet írja le, ahol $R = 8,314 J/K \cdot mol$ az un. Avogadro-szám. A reális gázoknak jobb leírását adja az un. Dieterici-egyenlet, mely szerint:
   $$f(p,T,V) = p(V-b)e^{\frac{a}{RVT}} - RT = 0,$$
   ahol a és b a gázra jellemző állandók. Adjuk meg a V'_T deriváltat!

3. Határozzuk meg az alábbi parciális deriváltakat!

   (a) $f(x,y) = 3xy, \quad x = \sin(u+v), \quad y = \cos(u+v), \quad f'_u = ?, \quad f'_v = ?$,

   (b) $f(x,y) = \arcsin xy, \quad x = we^{uv}, \quad y = 2u - 3vw, \quad f'_u = ?, \quad f'_v = ?, \quad f'_w = ?$,

   (c) $f(x,y) = \arcsin(xy), \quad x = we^{uv}, \quad y = 2u - 3wv, \quad f'_u = ?, \quad f'_v = ?.$

4. Hol deriválhatók az alábbi függvények? Adjuk meg a deriváltat is!

   (a)
   $$f(x,y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$$

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (c)
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (d)
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (e)
   $$f(x,y) = \begin{cases} x^{4/3}\sin(y/x), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

5. Adjuk meg az az alábbi függvények P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét, illetve a $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos iránymenti deriváltat P_0-ban!

   (a) $f(x,y) = 3y + e^{xy^2} - 2y\arctan\frac{x}{y}$, $P_0(0,1)$, $\mathbf{v} = (2,1)$

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3y^2}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ -3, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   $P_0(-1,1)$, $\mathbf{v} = (-5,1)$

   (c) $f(x,y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}}$, $P_0(-\frac{1}{2},1)$. Keressük meg a maximális és minimális értékű iránymenti deriváltat P_0-ban!

6. Határozzuk meg az $xyz = 1$ felületnek az $x+y+z = 3$ síkkal párhuzamos érintősíkját!

7. Igazoljuk, hogy az $xyz = a^3$, $(a > 0)$ felület érintősíkjai a koordinátasíkokkal állandó térfogatú tetraédereket alkotnak!

8. Határozzuk meg azon pontok összességét, amelyekben az

$$f(x, y.z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

függvény tetszőleges irányban vett iránymenti deriváltjának a hossza kisebb, mint 1/3.