Kalkulus 2,
5-6. Feladatsor

2020/21. 2. félév

Magasabbrendű parciális deriváltak

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi többváltozós függvények kielégítik az adott parciális differenciálegyenletet!
   (a) $z(x,y) = e^{-ay}\cos ax, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = a\frac{\partial z}{\partial y},$
   (b) $u(x,t) = \sin(x-at) + \ln(x+at), \quad u_{tt} = a^2 u_{xx},$
   (c) $u(x,y) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y, \quad u_{xx} + u_{yy} = 0.$
2. Mutassuk meg, hogy az
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+xy^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0.0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   függvényre $f_{xy} \neq f_{yx}$.

Differenciálok, Taylor-polinom

1. Egy gömb átmérőjét 10 cm-nek mérjük. A mérés pontossága ± 0.1 mm. Becsüljük meg a gömbtérfogat számított értékének pontosságát!

2. Az R_1, R_2, R_3 ellenállásokat párhuzamosan kötve, az eredő ellenállás R értékére

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Az ellenállások értékére rendre 25Ω, 40Ω, 50Ω értékeket mérünk legfeljebb 0.5% hibával. Mekkora a maximális hiba R számított értékére? Melyik ellenállás megváltozására a legérzékenyebb az eredő ellenállás?

3. A P nyomású, V térfogatú, T hőmérsékletű ideális gázokat jól írja le a $PV = 8.31T$ egyenlet, ahol a nyomást kilopascal-ban (kPa), a térfogatot literben (l), a hőmérsékletet Kelvinben (K) adjuk meg. Hogyan változik meg közelítően a gáz nyomása, ha a térfogatot 12 l-ről 12.3 l-re növeljük, miközben a hőmérsékletet 310 K-ről, 305 K-re csökkentjük?

4. Határozzuk meg az alábbi függvények kérdezett differenciáljait!

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{d}\,f = ?, \mathrm{d}^2\,f = ?$

   (b) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{d}\,f = ?, \mathrm{d}^2\,f = ?$

   (c) $f(x,y) = x\ln(xy)$, $\mathrm{d}\,f = ?, \mathrm{d}^2\,f = ?$, $\mathrm{d}^3\,f = ?$

5. Határozzuk meg az alábbi kifejezésekben α értékét úgy, hogy teljes differenciálokat kapjunk!

   (a) $xy\,\mathrm{d}\,x + \alpha x^2\,\mathrm{d}\,y$

   (b) $e^{-x}y\,\mathrm{d}\,x + \alpha e^{-x}\,\mathrm{d}\,y$,

   (c) $\frac{1}{1+(x-y)^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\alpha}{1+(x-y)^2}\,\mathrm{d}\,y$

6. Írjuk fel az alábbi f függvények $P_0(x_0, y_0)$ ponthoz tartozó $T_n(x,y)$ n-ed fokú Taylor-polinomját!

   (a) $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$, $P_0(1,-2)$, $T_2(x,y) = ?$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $P_0(0,0)$, $T_2(x,y) = ?$

   (c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $P_0(1,1)$, $T_3(x,y) = ?$

Szélsőértékszámítás

1. Határozzuk meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$

(b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy-6x+2z$

(c) $f(x,y) = e^{3x^2}+y^2$

(d) $f(x.y) = \mathrm{ch}(x^2+y^2)$

(e) $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$

2. Határozzuk meg az alábbi f függvények abszolút szélsőértleit a megadott H halmazon!

   (a) $f(x,y) = x^2+y^2-2x-2y$, $H = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 9-x\}$

   (b) $f(x,y) = x^2+y^2-xy-3x$, $H = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 3\}$

   (c) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $H = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

   (d) $f(x,y) = x^3+y^3-9xy+27$, $H = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$

   (e) $f(x,y) = x^2-xy+y^2$, $H = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}$

3. Felül nyitott téglatest alakú, V térfogatú tartályt szeretnénk készíteni. Mekkorák legyenek a tartály élei, hogy az elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk?

4. Keresük meg az $x^2+y^2+z^2 = 36$ gömbön azon pontokat, melyek távolsága a $P(1,2,2)$ ponttól a legnagyobb, illetve legkisebb!

5. Egy adott ponton átmenő síkok közül melyik van legmesszebb az origótól?

6. Legfeljebb mekkora térfogatú téglatest fér bele az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

   egyenletű ellipszoidba? (Feltehetjük, hogy a téglatest élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!)

7. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis közrezárja az $x^2+y^2 = 2y$ kört. Hogyan válasszuk meg a-t és b-t, hogy az ellipszis területe minimális legyen?

8. Az $xy^2z^2 = 1$ felület érintősíkjai közül melyik van a legközelebb az origóhoz?

9. Tengerbiológusok megállapították, hogy ha megérzik a vér jelenlétét, cápák abban az irányba kezdenek úszni, amerre a vér koncentrációja a leggyorsabban nő. A víz felszínén a $P(x,y)$ pontban legyen a vér koncentrációja

$$C(x,y) = e^{-\frac{x^2+2y^2}{10^4}}.$$

Tegyük fel, hogy a cápa az (x_0, y_0) pontban érzékeli először a vér jelenlétét. Írjunk fel egy egyenletet arra nézve, hogy milyen úton fog a cápa úszni.

10. Egy a, b oldalú téglalapot 2 az oldalakkal párhuzamos egyenessel 4 téglalapra vágunk. Vegyük a két kisebb területű téglalap területének négyzetösszegét. Mennyi ennek a minimuma, illetve maximuma?

11. Valamely y fizikai mennyiség feltételezésünk szerint egyenesen arányos egy másik x mennyiséggel, azaz $y = Ax + B$. A két mennyiség értékére n mérést végzünk, azaz rendelkezésünkre állnak az $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ mérési adatok. Hogyan válasszuk meg A-t és B-t, hogy az $y = Ax + B$ egyenes a leggközelebb feküdjön a mért pontokhoz, amin azt értjük, hogy az

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (Ax_i + B))^2$$

kifejezés minimális legyen? (Ezt hívják legkisebb négyzetek módszerének.)

12. Egy 1000 cm^3 térfogatú téglatest alakú ékszertartó ládikát szeretnénk ajándékozni a kedvesünknek. Megnyugtató anyagi helyzetünknek köszönhetően, az alját bronzból (melynek értéke 5000 Ft/cm^2), oldalait ezüstből (melynek értéke 8000 Ft/cm^2), fedelét aranyból (melynek értéke 20000 Ft/cm^2) készítjük. Hogyan válasszuk meg a dobozka méreteit, ha költségünket vonzalmunk dacára minimalizálni szeretnénk?

13. Keressük meg az $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ ellipszis azon pontját, melybe húzott érintőegyenes a legtávolabb van az origótól!

14. Bizonyítsuk be, hogy, ha $x, y \geq 0$, akkor

$$\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}.$$

15. Keressük meg az $x^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$ ellipszisbe írható legnagyobb kerületű téglalapot! (Feltehetjük, hogy a téglalap oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.)