Kalkulus 2,
7. Feladatsor

2020/21. 2. félév

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények differenciálása

1. Adjuk meg a következő függvények Jacobi-mátrixát (deriváltmátrixát)!
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (e^x, x^2 + y^2, \sin e^{xy^3})$
   (b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, w) \mapsto (e^{xy^2 z} w, \operatorname{arctg} x^w)$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} \mapsto \operatorname{grad} \ln |\,\mathbf{r}\,|$
2. Igazoljuk, hogy a vektorok vektoriális szorzása, mint $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ függvény, differenciálható! Mi a deriváltja?

Inverz- és implicit függvények

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvények az értelmezési tartományuk bármely pontja körül lokálisan invertálhatóak! Határozzuk meg a lokális inverzek elsőrendű közelítését a $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ pont körül!

   (a)
   $$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (2, 3)$$

   (b)
   $$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + x \sin y \\ e^x - x \cos y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (1, 1)$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos\frac{y}{x} \\ x\sin\frac{y}{x} \end{pmatrix}, \quad (x>0, y\in\mathbb{R}), \quad \mathbf{a}=(1,0).$$

2. Mutassuk meg, hogy az : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^3, y^3)$ függvény invertálható az origó egy környezetében, de az $f'(0,0)$ mátrix nem invertálható. Deriválható-e az inverz az origóban?

3. Megoldható-e az

$$\begin{aligned} 3x^2 - yz &= 0 \\ 3x^2 - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer az y, z ismeretlenekre az $x = 1$ pont egy környezetében? Ha igen, adjuk meg a megoldás egy elsőrendű közelítését az adott pont egy környezetében!

4. Mutassuk meg, hogy az

$$\begin{aligned} 3x + y - z - u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer

(a) megoldható az x, y, u ismeretlenekre a z függvényében;

(b) megoldható az x, z, u ismeretlenekre az y függvényében;

(c) megoldható az x, z, u ismeretlenekre az u függvényében;

(d) nem oldható meg az x, y, z ismeretlenekre az u függvényében.

5. Igazoljuk, hogy létezik olyan folytonosan differenciálható $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, mely a 0 pont egy környezetében van értelmezve és eleget tesz az

$$e^{x+y(x)} - 2\cos y(x) + 1 = 0$$

egyenlőségnek. Adjuk meg $y'(0)$-t!

6. Mutassuk meg, hogy az $y_0 = 0$ pontbak létezik olyan $\mathcal{B}$ környezete, hogy minden $y \in \mathcal{B}$ esetén az

$$\ln\sqrt{x+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

egyenletnek pontosan egy megoldása van.

7. Legyen $F(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} + e^{xz} - z - \frac{\pi}{4}$, és $F(0, 1, 1) = 0$.Igazoljuk, hogy az $F(x, y, z) = 0$ az $8x, y) = (0, 1)$ pont környeztében differenciálható $z(x, y)$ függvényt határoz meg. Adjuk meg $z'_x(0, 1)$ és $z'_y(0, 1)$ értékét!

Feltételes szélsőérték

1. Határozzuk meg az f függvény feltételes szélsőértékeit a megadott feltételek mellett!
   (a) $f(x, y) = xy$, $x^2 + y^2 = 1$
   (b) $f(x, y, z) = xyz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$
   (c) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, $x - y = \frac{\pi}{4}$.
2. Egy adott ponton áthaladó síkok közül melyik van legmesszebb az origótól?
3. (Euklidesz legkisebb terület problémája.) Tekintsük a síkon a BAC hegyes szögtartományt (a szög csúcsa A-nál van) és vegyünk fel a szögtartományban egy tetszőleges P pontot. Fektessünk egyenest a P ponton keresztül, úgy, hogy az elmetszi a szögszárakat a T_1 illetve T_2 pontokban. Hogyan válasszuk meg az adott egyenest, hogy az AT_1T_2 háromszög területe minimális legyen?