

# Kalkulus 2,

## 9. Feladatsor

2020/21. 2. félév

### Vonalintegrál

1. Határozza meg az alábbi térgörbék ívhosszát!

(a)  $\mathbf{r}(t) = t \cos(3 \ln t) \mathbf{i} + t \sin(3 \ln t) \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) A görbe az  $x^2 = 3y$  és a  $2xy = 9z$  felületek metszésvonala az  $0 \leq x \leq 2$  koordináták között.

(c) A görbe az úgynevezett *Viviani-féle görbe*, azaz az  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  gömb és az  $x^2 + y^2 - Rx = 0$  henger metszésvonala.

2. Határozza meg az  $\int_{\gamma} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$  vonalintegrálokat az alábbi esetekben!

(a)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x + yz) \mathbf{i} + (x^2 - z^2) \mathbf{j} + (xy + z) \mathbf{k}$ , és

i.  $\gamma$  az  $A(-1, 2, 0)$  pontból a  $B(5, 5, 9)$ -ig tartó egyenesszakasz,

ii.  $\gamma$  az  $A(-1, 2, 0)$  pontból induló, és a  $B(5, 5, 9)$  pontba érkező töröttvonal, mely először az  $x$ , majd a  $z$ , végül az  $y$  tengellyel párhuzamos szakaszokból áll.

(b)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$  és  $\gamma : \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos^2 t + \mathbf{j} \cos t \sin t + \mathbf{k} \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ .

(c)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2 + y + z) \mathbf{i} + (x + y^2 + z) \mathbf{j} + (x + y + z^2) \mathbf{k}, \quad \gamma : \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cosh t + \mathbf{j} \sinh t + 2t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$ .

3. Az alábbiakban  $U \in \mathbb{R}^2$  egy síkbeli tartomány, melynek határgörbáját  $\partial U$  jelöli. A Green-tétel segítségével határozza meg a

$$\int_{\partial U} \mathbf{f} \, d\mathbf{r}$$

integrálokat, ahol

(a)  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x^2\}$  és  $\mathbf{f}(x, y) = (x \cos y, y + x)$ .

(b)  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$  és  $\mathbf{f}(x, y) = (-y^3, x^3)$ .

4. Számítsa ki az alábbi görbék által határolt tartomány területét!

(a)  $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

(b)  $\mathbf{r}(t) = (2t - t^2, 2t - t^3)$ ,  $t \in [0, 2]$ .

5. Potenciálosak-e az alábbi vektormezők? Ha igen, határozza meg egy potenciálfüggvényét!

(a)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz - xy) \mathbf{i} + (xz - \frac{x^2}{2} + yz^2) \mathbf{j} + (xy + y^2z) \mathbf{k}$ .

(b)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (5x^2y - 4xy) \mathbf{i} + (3x^2 - 2y) \mathbf{j}$ .

(c)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = e^{yz} \mathbf{i} + xze^{yz} \mathbf{j} + xye^{yz} \mathbf{k}$ .

További feladatok találhatóak:

- Babcsányi-féle Matematika feladatgyűjtemény II. 17. fejezet 72-96, 18. fejezet 42-62., 84-88.