Kalkulus 1
1. Feladatsor

2021/22. I.félév

I. Logikai feladatok

Az alábbi feladatokban a $\wedge$ jelöli az „ÉS”, $\vee$ a „VAGY”, $\neg$ a „negálás” műveletét.

1. Igazoljuk a következő azonosságokat!

   (a) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

   (b) $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

   (c) $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)]$

   (d) $[\neg p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p \equiv 1$

   (e) $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$

   (f) $\neg[((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

2. Az alábbi szöveges feladatoknál formalizáljuk az állításokat logikai műveletek és kvantorok segítségével, majd tagadjuk az állításokat formálisan és szövegesen is!

   (a) Minden medve szereti a mézet.

   (b) Van olyan méz, amit nem minden medve szeret.

   (c) A házban van ablak, ami nyitva van.

   (d) A házban van emelet, ahol minden ablak nyitva van.

   (e) Minden emeleten minden ablak nyitva van.

   (f) A villamos kar bármely szak minden évfolyamán van lány hallgató.

   (g) „Minden asszony életében van egy pillanat,
   Mikor olyat akar tenni, amit nem szabad.”

(h) Van olyan a, hogy minden b-hez egyetlen x tartozik, melyre $a + x = b$.

(i) Minden tengerész ismer olyan kikötőt, ahol van olyan kocsma, ahol még nem járt.

3. Egy udvarban kecskék és bolhák vannak. Azt, hogy egy bolha megcsípett egy kecskét, a $\Phi(B, K)$ formulával jelöljük. Írjuk le a következő állítások tagadását formulával és szöveggel is!

   (a) $(\forall K)(\exists B)\Phi(B, K)$

   (b) $(\exists K)(\forall B)\Phi(B, K)$

   (c) $(\exists B)(\forall K)\Phi(B, K)$

   (d) $(\forall K)(\forall B)\Phi(B, K)$

   (e) $(\exists K)(\exists B)\Phi(B, K)$

   (f) $(\forall B)(\exists K)\Phi(B, K)$.

II. Bizonyítási módszerek (direkt, indirekt, teljes indukció)

1. Az előadáson tanult módszerrel adjunk zárt formulát a következő kifejezésekre!

   (a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

   (b) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$

2. Hozzuk zárt alakra az alábbi kifejezéseket!

   (a)
   $$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$
   (*Útmutatás:* Használja fel az $1^2+2^2+\cdots+(2n)^2$ összegre vonatkozó formulát!)

   (b)
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)},$$

   (c)
   $$\sum_{k=1}^{n}k(k+1),$$

   (d)
   $$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2).$$

3. Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok esetén, jelölje $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ közül a legnagyobbat, $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pedig a legkisebbet! Mutassuk meg, hogy

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

Adjunk formulát $\max(x, y, z)$-re illetve $\min(x, y, z)$-re!

4. Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak!

   (a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

   (b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

   (c) $\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}+3}{4} + 5.$

5. Bizonyítsuk be teljes indukcióval a következő azonosságokat illetve egyenlőtlenségeket ($n \in \mathbb{N}$)!

   (a) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$, $(n \geq 1)$,

   (b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$, $(n \geq 1)$,

   (c) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$, $(n \geq 2)$,

   (d) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$, $(n \geq 2)$,

   (e) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$, ahol a bal oldalon n darab gyökjel van és $n \geq 1$,

   (f) $3^n > 2^n + 7n$, ha $n \geq 4$

   (g) $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \ldots (1 + x^{2^n}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$, ha $x \neq 1$.

6. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a nevezetes Fibonacci-sorozat, azaz $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, és $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$, valahányszor $n > 1$. Bizonyítsuk be, hogy

   (a) a_n és a_{n+1} relatív prímek.

   (b) $\frac{1{,}6^n}{3} < a_n < 1{,}7^n$, ha $n > 0$.

7. Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény, melyre teljesül, hogy $f(xy) = f(x) + f(y)$ minden $x, y \in \mathbb{N}$ esetén. Mutassuk meg, hogy $f(a^n) = nf(a)$, minden a, n természetes számra.

II. Egyenlőtlenségek

1. Emlékeztetünk a harmonikus, mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenségre. Ha $n \geq 2$ természetes szám és $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket! Mikor van egyenlőség?

   (a) $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$, $n \in \mathbb{N}^+$

   (b) $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}, n \in \mathbb{N}^+$

   (c) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}, \quad (n = 2, 3, \dots)$

   (d) $n \in \mathbb{N}^+$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valósak,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

   (e) $n \in \mathbb{N}^+$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valósak,

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \cdots a_n^n}{n}$$

2. A Bernouilli-egyenlőtlenség alapján bizonyítsuk be, hogy van olyan n pozitív egész szám, melyre

   (a) $0,9^n < \frac{1}{100}$,

   (b) $\sqrt[n]{2} < 1,01$,

   (c) $\sqrt[n]{0,1} > 0,9$.

3. Igazoljuk az alábbiakat!

   (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$,

   (b) $||a| - |b|| \leq |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{R}$,

   (c) $|a| \leq |a + b| + |b|, \quad a, b \in \mathbb{R}$.