Kalkulus 1
8-9. feladatsor

2021/22. I. félév

Részsorozatok, torlódási pontok, alsó és felső határérték

1. Mutassuk meg, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat valamely $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata konvergens, akkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens.

2. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat, melyre $a_{2n} \to A$ és $a_{2n+1} \to B$.

   (a) Mutassuk meg, hogy ha $A = B$, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens és $a_n \to A$.

   (b) Mutassuk meg, hogy ha $A \neq B$, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bármely konvergens részsorozata vagy A-hoz, vagy B-hez tart.

   (c) Mutassuk meg, hogy ha tudjuk, hogy még $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat is konvergens, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens.

3. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Mutassuk meg, hogy $\alpha = \liminf a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ pontosan akkor, ha

   (a) minden $c < \alpha$ esetén $c < a_n$ majdnem minden n-re és

   (b) minden $c > \alpha$ esetén $a_n < c$ végtelen sok n-re.

   Fogalmazzunk meg hasonló állítás $\limsup a_n$-re is!

4. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy

   (a)
$$\liminf a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\}.$$

(b)
$$\limsup a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\}.$$

5. Keressük meg az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok értékkészletének infimumát és supremumát, valamint a sorozatok lim inf-jét és lim sup-ját!

   (a) $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$,

   (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$,

   (c) $a_n = (3 + (-1)^n)n$,

   (d) $a_n = 1 + 2(-1)^n + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

   (e) $a_n = n^{(-1)^n}$.

6. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ két valós sorozat. Mutassuk meg, hogy
$$\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf(a_n + b_n) \le \liminf a_n + \limsup b_n \le \limsup(a_n + b_n)$$
$$\le \limsup a_n + \limsup b_n.$$

7. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ adott valós számok. Adjunk meg olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatot, melyre $\alpha_i \notin \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, α_i torlódási pontja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ -nek és α_i-ken egyéb torlódási pontja nincs.

8. Adjunk meg olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatot, amelynek minden a_{n_0} tagjához van olyan részsorozata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek, ami a_{n_0}-hoz konvergál.

Numerikus sorok

1. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjuk meg a határértéküket!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

   (f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}}$

   (g) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2}-(-2)^{k+2}}{5^k}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (def alapján!)

2. Majoráns és minoráns kritérium.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^6+2n^2-\sqrt{n}}$
   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5+n^3+1}{n^8-n^2+3}$
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^7+n^2-n+3}$
   (j) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

3. Konvergensek-e az alábbi sorok?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^n$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$
   (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$
   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$
   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{ha } n = 2k-1 \\ \frac{1}{3^n}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$
   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\arctan n\right)^n$

4. Alternáló sorok, Leibniz kritérium. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjunk közelítést a sorösszegre, legfeljebb 0.1-es pontossággal!

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\lg n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$
   (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n}{n^2-1}$
   (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-n}{n+1}\right)^n$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$
   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1000}$

5. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét legfeljebb 10^{-3} hibával, amennyiben konvergensek!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^n$
   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!-n!}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n+10^n}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$

6. Mekkora hibát követümk el, ha a sorösszeget a 10. részletösszeggel közelítjük?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+\sqrt{2}}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3^n}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}+n^2+3}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n^2+n}$

7. Abszolút illetve feltételesen konvergensek-e?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+4)}{n^2+4}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-3n+8}$

(d) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} - \ldots$

(e) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \cdots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \ldots$