VIK A2 Matematika,
13. Gyakorlati anyag - Sorok

2021/22. 2. félév

1. Numerikus sorok

1. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjuk meg a határértéküket!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

   (f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}}$

   (g) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2}-(-2)^{k+2}}{5^k}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (def alapján!)

2. A Cauchy-féle konvergenciakritériummal döntsük el, hogy konvergensek-e?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n^2+1}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$

3. Alternáló sorok, Leibniz kritérium. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjunk közelítést a sorösszegre, legfeljebb 0.1-es pontossággal!

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\lg n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n}{n^2-1}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-n}{n+1}\right)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1000}$

4. Majoráns és minoráns kritérium. (A keddi gyakon mondjuk el mi az!)

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^6+2n^2-\sqrt{n}}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5+n^3+1}{n^8-n^2+3}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^7+n^2-n+3}$

   (j) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

5. Konvergensek-e az alábbi sorok?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1}\right)^n$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$

   (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{ha } n = 2k-1 \\ \frac{1}{3^n}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan n\right)^n$

6. Integrálkritériummal döntsük el, hogy konvergensek-e?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$

7. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét legfeljebb 10^{-3} hibával, amennyiben konvergensek!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^n$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!-n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n+10^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$

8. Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget a 10. részletösszeggel közelítjük?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+\sqrt{2}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}+n^2+3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n^2+n}$

9. Abszolút illetve feltételesen konvergensek-e?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+4)}{n^2+4}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-3n+8}$

(d) $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2^3}-\cdots-\frac{1}{n!}+\frac{1}{2^n}-\dots$

(e) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\cdots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\dots$

2. Hatványsorok, Taylor-sorok

1. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát! (A keddi gyakorlaton mondjuk el a főbb tudnivaókat!)

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} x^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{\sqrt{(4n-1)2^n}}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}5^{\sqrt{n}}}$

2. Adjuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^{n+1}}$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{5^{n+2}} x^n$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}$

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}(x+4)^n$

3. Adjuk meg a következő függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát és határozzuk meg a sor konvergenciatartományát!

   (a) $f(x) = \arctan 2x$

   (b) $f(x) = \frac{3}{8+x^3}$

   (c) $f(x) = \sin^2 x$

(d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{1-2x^2}$

(f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{27-x}}$

(g) $f(x) = e^{-2x^2}$

(h) $f(x) = \cos x^2$

4. Adjuk meg a következő függvvények $x_0 = 1$ körüli Taylor-sorát és határozzuk meg a sor konvergenciatartományát!

   (a) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 3$

   (b) $f(x) = e^{-2x}$

   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$

   (d) $f(x) = e^x$

5. Vegyes feladatok

   (a) Bizonyítsuk be, hogy

   $$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right).$$

   Útmutatás: Irjuk fel $\arctan x$ 0 körüli Taylor-sorát, az $\frac{1}{1+x^2}$ geometriai sor integrálásával, és éljünk az $x = 1$ helyettsítéssel!

   (b) Adjuk meg az

   $$\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

   integrál értékét $0,01$ pontossággal!

   (c) Adjuk meg az

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

   sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

   (d) Adjuk meg az

   $$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

   sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét! Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

(e) Adjuk meg az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^2}$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét! ($\frac{1}{1-x}$ deriválásával)

(f)

$$f(x) = x^5 e^x, \quad f^{(67)}(0) = ?$$

(g)

$$f(x) = \ln(8-3x^2), \quad f^{(9)}(0) = ?, \quad f^{(10)}(0) = ?$$

(h)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(n^3x^2+\pi)}{3^n + n^2x^2} =$$

(i) Lehet-e tagonként deriválni a következő sort?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan \frac{x}{n}}{n^2}$$

(j) Adjuk meg

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$$

0 körüli Taylor-sorát és konvergenciatartományát! Mennyi

$$(x^{100} f(x))^{(200)}(0)?$$

(k)

$$f(x) = \sqrt[12]{1+2x^2} - \sqrt[18]{1+3x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = ?$$

(l) Adjuk meg

$$\int_0^1 \cos x^2 \, \mathrm{d}\, x$$

értékét 2 tizedesjegy pointossággal!

(m) Adjuk meg

$$\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \, \mathrm{d}\, x$$

értékét 2 tizedesjegy pointossággal!

(n) Adjuk meg

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}\, x$$

értékét 2 tizedesjegy pontossággal!

3. Fourier-sorok

Adjuk meg a következő függvények Fourier-sorát! Hol állítja elő a függvényt a Fourier-sor?

1. $f(x) = \pi^2 - x^2$, ha $-\pi < x \le \pi$ és $f(x + 2\pi) = f(x)$.
2. $$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } -\pi < x \le 0, \\ 3x, & \text{ha } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$
3. $f(x) = |x|$, ha $-\pi < x \le \pi$ és $f(x + 2\pi) = f(x)$.
4. $f(x) = \sin x$, ha $-\pi/2 < x \le \pi/2$ és $f(x) = f(x + \pi)$
5. $f(x) = \cos x$, ha $-\pi/2 < x \le \pi/2$ és $f(x) = f(x + \pi)$
6. $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{ha } x = \pm 1. \\ f(x + 2k) & \text{különben, ahol } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
7. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos x$
8. $f(x) = e^x$, ha $-1 < x \le 1$ és $f(x + 2k) = f(x), k \in \mathbb{Z}$.
9. $f(x) = \sin^3 x$, ha $-\pi < x \le \pi$ és $f(x + 2k\pi) = f(x), k \in \mathbb{Z}$.
10. Adjuk meg $\sin x$ cos-os Fourier-sorát, mely előállítja $[0, \pi]$-n.
11. Adjuk meg $\cos x$ sin-os Fourier-sorát, mely előállítja $[0, \pi]$-n.