Lineáris leképezések (tenzorok)

Hegyi Veronika és Harrach Nóra

2020. április 2.

Jelen segédlet a gyakorlati anyag kibõvített, elektronikus változata, ami a Koronavírus járvány miatt elmaradt foglalkozásokat hivatott pótolni. Az észrevételeket szívesen fogadjuk a következõ e-mail címen: harrach.nora@gmail.com, kérem a subject legyen „A2 segédlet”.

1. Döntsük el, hogy az alábbi leképezések lineárisak-e. Ha igen, adjuk meg a leképezés mátrixát a kanonikus bázispárra vonatkozóan! Adjuk meg a leképezés magterét és képterét, és ezek dimenzióját (nullitás (deffektus), illetve rang).

(a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, A minden vektorhoz az x tengelyre eső merőleges vetületet rendeli.

Megoldás: Az A leképezés tehát a következőképp néz ki:

$$A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tudjuk, hogy egy leképezés lineáris, ha bármely c_1, c_2 számok és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vektorok esetén fennáll

$$A(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = c_1 A(\mathbf{v}_1) + c_2 A(\mathbf{v}_2).$$

Ez pedig teljesül, hiszen

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ c_1 z_1 + c_2 z_2 \end{pmatrix}$$

$$A(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és

$$c_1 A(\mathbf{v}_1) + c_2 A(\mathbf{v}_2) = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A kanonikus bázis elemei:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

melyekhez az A leképezés rendre a következő vektorokat rendeli:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát ha A-val jelöjük a leképezés mátrixát is, akkor azt kapjuk, hogy

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ és } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ és } A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből már következik, hogy

$$A = AE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Házi feladat: mátrixszorzással ellenőrizzük, hogy a fenti A mátrixot (jobbról!) megszorozva tetszőleges $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vektorral, tényleg az $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektort kapjuk!

Határozzuk meg most az A leképezés magterét. Emlékeztető: egy $T : V \to W$ lineáris leképezés magterén (vagy nullterén) a

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{v} \in V : T\,\mathbf{v} = \mathbf{0}_W\}$$

alteret értjük.A mi esetünkben

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : A\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

$\mathrm{Ker}(A)$ dimenziója 2, hiszen a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok generálják.

Határozzuk most meg a leképezés képterét, emlékezve arra, hogy egy $T : V \to W$ lineáris leképezés képterén az

$$\mathrm{Im}(A) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}$$

alteret értjük. Ez a mi esetünkben a következő:

$$\mathrm{Im}(A) = \{A\,\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Tanultuk, hogy $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Ker}(A) = 3$, és ez teljesül is, hiszen könnyen belátható, hogy $\mathrm{Im}(A)$ 1-dimenziós altér.

Házi feladat: Írjuk fel ugyanezeket az y és z tengelyre vonatkozó merőleges vetület esetében is!

(b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az origón átmenő $\mathbf{b}$ irányvektorú egyenesre való merőleges vetítés.

Megoldás: Tegyük fel, hogy a $\mathbf{b}$ irányvektor egy egységvektor, így könnyebb lesz számolni vele (ha nem az lenne, leoszthatunk a hosszával). Ebben az esetben egy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor esetén az adott egyenesre való merőleges vetület hossza éppen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata, azaz $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle$, ami előjeles hossz, azaz ha a merőleges vetület $\mathbf{b}$-vel ellentétes irányban áll, negatív számot kapunk. (Elevenítsük fel a skaláris szorzatról tanultakat! Egyfelől $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = |\,\mathbf{b}\,||\,\mathbf{v}\,| \cos\phi$, ebből következik, hogy $|\,\mathbf{b}\,| = 1$ esetén a merőleges vetület hossza $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle$, másfelől $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3$.)

Tehát a vetület a következő vektor:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{b}$$

A leképezés linearitáshoz tehát azt kell belátni, hogy tetszőleges $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vektorok és c_1, c_2 valós számok esetén igaz-e hogy

$$\langle \mathbf{b}, c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 \rangle\, \mathbf{b} = c_1 \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_1 \rangle\, \mathbf{b} + c_2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_2 \rangle\, \mathbf{b},$$

ami pedig a skaláris szorzat tulajdonságai miatt igaz (bilineáris).

Most tehát keressük a leképezés mátrixát, a kanonikus bázis elemeire vonatkozóan! Ha $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, akkor azt a mátrixot keressük, amire

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ és } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ és } A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_3 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(Hiszen $\langle \mathbf{b}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle\, \mathbf{b} = b_1\, \mathbf{b}$ és $\langle \mathbf{b}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle\, \mathbf{b} = b_2\, \mathbf{b}$ és $\langle \mathbf{b}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\, \mathbf{b} = b_3\, \mathbf{b}$.)

Ezért a leképezés mátrixa a következő:

$$A = \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_1 b_2 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_1 b_3 & b_2 b_3 & b_3^3 \end{pmatrix},$$

ami nem más, mint a $\mathbf{b}\,\mathbf{b}^T$ szorzat (egy 3×1-es és egy 1×3-as mátrix szorzata).

Az A mátrixból, vagy a leképezés skaláris szorzatos meghatározásból is láthatjuk, hogy egy tetszőleges $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$ vektor képe az alábbi vektor lesz:

$$\begin{pmatrix} (xb_1 + yb_2 + zb_3)b_1 \\ (xb_1 + yb_2 + zb_3)b_2 \\ (xb_1 + yb_2 + zb_3)b_3 \end{pmatrix} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{b}$$

Ennek segítségével meghatározhatjuk a leképezés képterét, illetve magterét: képként előáll minden $\lambda\,\mathbf{b}$ vektor, tehát az egyenes minden pontjának helyvektora:

$$\mathrm{Im}(A) = \{\lambda\,\mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

A tér $\mathbf{0}$ elemébe pedig pontosan azok a vektorok képződnek, melyekre $xb_1 + yb_2 + zb_3 = 0$, és ezek pont az origón átmenő $\mathbf{b}$ normálvektorú sík pontjai, azaz

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle = 0\}.$$

A képtér és magtér dimenziója rendre 1 és 2.

(c) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az origón átmenő $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra való merőleges vetítés.

Megoldás: A könnyebb számolás kedvéért tegyük fel, hogy az $\mathbf{n}$ egységvektor, azaz hossza 1 (különben vehetjük a $\mathbf{n}$ vektor helyett a $\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ vektort normálvektornak). Ekkor a vetítés egy teszőleges $\mathbf{v}$ vektorhoz az

$$\mathbf{v} - \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{n}$$

vektort rendeli. (Indoklás: legyen $\mathbf{v}$ merőleges vetülete a síkra $\mathbf{v}'$, ekkor $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, ahol $\mathbf{v}''$ párhuzamos az $\mathbf{n}$ normálvektorral, sőt, $\mathbf{v}''$ épp a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{n}$ irányvektorú origón átmenő egyenesre való merőleges vetülete, ami a (b) feladatbeli indoklás szerint pont $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{n}$. Ekkor tehát a síkra való vetület: $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}'' = \mathbf{v} - \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{n}$, pont amit állítottunk.)

Ellenőrizzük, hogy lineáris-e ez a leképezés! Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ tetszőleges vektorok és c_1, c_2 tetszőleges valós számok, és vizsgáljuk meg, hogy igaz-e

$$(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) - \langle \mathbf{n}, c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 \rangle\, \mathbf{n} = c_1(\mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{n}, \mathbf{v}_1 \rangle\, \mathbf{n}) + c_2(\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{n}, \mathbf{v}_2 \rangle\, \mathbf{n})?$$

A skaláris szorzat tulajdonságai miatt igaz.

Adjuk meg a kanonikus bázisra vonatkozó mátrixot! Legyen $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$, és a keresett mátrixot jelölje A, ekkor

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - n_1 \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - n_1^2 \\ -n_1 n_2 \\ -n_1 n_3 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_1 n_2 \\ 1 - n_2^2 \\ -n_2 n_3 \end{pmatrix},$$

és

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_1 n_3 \\ -n_2 n_3 \\ 1 - n_3^2 \end{pmatrix},$$

azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 - n_1^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & 1 - n_2^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & 1 - n_3^2 \end{pmatrix}.$$

(d) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tükrözés a $3x + 4y - 12z = 0$ egyenletű síkra.

Megoldás: Ha $\mathbf{v}_t$ jelöli a $\mathbf{v}$ vektor tükörképét egy $\mathbf{n}$ normálvektorú, origón átmenő síkra vonatkozóan, és $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, ahol $\mathbf{v}'$ a síkra való merőleges vetület, $\mathbf{v}''$ pedig a normálvektorral párhuzamos, akkor

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - 2\,\mathbf{v}'' = \mathbf{v} - 2\langle \frac{\mathbf{n}}{|\,\mathbf{n}\,|}, \mathbf{v} \rangle \frac{\mathbf{n}}{|\,\mathbf{n}\,|}$$

(Most nem kötöttük ki, hogy a normálvektor egységhosszú legyen, ezért kellett osztani abszolút értékével.)

A (c) esethez hasonlóan ellenőrizhető, hogy a leképezés lineáris. És az ottani levezetéshez hasonlóan vezethető le, hogy a leképezés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\frac{n_1^2}{|n|^2} & -2\frac{n_1 n_2}{|n|^2} & -2\frac{n_1 n_3}{|n|^2} \\ -2\frac{n_1 n_2}{|n|^2} & 1 - 2\frac{n_2^2}{|n|^2} & -2\frac{n_2 n_3}{|n|^2} \\ -2\frac{n_1 n_3}{|n|^2} & -2\frac{n_2 n_3}{|n|^2} & 1 - 2\frac{n_3^2}{|n|^2} \end{pmatrix}$$

A mi esetünkben az $\mathbf{n} = (3, 4, -12)^T$, és $|\,\mathbf{n}\,| = 13$, ezért

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{18}{169} & -\frac{24}{169} & \frac{72}{169} \\ -\frac{24}{169} & 1 - \frac{32}{169} & \frac{96}{169} \\ \frac{72}{169} & \frac{96}{169} & 1 - \frac{288}{169} \end{pmatrix}$$

Másik gondolatmenet lehet a következő:

Adott $\mathbf{x}$ pont egy síkra való tükörképéhez jutunk a következőképpen is: először merőlegesen levetítjük pontunkat a síkra, majd az így kapott $\mathbf{T}$ talppontot, mint felezéspontot használva számoljuk $\mathbf{x'}$-t. Ez jó lesz, mivel az $\mathbf{xx'}$ szakaszt a $\mathbf{T}$ pont éppen felezi a tükrözés tulajdonsága miatt.

Merőlegesen vetíteni pedig -hála a (c) eset ismeretének- tudunk. Ettől azonban még nem kaptuk meg a leképezés mátrixát, de kis alakítással ahhoz is hozzájutunk. Legyen A_v az origón átmenő síkra vonatkozó tükrözés mátrixa és legyen $\mathbf{x}$ a tükrözendő pont.

$$A_v\mathbf{x} = \mathbf{T} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{x'}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2A_v\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{x'}$$

$$(2A_v - I)\mathbf{x} = \mathbf{x'}$$

Ebből a keresett A mátrix: $\;2A_v - I$.
A merőleges vetítés mátrixa a (c) feladatból az $\mathbf{n} = (3,4,-12)^T$ normálvektor ismeretében számolható. Most viszont $|\mathbf{n}| = \sqrt{3^2+4^2+(-12)^2} = 13$, ami nem 1, tehát $\mathbf{n}$ most nem egységvektor. Ez nem baj: osztunk a hosszával és máris egységvektorhoz (és egy csomó írnivalóhoz) jutunk.

$$A_v = \begin{pmatrix} 1-\frac{9}{169} & -\frac{12}{169} & \frac{36}{169} \\ -\frac{12}{169} & 1-\frac{16}{169} & \frac{48}{169} \\ \frac{36}{169} & \frac{48}{169} & 1-\frac{144}{169} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{160}{169} & -\frac{12}{169} & \frac{36}{169} \\ -\frac{12}{169} & \frac{153}{169} & \frac{48}{169} \\ \frac{36}{169} & \frac{48}{169} & \frac{25}{169} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad A = 2A_v - I = \begin{pmatrix} \frac{151}{169} & -\frac{24}{169} & \frac{72}{169} \\ -\frac{24}{169} & \frac{137}{169} & \frac{96}{169} \\ \frac{72}{169} & \frac{96}{169} & -\frac{119}{169} \end{pmatrix}$$

Pont ugyanúgy, mint az előbb! :)

Végezetül: Geometriai tanulmányainkból tudjuk, hogy a síkra való tükrözés képtere az egész tér, magtere triviális (csupán az origót tartalmazza), a leképezés invertálható (önmaga inverze).

(e) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tükrözés az $\frac{x}{6} = \frac{-y}{7} = \frac{z}{6}$ egyenletű egyenesre.

Megoldás: A $\mathbf{v}$ vektor merőleges vetülete a $\mathbf{b}$ irányvektorú egyenesre éppen $\langle \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \mathbf{v}\rangle \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. Ha ezt a vektort $\mathbf{v}'$-vel jelöljük, a tükörképet pedig $\mathbf{v}''$-vel, akkor nyilván

$$\mathbf{v}'' = 2\,\mathbf{v}' - \mathbf{v} = 2\langle \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \mathbf{v}\rangle \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} - \mathbf{v}$$

Ez a leképezés a kanonikus bázis elemeit, az $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ és $(0,0,1)^T$ vektorokat rendre az

$$\begin{pmatrix} 2\frac{b_1^2}{|b|^2}-1 \\ 2\frac{b_1b_2}{|b|^2} \\ 2\frac{b_1b_3}{|b|^2} \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 2\frac{b_1b_2}{|b|^2} \\ 2\frac{b_2^2}{|b|^2}-1 \\ 2\frac{b_2b_3}{|b|^2} \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 2\frac{b_1b_3}{|b|^2} \\ 2\frac{b_2b_3}{|b|^2} \\ 2\frac{b_3^2}{|b|^2}-1 \end{pmatrix}$$

vektorokba képezi, melyből mátrixát is könnyen megkaphatjuk. Feladatunkban $\mathbf{b} = (6,-7,6)$ és $|\,\mathbf{b}\,| = 11$, így a mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-49}{121} & \frac{-84}{121} & \frac{72}{121} \\ \frac{-84}{121} & \frac{-23}{121} & \frac{-84}{121} \\ \frac{72}{121} & \frac{-84}{121} & \frac{-49}{121} \end{pmatrix}$$

A képtér a teljes tér, a magtér triviális, a megfelelő dimenziók 3 és 0.

Másik gondolatmenet lehet:

Az előző feladatban leírt ötlet itt is használható: **x**-et merőlegesen vetítjük az egyenesre és a kapott pontot felezéspontnak használva számoljuk **x'**-t. Ezt itt most nem részletezzük.

(f) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ merőlegesen vetít az $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{-z}{12}$ egyenesre.

Megoldás: az egyenes átmegy az origón, egy irányvektora:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix},$$

aminek hossza $|\,\mathbf{b}\,| = 13$, így egy egységhosszú normálvektora

$$\frac{\mathbf{b}}{|\,\mathbf{b}\,|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{4}{13} \\ \frac{-12}{13} \end{pmatrix},$$

Felhasználva a (b) feladatrész eredményeit: a leképezés lineáris, mátrixa

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{169} & \frac{12}{169} & \frac{-36}{169} \\ \frac{12}{169} & \frac{16}{169} & \frac{-48}{169} \\ \frac{-36}{169} & \frac{-48}{169} & \frac{-144}{169} \end{pmatrix} = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 9 & 12 & -36 \\ 12 & 16 & -48 \\ -36 & -48 & -144 \end{pmatrix},$$

képtere az adott egyenes: $\ker(A) = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R} : \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{-z}{12}\}$, magtere pedig az origón átmenő, $\mathbf{b} = (3,4,-12)^T$ normálvektorú sík: $\mathrm{Im}(A) = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R} : 3x + 4y - 12z = 0\}$, melyek dimenziója rendre 1, és 2.

(g) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ merőlegesen vetít az $3x + 4y - 12z = 0$ síkra.

Megoldás: a sík átmegy az origón, egy normálvektora

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Innen HF. folytatni a (c) és (f) feladatok számításaihoz hasonlóan.

(h) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{b} \times \mathbf{r}$, ahol $\mathbf{b} = (2, -1, 3)^T$.

Megoldás: az A leképezés egy tetszőleges $\mathbf{r}$ vektorhoz a $\mathbf{b} \times \mathbf{r}$ vektort rendeli. Elevenítsük fel a vektoriális szorzatról tanultakat! Tanultuk -többek között- hogy: tetszőleges $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}$ vektorokra és c valós számra

(1) $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

(2) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

(3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

(4) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = k\,\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times k\,\mathbf{v}$

Ezekből a tulajdonságokból levezethető az A leképezés linearitása, azaz hogy tetszőleges $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok és c_1, c_2 valós számok esetében

$$A(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = \mathbf{b} \times (c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = c_1(\mathbf{b} \times \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{b} \times \mathbf{v}_2) = c_1 A(\mathbf{v}_1) + c_2 A(\mathbf{v}_2).$$

Mi lesz a kanonikus bázis elemeinek képe? Ehhez használjuk, hogy tetszőleges $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok esetén

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ vektorok képe tehát

$$\mathbf{b} \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

És így a leképezés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mi a leképezés magtere? Tanultuk, hogy két vektor vektoriális szorzata akkor és csak akkor $\mathbf{0}$, ha a két vektor párhuzamos. Ebből adódik, hogy $\ker(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{b}\}$, azaz a $\mathbf{b}$ irányvektorú origón átmenő egyenes pontjai (vagyis ezek helyvektorai) alkotják a magteret, aminek dimenziója 1. Azt is tanultuk, hogy két (nem párhuzamos) vektor vektoriális szorzatának eredménye olyan vektor, ami merőleges a két vektor által kifeszített síkra. Ebből adódik, hogy képként csak $\mathbf{b}$-re merőleges vektorok adódhatnak. Nem nehéz belátni, hogy bármely $\mathbf{b}$-re merőlege vektor elő is állítható képként, azaz a képtér: $\mathrm{Im}(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle = 0\}$, aminek dimenziója 2.

(i) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ z tengely körüli α szögű forgatás. (ugyanígy x és y tengely körül).

Megoldás:
Elemi geometriai meggondolásokból következik, hogy ez a leképezés lineáris. Mi lesz a kanonikus bázis elemeinek képe? A $(0,0,1)^T$ vektort az A leképezés nyilván helyben hagyja. Előadáson tanultuk, hogy az $(1,0,0)^T$ vektort az $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)^T$ vektorba képezi, a $(0,1,0)^T$ vektort pedig a $(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)^T$ vektorba.

Ebből következik, hogy a leképezés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A képtér a teljes tér, a magtér triviális, a dimenziók 3 és 0, a leképezés invertálható.

HF1: mi az inverz leképezés mátrixa?

HF2: írjuk fel a fentieket az x tengely körüli és az y tengely körüli elforgatásokra is.

(j) $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $D(p(x)) = xp'(x) + 2p''(x) + 3p(x)$, ahol $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú polinomok tere.

Megoldás: Ellenőrizzük a linearitást! Legyenek $p_1(x), p_2(x)$ legfeljebb n-edfokú polinomok, c_1, c_2 valós számok. Ekkor a deriválási szabályokból következik, hogy:

$$D(c_1p_1(x)+c_2p_2(c)) = x(c_1p_1(x)+c_2p_2(x))'+2(c_1p_1(x)+c_2p_2(x))''+3(c_1p_1(x)+c_2p_2(x)) =$$

$$= c_1xp_1'(x) + c_2xp_2'(x) + c_12p_1''(x) + c_22p_2''(x) + c_13p_1(x) + c_23p_2(x) =$$

$$= c_1(xp_1'(x)+2p_1''(x)+3p_1(x))+c_2(xp_2'(x)+2p_2''(x)+3p_2(x)) = c_1D(p_1(x))+c_2D(p_2(x)),$$

tehát a leképezés lineáris.

Mi lesz a kanonikus bázis ebben a térben? Tanultuk, hogy a legfeljebb n-dimenziós polinomok terét generálják az 1, x, x^2, ..., x^n polinomok, melyek, ha vektorként tekintünk rájuk, az $(1,0,0,\dots,0)^T, (0,1,0,\dots,0)^T, \dots, (0,0,0,\dots,0,1)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektoroknak felelnek meg. Hova képezi a D leképezés ezeket a polinomokat / vektorokat?

- $D(1) = 3$, azaz $(1,0,\dots,0)^T \mapsto (3,0,\dots,0)^T$
- $D(x) = 4x$, azaz $(0,1,0,\dots,0)^T \mapsto (0,4,0,\dots,0)^T$.
- $D(x^2) = 5x^2 + 4$, azaz $(0,0,1,0,\dots,0)^T \mapsto (4,0,5,0,\dots,0)^T$.
- $D(x^3) = 6x^3 + 12x$, azaz $(0,0,0,1,0,\dots,0)^T \mapsto (0,12,0,6,0,\dots,0)^T$.
- $D(x^m) = (m+3)x^m + 2m(m-1)x^{m-2}$, azaz $(0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T \mapsto (0,\dots,0,2m(m-1),0,m+3,0,\dots,0)^T$
- $D(x^n) = (n+3)x^n + 2n(n-1)x^{n-2}$, azaz $(0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T \mapsto (0,\dots,0,2n(n-1),0,n+3)^T$.

Ebből adódik a leképezés mátrixa az alábbi $(n+1)\times(n+1)$-es mátrix:

$$A = \begin{pmatrix}
3 & 0 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 24 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 & 2(n-2)(n-3) & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & 0 & 2(n-1)(n-2) & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n+1 & 0 & 2n(n-1) \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & n+2 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n+3
\end{pmatrix}$$

Mi lesz a leképezés magtere? Legyen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ egy polinom, és tegyük fel, hogy $D(p(x)) = 0$. Ekkor a leképezéshez tartozó mátrix és a polinomhoz tartozó vektor szorzata a nullvektor, azaz

$$A \cdot (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)^T = 0$$

Ez a szorzat viszont könnyen látható, hogy az alábbi egyenletrendszerhez vezet:

$$\begin{aligned}
x_0 + 4x_2 &= 0 \\
4x_1 + 12x_3 &= 0 \\
5x_2 + 24x_4 &= 0 \\
&\vdots \\
(n+1)x_{n-2} + 2n(n-1)x_n &= 0 \\
(n+2)x_{n-1} &= 0 \\
(n+3)x_n &= 0
\end{aligned}$$

Ennek egyetlen megoldása az $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_0 = 0$, azaz a magtér triviális, a leképezés injektív. Hasonló módon látható be, hogy a a teljes tér előáll képként, azaz a leképezés szürjektív. (A dimenziók pedig 0 és $n+1$.)

(k) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, A minden vektorhoz az $(1,2,3)$ vektorral párhuzamos összetevőjét rendeli.

Megoldás: A feladat hasonló a (b), illetve (f) feladatokhoz.

(l) (**iMSc**) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L : (x,y)^T \mapsto (x, y, x+y)^T$.

Megoldás: Ellenőrizzük a linearitást: $L(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = L((c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2)) = (c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2, c_1x_1 + c_1y_1 + c_2x_2 + c_2y_2) = c_1L(\mathbf{v}_1) + c_2L(\mathbf{v}_2)$, tehát a leképezés lineáris.

Mi lesz a báziselemek képe?

$$L(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$L(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

És így a leképezés mátrixa:

$$L = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

Milyen $\mathbf{v}$ vektor esetében lehet $L(\mathbf{v}) = 0$? Könnyen látható, hogy ekkor

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{aligned}$$

kell teljesüljön, azaz a leképezés magtere a triviális. Mit tudunk a képtérről?

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(L) &= \{(x,y,x+y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x \cdot (1,0,1) + y \cdot (0,1,1) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Span}(\{(1,0,1),(0,1,1)\}), \end{aligned}$$

azaz a képtér 2 dimenziós.

(m) (**iMSc**) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L : (x,y,z)^T \mapsto (x+y, y+z)^T$.

Megoldás: Ellenőrizzük a linearitást:

$$\begin{aligned}
L(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) &= L((c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2, c_1z_1 + c_2z_2)) \\
&= (c_1x_1 + c_2x_2 + c_1y_1 + c_2y_2, c_1y_1 + c_2y_2 + c_1z_1 + c_2z_2) \\
&= (c_1x_1 + c_1y_1, c_1y_1 + c_1z_1) + (c_2x_2 + c_2y_2, c_2y_2 + c_2z_2) \\
&= c_1L(\mathbf{v}_1) + c_2L(\mathbf{v}_2)
\end{aligned}$$

tehát a leképezés lineáris.

Mi lesz a báziselemek képe?

$$L(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$L(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$L(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

És így a leképezés mátrixa:

$$L = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Milyen $\mathbf{v}$ vektor esetében lehet $L(\mathbf{v}) = 0$? Könnyen látható, hogy ekkor

$$\begin{aligned}
x + y &= 0 \\
y + z &= 0
\end{aligned}$$

kell teljesüljön, azaz

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(L) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ és } y + z = 0\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x \text{ és } z = -y\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x \text{ és } z = x\} \\
&= \{(t, -t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{t \cdot (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Tehát a képtér az $(1, -1, 1)$ irányvektorú egyenes, dimenziója 1.

Mit tudunk a képtérről?

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(L) &= \{(x + y, y + z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{x \cdot (1, 0) + y \cdot (1, 1) + z \cdot (0, 1) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Span}(\{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}), \\
&= \mathrm{Span}(\{(1, 0), (0, 1)\})
\end{aligned}$$

azaz a teljes $\mathbb{R}^2$ tér, így a képtér 2 dimenziós.

2. A fentiek alapján számoljuk ki a következő vektorok képét!

(a) Forgassuk el az $\mathbf{r} = (1, 0, 1)$ vektort a z tengely körül $\pi/3$-mal, majd tükrözzük az xy-síkra.

Megoldás: A z tengely körüli $\pi/3$-mal való forgatás mátrixa

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az xy síkra való tükrözéshez előbb határozzunk meg egy normálvektort: lehet ez az $(0, 0, 1)^T$ vektor. Ekkor a tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Az $\mathbf{r} = (1, 0, 1)$ vektor képe ezen leképezések után:

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Forgassuk el $\mathbf{r} = (1, 1, 0)$-t először, y, majd z, végül x tengely körül $\pi/6$-tal.

Megoldás: Az x tengely és az y tengely körüli α szögű forgatás mátrixai rendre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Ekkor az adott vektor képe:

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{11}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}$$

(c) (**iMSc**) Forgassuk el $\mathbf{r} = (-1, 0, 2)$-t az $x = y$, $z = 0$ egyenletű egyenes körül $\pi/4$ -gyel, majd tükrözzük az $x + 3y - 2z = 0$ síkra.

Megoldás: Tekintsük a kérdés általánosan, legyen adva egy $\mathbf{b}$ egységvektor, és tekintsük azt az A leképezést, ami a $\mathbf{b}$ irányú egyenes körül forgat α szöggel. Mi lesz a $\mathbf{v}$ vektor képe az A leképezésnél? Ha a $\mathbf{v}$ vektor párhuzamos az egyenessel, akkor a képe önmaga lesz. Ha nem párhuzamos vele, akkor felbontható két vektor összegére, melyek közül az egyik, legyen ez $\mathbf{v}_1$ párhuzamos $\mathbf{b}$-vel, a másik pedig merőleges rá, ezt a vektort jelölje $\mathbf{v}_2$. Tudjuk, hogy ekkor $\mathbf{v}_1$ éppen a $\mathbf{v}$ merőleges vetülete a $\mathbf{b}$ irányú egyenesre, ami pont

$$\mathbf{v}_1 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{b}$$

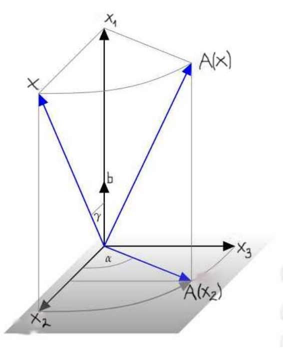
és ebből következik, hogy

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{b}$$

Tekintsünk egy harmadik vektort is

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{b} \times \mathbf{v}$$

A vektori szorzat definíciójából adódik, hogy $\mathbf{v}_3$ merőleges a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{v}$ által feszített síkra, és $\mathbf{b}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_3$ jobbrendszert alkot (ebben a sorrendben). Ebből viszont az következik, hogy $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ három olyan vektor, melyek páronként merőlegesek egymásra, és jobbrendszert alkotnak ebben a sorrendben (mivel $\mathbf{v}_1$ párhuzamos $\mathbf{b}$-vel, és $\mathbf{v}_2$ benne van abban a síkban, amire $\mathbf{v}_3$ merőleges).



Ha tekintjük az A leképezés hatását a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ vektoron, láthatjuk, hogy a $\mathbf{v}_1$ helyben marad

$$A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$$

(mivel $\mathbf{v}_1$ párhuzamos $\mathbf{b}$-vel), a $\mathbf{v}_2$ pedig α szöggel fordul el a $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített síkban. A $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorokról nem csak azt tudhatjuk, hogy merőlegesek egymásra, hanem azt is beláthatjuk, hogy azonos a hosszuk: a vektori szorzat definíciója miatt $|\mathbf{v}_3| = |\mathbf{b}||\mathbf{v}|\cos\phi = |\mathbf{v}|\cos\phi$ és a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ merőleges felbontás miatt $|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}|\cos\phi$. Emiatt

$$A(\mathbf{v}_2) = \cos\alpha \, \mathbf{v}_2 + \sin\alpha \, \mathbf{v}_3$$

Ezekből kaphatjuk meg a leképezés hatását a $\mathbf{v}$ vektoron:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{v}) &= A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \\ &= A(\mathbf{v}_1) + A(\mathbf{v}_2) = \\ &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{b} + \cos\alpha(\mathbf{v} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{b}) + \sin\alpha(\mathbf{b} \times \mathbf{v}) = \\ &= (\cos\alpha)\, \mathbf{v} + (\sin\alpha)(\mathbf{b} \times \mathbf{v}) + (1 - \cos\alpha)\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{b} \end{aligned}$$

Mi lesz az A hatása a kanonikus bázisra?

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\alpha \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (1 - \cos\alpha) b_1\, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) b_1^2 \\ (\sin\alpha) b_3 + (1 - \cos\alpha) b_1 b_2) \\ -(\sin\alpha) b_2 + (1 - \cos\alpha) b_1 b_3 \end{pmatrix}$$

Hasonló számolásokkal kapjuk meg $(0, 1, 0)^T$ és $(0, 0, 1)^T$ képét, amiből a leképezés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) b_1^2 & -(\sin\alpha) b_3 + (1 - \cos\alpha) b_1 b_2 & (\sin\alpha) b_2 + (1 - \cos\alpha) b_1 b_3 \\ (\sin\alpha) b_3 + (1 - \cos\alpha) b_1 b_2 & \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) b_2^2 & -(\sin\alpha) b_1 + (1 - \cos\alpha) b_2 b_3 \\ -(\sin\alpha) b_2 + (1 - \cos\alpha) b_1 b_3 & (\sin\alpha) b_1 + (1 - \cos\alpha) b_2 b_3 & \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) b_3^2 \end{pmatrix}$$

A feladatbeli számokkal: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, ezért $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, és az egyenes egy irányvektora $\mathbf{b} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

A tükrözéshez megadott sík egy normálvektora $(1, 3, -2)$, egy egységnyi hosszú normálvektora $(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}})$, amiből a tükrözés mátrixa (lásd 1.d feladat megoldása):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

HF. a konkrét számolásokat végigcsinálni.