VIK A2 Matematika,
1-2. Gyakorlati anyag

2021/22 2. félév

Mátrixok

I. Mátrixaritmetika

1. Csináljunk néhány példát mátrixösszeadásra és mátrixszorzásra!

2. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

   Mutassuk meg, hogy az $AB = BA$, $(AB)^2 = A^2B^2$, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ egyenlőségek nem azonosságok.

3. Legyen $A \in M_{45}, B \in M_{54}, C \in M_{52}, D \in M_{42}, F \in M_{45}$. Az alábbiak közül melyek vannak definiálva és mi a tipusuk: AF, $BD - C$, $ABF + DC^T$, $(B^T + A)C + D$.

4. Számoljuk ki az alábbi mátrixok összes pozitív egész hatványát!

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden
   $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
   mátrix kielégíti az $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0$ egyenletet, ahol I a 2×2-es egységmátrix.

6. Konstruáljon olyan M mátrixot, mellyel egy tetszőleges $m \times n$-es A mátrixot
   (a) balról megszorozva az i. sora λ-val szorzódik;
   (b) balról megszorozva az i. és j. sora megcserélődik; (lehet-e jobbról szorzásra konstruálni ilyet?)
   (c) jobbról megszorozva az i. és j. oszlopa megcserélődik; (lehet-e balról szorzásra konstruálni ilyet?)
   (d) jobbról megszorozva az i. oszlopához hozzáadódik a j. oszlop λ-szorosa;
7. (**iMSc**) Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egész esetén létezik olyan $A \neq 0$ négyzetes mátrix, melyre $A^k = 0$.
8. (**iMSc**) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik k pozitív egész, melyre $I + A + A^2 + \cdots + A^k = 0$, ha $\alpha/(2\pi)$ racionális szám, de nem egész.

Determinánsok

1. Számoljuk ki a következő determinánsokat!
   (a)

$$\begin{vmatrix} 123456 & 123426 \\ 123457 & 123427 \end{vmatrix}$$

   (b)

$$\begin{vmatrix} 1111 & 111 & 11 \\ 11111 & 1111 & 111 \\ 12345 & 1234 & 123 \end{vmatrix}$$

   (c)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

(e)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

(f)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

(g)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

(h) (**iMSc**)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

(i) (**iMSc**)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

(j)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

(k)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d+e & d^2+e^2 & d^3+e^3 \end{vmatrix}$$

(l)

$$\begin{vmatrix} p^2 & p & 1 & qrs \\ q^2 & q & 1 & prs \\ r^2 & r & 1 & pqs \\ s^2 & s & 1 & pqr \end{vmatrix}$$

(m)

$$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$$

(n)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$$

2. (**iMSc**) A determinánsok szorzástételével bizonyítsuk be, hogy $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$ előáll két egész szám négyzetösszegeként, ahol $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$.

3. A1-ből tanultuk, hogy $\mathbb{R}^3$-ben a sík kanonikus egyenlete

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

ahol A, B, C, D valós számok. Mutassuk meg, hogy a $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$,$R(r_1, r_2, r_3)$ pontokon átmenő sík egyenlete

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Mit mondhatunk, ha a három pont egy egyenesen van?

Mátrixok inverze

1. Regulárisok-e az alábbi mátrixok? Ha igen, számoljuk ki az inverzüket! (Itt használjuk a determinánsos inverzszámolást!)

   (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   (c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Legyen

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

   Mutassuk meg, hogy $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha = T_{\alpha+\beta}$ és $T_\alpha^{-1} = T_{-\alpha}$.

Vektorterek

1. Vektorteret alkotnak-e a következő halmazok, a megszokott műveletekkel?

   (a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0) = 1\}$

   (b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(1) = 0\}$

   (c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in C^2(\mathbb{R}), f''(x) + xf(x) = 0\}$

   (d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \leq 0\}$

   (e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ integrálható $[0,1]$ -en, $\int_0^1 |f| \leq \infty\}$

(f) { legfeljebb másodfokú p polinomok , $p(1) = p(2) = 0$}

(g) Vektorteret alkotnak-e $\mathbb{R}$ felett a korlátos sorozatok, nullsorozatok, ∞-hez divergáló sorozatok illetve az 1-hez konvergáló sorozatok?

(h) $\mathbb{R}^2$ halmaz a következő műveletekkel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1+2y_1}{3} \\ \frac{x_2+3y_2}{2} \end{bmatrix}, \qquad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \frac{\lambda x_2}{2} \end{bmatrix}?$$

(i) $\mathbb{R}^2$ halmaz a következő műveletekkel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - y_1 \\ -x_2 - y_2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}?$$

2. **Alterek**

(a) Legyen $V_1, V_2 \subset V$ két altér a V vektortérben. Mikor altér-e $V_1 \cap V_2$ illetve $V_1 \cup V_2$?

(b) Altér-e az összes (a_n) valós sorozatok terében

i. $\{(a_n) : a_1 = 2a_3 + 3a_5\}$?

ii. $\{(a_n) : a_2 = a_4 \cdot a_5\}$?

iii. $\{(a_n) : \lim_n a_n = 2\}$?

iv. a számtani sorozatok?

v. a mértani sorozatok?

(c) Alteret alkotnak-e a $n \times n$-es mátrixok terében

i. diagonális mátrixok?

ii. melyeknek diagonálisában csupa 0 áll?

iii. felső háromszög mátrixok?

iv. 0 nyomú mátrixok? (Mondjuk el, hogy mi a nyom!)

(d) Altér-e $\mathbb{R}^n$-ben azon vektorok halmaza, melyek koordinátáinak összege 0?

(e) (**iMSc**) Bizonyítsuk be, hogy ha W altér a V vektortérben és létezik $x \in V$, melyre $x \notin W$, akkor van olyan $W_2 \subset V$ altér, melyre $W \cap W_2 = \{0\}$!

3. **Lineáris függetlenség**

(a) Legyen V egy valós vektortér, $a, b \in V$ lineárisan függetlenek. Milyen valós α és β esetén lesz lineárisan összefüggő $\alpha \cdot a + \beta \cdot b$ és $\alpha \cdot a - \beta \cdot b$?

(b) Igazoljuk, hogy ha $x, y, z \in V$ lineárisan független vektorok a V vektortérben, akkor

   i. $x + y$, $y + z$, $z + x$ is lineárisan függetlenek.

   ii. $x + y + z$, $x + y - z$, $x - y - z$ is lineárisan függetlenek.

(c) Lineárisan függetlenek-e $\mathbb{R}^3$-ben a következő vektorhármasok:

   i.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}?$$

   ii.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}?$$

(d) Maximálisan hány lineárisan független van az

$$(1, 1, 1, 1), \quad (2, 2, 1, 4), \quad (1, -1, 1, -1), \quad (2, 1, 1, 3)$$

vektorok között?

(e) Lineárisan függetlenek-e a folytonos függvények vektorterében (pontonkénti összeadás és szorzás) az

$$f_1(x) = \cos^2 x, \quad f_2(x) = \sin^2(x), \quad f_3(x) = 1$$

függvények?

(f) (**iMSc**) Lineárisan függetlenek-e a folytonos függvények vektorterében (pontonkénti összeadás és szorzás) az $x^j e^{\lambda_i x}$ alakú függvények, ahol $j \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\lambda_i \neq \lambda_j$, ha $i \neq j$?

(g) Felírható-e az x^3+7x^2+5 polinom az x^3+2x, $3x^3+4x$ és az $5x^2+6x$ polinomok lineárkombinációjaként?

(h) (**iMSc**) Igaz-e, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ vektorok közül bármely 99 lineárisan független, akkor mind a 100 is lineárisan független?

(i) Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ lineárisan függetlenek. Függetlenek-e

   i. $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots a_n - a_{n-1}$?

   ii. $a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n$?