VIK A2 Matematika,
4-5.. Gyakorlati anyag

2021/22. 2. félév

Mátrix rangja

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!

   (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   (b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

   (d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 2 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(e) (**iMSc**)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$$

2. Az a, b paraméterek függvényében állapítsuk meg az adott mátrix rangját!

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & a \\ b & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & a & b \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 4 & a & b \\ 3a & b+3 & 0 \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & a & b & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & b-3 \end{bmatrix}$$

3. A rang vizsgálatának segítségével döntsük el, hogy az egyenletrendszernek hány megoldása van a valós paraméterek függvényében!

(a)

$$\begin{aligned} (2a+1)x_1 - ax_2 + (a+1)x_3 &= a-1 \\ (a-2)x_1 + (a-1)x_2 + (a-2)x_3 &= a \\ (2a-1)x_1 + (a-1)x_2 + (2a-1)x_3 &= a \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(3a-1)x_1+2ax_2+(3a+1)x_3 &= 1\\ 2ax_1+2ax_2+(3a+1)x_3 &= a\\ (a+1)x_1+(a+1)x_2+2(a+1)x_3 &= a^2\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x_1+2x_2 &= 1\\ x_1-ax_2 &= 2\\ x_1+bx_2 &= 2\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}x_1-x_2+x_3-x_4 &= 1\\ x_1+x_2+4x_3+3x_4 &= 6\\ -3x_1+5x_2+ax_3+bx_4 &= 2\\ 2x_2+3x_3+5x_4 &= b-3.\end{aligned}$$

Lineáris leképezések (tenzorok)

1. Döntsük el, hogy az alábbi leképezések lineárisak-e. Ha igen, adjuk meg a leképezés mátrixát a kanonikus bázispárra vonatkozóan! Adjuk meg a leképezés magterét és képterét, és ezek dimenzióját (nullitás (deffektus) illetve rang).

   (a) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, A minden vektorhoz az x tengelyre eső merőleges vetületet rendeli. (Írjuk fel x és z tengelyre vonatkozóan is!)

   (b) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ az origón átmenő $\mathbf{b}$ irányvektorú egyenesre való merőleges vetítés.

   (c) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ az origón átmenő $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra való merőleges vetítés.

   (d) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tükrözés a $3x+4y-12z=0$ egyenletű síkra.

   (e) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tükrözés az $\frac{x}{6}=\frac{-y}{7}=\frac{z}{6}$ egyenletű egyenesre.

   (f) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ merőlegesen vetít az $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{-z}{12}$ egyenesre.

   (g) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ merőlegesen vetít az $3x+4y-12z=0$ síkra.

   (h) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $A:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{b}\times\mathbf{r}$, ahol $\mathbf{b}=(2,-1,3)^T$.

(i) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ z tengely körüli α szögű forgatás. (ugyanígy x és y tengely körül).

(j) $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $D(p(x)) = xp'(x) + 2p''(x) + 3p(x)$, ahol $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú polinomok tere.

(k) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, A minden vektorhoz az $(1, 2, 3)$ vektorral párhuzamos összetevőjét rendeli.

(l) **(iMSc)** $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L : (x, y)^T \mapsto (x, y, x + y)^T$.

(m) **(iMSc)** $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L : (x, y, z)^T \mapsto (x + y, y + z)^T$.

2. A fentiek alapján számoljuk ki a következő vektorok képét!

(a) Forgassuk el az $\mathbf{r} = (1, 0, 1)$ vektort a z tengely körül $\pi/3$-mal, majd tükrözzük az xy-síkra.

(b) Forgassuk el $\mathbf{r} = (1, 1, 0)$-t először, y, majd z, végül x tengely körül $\pi/6$-tal.

(c) **(iMSc)** Forgassuk el $\mathbf{r} = (-1, 0, 2)$-t az $x = y$, $z = 0$ egyenletű egyenes körül $\pi/4$ -gyel, majd tükrözzük az $x + 3y - 2z = 0$ síkra.