VIK A2 Matematika,
6-7. Gyakorlati anyag

2021/22. 2. félév

Sajátérték, sajátvektor

1. Számoljuk ki az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalizáljuk az alábbi mátrixokat! Adjuk meg A^{10} mátrixot is!

   (a)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Legyen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$
Határozzuk meg A inverzét, A^{-1} sajátértékeit és a legkisebb sajátértékhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektort!

4. Legyen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 14 \\ 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Számítsuk ki a legnagyobb és legkisebb valós sajátértékhez tartozó sajátvektorok által bezárt szöget!

5. Írjuk fel az A lineáris leképezésnek a mátrixát, ha tudjuk, hogy A-nak sajátvektorai a z-tengellyel párhuzamos vektorok $\lambda = 2$ sajátértékkel, és az $x+y-z = 0$ egyenletű síkkal párhuzamos vektorok $\lambda = 3$ sajátértékkel.

6. Adjuk meg a következő tenzorok sajátértékeit és sajátvektorait!
   (a) $\mathbb{R}^3$-ben a z-tengely körüli 45 fokos forgatás.
   (b) $\mathbb{R}^3$-ben az xy síkra való vetítés.
   (c) $\mathbb{R}^3$-ben az xy síkra való tükrözés.

Euklideszi terek

1. Skaláris szorzást definiálnak-e a V vektortéren az alábbi kifejezések?
   (a) $V = C([0,1])$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$.
   (b) $V = C^1([0,1])$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'g'$.
   (c) $V = C^1([0,1])$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'g' + f(0)g(0)$.
   (d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.
   (e) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2$.

(f) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_3 y_3$.

(g) $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr} A^* B$.

2. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket! (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség gyakorlása.)

   (a) Ha $x, y, z \in \mathbb{R}$ és $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, akkor $x + 2y + 3z \leq \sqrt{14}$.

   (b) Ha $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ és $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, akkor $x + 2y + 3z + 4w \leq \sqrt{30}$.

   (c) Ha $f \in C([0, \pi])$ pozitív, akkor
   $$\int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}\, x \leq \frac{\pi}{2} \int_1^\pi f^2(x) \, \mathrm{d}\, x.$$

Ortogonális rendszerek, Gram-Schmidt ortogonalizáció

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^3$-ben
$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, -3, 1), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{66}}(-7, -1, 4)$$
vektorok ortonormált bázist alkotnak. Irjuk fel az $x = (3, 4, 5) \in \mathbb{R}^3$ vektort ebben a bázisban!

2. Határozzuk meg azt az $\mathbb{R}^4$-beli vektort, melynek utolsó koordinátája 1, és merőleges az $(1, 0, 0, -2)$, $(0, 1, 1, 0)$ $(1, 1, -1, 0)$ vektorok mindegyikére.

3. Mutassuk meg, hogy a $\{\cos kx, \sin kx\}$ függvények ortogonális rendszert alkotnak a 2π szerint periodikus folytonos valós függvények terében, ha a skalárszorzatot $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} fg$ definiálja. Hogyan kapunk ortonormált rendszert?

4. Határozzuk meg azokat az $\mathbb{R}^4$-beli egységvektorokat, melyek merőlegesek az $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 3)$ $(1, -1, 1, -1)$ vektorok mindegyikére.

5. Az $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, $(1/6, 1/6, 1/2, -5/6)$ vektorokból kiindulva készítsünk $\mathbb{R}^4$-ben egy ortonormált bázist! Adjuk meg $(0, 1, -1, 2)$ koordinátáit ebben a bázisban!

6. Adjunk meg az $(1, 2, 1, 3)$, $(4, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1, 0)$ vektorok által generált térben egy ortogonális bázist! Benne van-e $(0, -1, 2, -1)$ ebben a térben, ha igen, mik a koordinátái az ortogonális bázisban, ha nem, milyen szöget zár be a generált altérrel?

7. Adjunk meg az $x^2 - 3$, $2x - 5$, $x^3 - x$ polinomok által generált térben egy ortonormált bázist, ha a polinomok terén a skaláris szorzatot $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ képlettel definiáltuk. Benne van-e a generált térben az $x^3 + x$ polinom? Ha igen adjuk meg a koordinátáit az ortonormált bázisban, ha nem adjuk meg a generált altértől vett távolságát!