VIK A2 Matematika
8-9. Gyakorlati anyag

2021/22. 2. félév

I. Többváltozós függvények szemléltetése, határértéke, folytonossága

1. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát! Vizsgáljuk meg, hogy az értelmezési tartomány zárt-e, nyílt-e, korlátos-e, összefüggő-e?

   (a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$,

   (b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$,

   (c) $f(x,y) = \ln\sqrt{x+y}$.

2. A koordináta-síkokkal párhuzamos metszetgörbék vizsgálatával szemléltessük az alábbi felületeket!

   (a) $z = x^2 + 4y^2$,

   (b) $z = y^2 - 2x$,

   (c) $z = \frac{1}{2x^2+3y^2}$,

   (d) $z = e^{-x^2-y^2}$.

3. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2 y}{x^2 \cos y^2} = ?$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+2y^2} = ?$

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy^3}{2x^2+2y^2} = ?$

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{2x^2+3y^2} = ?$

   (e) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2} = ?$

   (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = ?$

(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy^3}{2x^2+2y^2} = ?$

(h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin 2y}{x^2+y^2} = ?$

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin 2y}{2x^2+5y^2} = ?$

(j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2 + 4y^2) \arctan \frac{x}{y} = ?$

4. Hol folytonosak az alábbi függvények?

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-4y^2}{x^2+16y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & \text{ha } y \neq 0, \\ 0, & \text{ha } y = 0 \end{cases}$$

(d) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$.

II. Többváltozós függvények differenciálszámítása

1. Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeinek értelmezési tartományát és határozzuk meg a parciális deriváltfüggvényeket!

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$,

(b) $f(x,y) = x^y + y^{2x}$,

(c) $f(x,y,z) = e^{x^2y^3} - z^4 \cos ze^{-y}$,

(d)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(e)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(f) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$.

2. (**iMSc**) A termodinamikában az ideális gáz T hőmérséklete, p nyomása és V térfogata közötti összefüggést a $pV = RT$ egyenlet írja le, ahol $R = 8,314 J/K \cdot mol$ az un. Avogadro-szám. A reális gázoknak jobb leírását adja az un. Dieterici-egyenlet, mely szerint:
$$f(p,T,V) = p(V-b)e^{\frac{a}{RVT}} - RT = 0,$$
ahol a és b a gázra jellemző állandók. Adjuk meg a V'_T deriváltat!

3. Határozzuk meg az alábbi parciális deriváltakat!

   (a) $f(x,y) = 3xy, \quad x = \sin(u+v), \quad y = \cos(u+v), \quad f'_u = ?, \quad f'_v = ?,$

   (b) $f(x,y) = \arcsin xy, \quad x = we^{uv}, \quad y = 2u - 3vw, \quad f'_u = ?, \quad f'_v = ?, \quad f'_w = ?.$

4. Hol deriválhatók az alábbi függvények? Adjuk meg a deriváltat is!

   (a) $f(x,y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$

   (b)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (c)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (d) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + x^3ye^{2z}$

   (e)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (f)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{y^2+x^4}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Adjuk meg az az alábbi függvények P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét, illetve a $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos iránymenti deriváltat P_0-ban!

(a) $f(x,y) = 3y + e^{xy^2} - 2y\arctan\frac{x}{y}$, $P_0(0,1)$, $\mathbf{v} = (2,1)$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3y^2}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ -3, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$P_0(-1,1)$, $\mathbf{v} = (-5,1)$

(c) $f(x,y,z) = e^z \cos y + e^y \sin z$, $P_0(-1,1,2)$, $\mathbf{v} = (0,1,1)$

(d) $f(x,y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}}$, $P_0(-\frac{1}{2},1)$. Keressük meg a maximális és minimális értékű iránymenti deriváltat P_0-ban!

III. Magasabbrendű parciális deriváltak

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi többváltozós függvények kielégítik az adott parciális differenciálegyenletet!

   (a) $z(x,y) = e^{-ay}\cos ax$, $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = a\frac{\partial z}{\partial y}$,

   (b) $u(x,t) = \sin(x-at) + \ln(x+at)$, $\quad u_{tt} = a^2 u_{xx}$,

   (c) $u(x,y) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$, $\quad u_{xx} + u_{yy} = 0$.

2. (**iMSc**) Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+xy^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   függvényre $f_{xy} \neq f_{yx}$.

IV. Teljes differenciálok

1. Egy gömb átmérőjét 10 cm-nek mérjük. A mérés pontossága ± 0.1 mm. Becsüljük meg a gömbtérfogat számított értékének pontosságát!

2. Az R_1, R_2, R_3 ellenállásokat párhuzamosan kötve, az eredő ellenállás R értékére

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

   Az ellenállások értékére rendre 25Ω, 40Ω, 50Ω értékeket mérünk legfeljebb 0.5% hibával. Mekkora a maximális hiba R számított értékére? Melyik ellenállás megváltozására a legérzékenyebb az eredő ellenállás?

3. A P nyomású, V térfogatú, T hőmérsékletű ideális gázokat jól írja le a $PV = 8.31T$ egyenlet, ahol a nyomást kilopascal-ban (kPa), a térfogatot literben (l), a hőmérsékletet Kelvinben (K) adjuk meg. Hogyan változik meg közelítően a gáz nyomása, ha a térfogatot 12 l-ről 12.3 l-re növeljük, miközben a hőmérsékletet 310 K-ről, 305 K-re csökkentjük?