Kibővített előadásjegyzet a VIK A2 Matematika tárgyhoz

Pitrik József

10. oktatási hét

Ez a oktatási segédlet az A2 előadásaim kommentekkel ellátott, szerkesztett változata, ami azzal a céllal íródott, hogy a távoktatás keretein belül elősegítse a Koronavírus járvány miatt sajnálatosan elmaradt előadások pótlását. Mivel sietve készült, ezért számos hibát, elírást tartalmazhat és a nyelvi megfogalmazások is inkább közelebb állnak a beszélt nyelvhez, mint a szokásos jegyzeteké. Kiegészítésképpen a jegyzetek végén ajánlott irodalom található, mely a további elmélyedést segítheti. Bármilyen észrevételt szívesen fogadok a pitrik@math.bme.hu címre. A subjectbe legyenek szívesek beírni, hogy „A2 jegyzet". Mindenkinek jó egészséget, türelmet, kitartást és sikeres felkészülést kívánok! A mihamarabbi viszontlátás reményében, üdvözlettel: PJ.

1. Lineáris transzformációk Euklideszi terekben

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy mit mondhatunk általában egy vektorterek között ható $T : V \to W$ lineáris leképezésről, ha még azt is tudjuk, hogy V és W Euklideszi terek. Ebben a fejezetben kulcsfontosságú lesz az **adjungált** fogalma. Idézzük fel, hogy ha $\mathbf{T} \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ egy $n \times m$-es mátrix a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ test felett, akkor az adjungáltját a

$$\mathbf{T}^* \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), \quad \mathbf{T}^* = \overline{\mathbf{T}^T}$$

képlettel definiáltuk, vagyis az adjungált mátrix, a transzponált konjugáltja. Emlékezzünk az adjungálás két fontos tulajdonságára. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két mátrix, melyre az $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ szorzat értelmezve van, akkor $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\,\mathbf{A}^*$. Ezen kívűl $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$ is nyílvánvalóan teljesül. Először speciális esetként vizsgáljuk meg a következőt. Legyen $V = \mathbb{C}^n$ a szokásos skaláris szorzattal, azaz ha

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

akkor a skaláris szorzatuk

$$\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{w}\,\rangle = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \dots & \overline{v_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \mathbf{v}^* \, \mathbf{w} \,.$$

Most legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ egy négyzetes mátrix, ami természetesen leír egy $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineáris transzformációt. Ekkor

$$\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{A}\, \mathbf{w}\,\rangle = \mathbf{v}^*(\mathbf{A}\, \mathbf{w}) = (\mathbf{A}^*\, \mathbf{v})^*\, \mathbf{w} = \langle\, \mathbf{A}^*\, \mathbf{v}, \mathbf{w}\,\rangle \,.$$

Meg lehet gondolni, hogy ez a tulajdonság karakterizálja az adjungált mátrixot, vagyis akár így is definiálhatnánk egy négyzetes mátrix adjungáltját. Pontosan ezt fogjuk tenni az általános esetben, ahogy a következő definíció mutatja.

Definíció. *Legyen $(V, \langle\, .,.\, \rangle_V)$ és $(W, \langle\, .,.\, \rangle_W)$ két Euklideszi tér. A $T : V \to W$* ***lineáris leképezés adjungáltján*** *azt a $T^* : W \to V$ lineáris leképezést értjük, melyre teljesül, hogy minden $\mathbf{v} \in V$ és $\mathbf{w} \in W$ esetén*

$$\langle\, \mathbf{w}, T\, \mathbf{v}\,\rangle_W = \langle\, T^*\, \mathbf{w}, \mathbf{v}\,\rangle_V \,.$$

Meggondolható a következő. Ha V-ben választunk egy $\alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ortonormált bázist, W-ben pedig egy $\beta = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ ortonormált bázist, akkor a $T : V \to W$ lineáris leképezés (α, β) bázispárra vonatkozó mátrixa legyen $\mathbf{T} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Ekkor a fent definiált $T^* : W \to V$ adjungált leképezés mátrixa a (β, α) bázispárra vonatkozólag éppen az $\mathbf{T}$ mátrix adjungáltja, vagyis $\mathbf{T}^* \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ lesz, vagyis a fenti definíciónk konzisztens az eddigiekkel. A következő tétel tisztázza az adjungált leképezés magterének és képterének néhány fontos tulajdonságát.

Tétel. *Legyen $T : V \to W$ két Euklideszi tér között lineáris leképezés. Ekkor fennállnak a következők:*

1. $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$,
2. $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$,
3. $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$,
4. $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy mivel tetszőleges E altér esetén $(E^\perp)^\perp = E$, ezért az 1. és a 3., valamint a 2. és a 4. állítások ekvivalensek. Végül a 2. kifejezés egyenértékű az 1. állítással, ha T helyett a T^*-ra alkalmazzuk és figyelembevesszük, hogy $(T^*)^* = T$.

Így elég az első állítást bizonyítanunk. Ha $\mathbf{x} \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$, akkor $\mathbf{x}$ ortogonális az összes $T\,\mathbf{y}$ alakú vektorra, vagyis

$$\langle\, \mathbf{x}, T\,\mathbf{y}\,\rangle = 0, \quad \text{minden } \mathbf{y} \in V \text{ esetén.}$$

Mivel $\langle\, \mathbf{x}, T\,\mathbf{y}\,\rangle = \langle\, T^*\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\,\rangle$, ezért

$$\langle\, T^*\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\,\rangle = 0, \quad \text{minden } \mathbf{y} \in V \text{ esetén,}$$

vagyis $T^*\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{x} \in KerT^*$, amit bizonyítani akartunk. A megfordítás ugyanígy megy, csak visszafele kell haladni. □

A következőkben aszerint osztályozzuk a lineáris leképezéseket, hogy milyen viszonyban vannak az adjungáltjukkal.

2. Önadjungált leképezések

A következőkben csak olyan lineáris leképezésekkel foglalkozunk, ahol az indulási és az érkezési tér ugyanaz az Euklideszi tér: $T : V \to V$. Ráadásul V-ben rögzítünk egy ortonormált bázist, és végig ebben a bázisban fogunk dolgozni. Ennek megfelelően az n-dimenziós $\mathbb{K}$ számtest feletti V vektorteret az eddigieknek megfelelően azonosítjuk a $\mathbb{K}^n$-nel, a vektorait pedig a $\mathbb{K}^n$-beli oszlopvektorokkal. A T transzformáció helyett pedig ezen bázisban felírt $\mathbf{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mátrixával azonosítjuk. Ennek megfelelően azt mondjuk, hogy

Definíció. *A $T : V \to V$ leképezés*

1. ***önadjungált****, ha a mátrixa önadjungált, azaz* $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$,
2. ***ferdén önadjungált****, ha a mátrixa ferdén önadjungált, azaz* $\mathbf{T}^* = -\,\mathbf{T}$.

Abban az esetben, ha V valós vektortér, akkor az adjungálás művelete megegyezik a transzponálással. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $\mathbf{T}$ *mátrix*

1. ***szimmetrikus****, ha* $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$,
2. ***antiszimmetrikus****, ha* $\mathbf{T}^T = -\,\mathbf{T}$.

Legyen $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix. Könnyen meggondolhatjuk, hogy ekkor az $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^*}{2}$ mátrix önadjungált, míg az $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^*}{2}$ mátrix ferdén önadjungált. Igaz továbbá ezen mátrixokra, hogy

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^*}{2}}_{\mathbf{S}} + \underbrace{\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^*}{2}}_{\mathbf{F}},$$

azaz bármely négyzetes mátrix felbontható egy önadjungált és egy ferdén önadjungált mátrix összegeként.

Példa 1. Legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ egy $\neq \mathbf{0}$ rögzített vektor. Tanultuk, hogy a **vektoriális szorzatra** tetszőleges $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorok és $c \in \mathbb{R}$ skalár esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \mathbf{w}, \\ \mathbf{a} \times (c\,\mathbf{v}) &= c(\mathbf{a} \times \mathbf{v}), \end{aligned}$$

azaz az $\mathbf{a}$ vektorral való vektoriális szorzat egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció. Adjuk meg ennek a lineáris transzformációnak az $\mathbf{A}$ mátrixát a kanonikus $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázisra vonatkozólag. Mivel ez egy jobbsodrású rendszer, ezért tudjuk, hogy

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

valamint ismert, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Az $\mathbf{A}$ mátrix megadásához elég kiszámolnunk a bázisvektoron kifejtett hatását, majd ezeket oszlopvektorként beírni a mátrixba, ahogy tanultuk. Legyen $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$. Ekkor a fenti számolási szabályok alapján, kihasználva a linearitást

$$\mathbf{a} \times \mathbf{i} = (a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}) \times \mathbf{i} = a_2(\underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{i}}_{-\mathbf{k}}) + a_3(\underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{i}}_{\mathbf{j}}) = a_3\,\mathbf{j} - a_2\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{j} = (a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}) \times \mathbf{j} = a_1(\underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{j}}_{\mathbf{k}}) + a_3(\underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{j}}_{-\mathbf{i}}) = -a_3\,\mathbf{i} + a_1\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{k} = (a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}) \times \mathbf{k} = a_1(\underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{k}}_{-\mathbf{j}}) + a_2(\underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{k}}_{\mathbf{i}}) = a_2\,\mathbf{i} - a_1\,\mathbf{j}\,.$$

Innen tehát az $\mathbf{a}$ vektorral vett vektoriális szorzás mátrixa az $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ kanonikus bázisban

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jól látható, hogy $\mathbf{A}$ egy antiszimmetrikus mátrix.

A (ferdén) önadjungált mátrixok sajátértékeit jellemzi a következő

Tétel. *1. Önadjungált lineáris transzformáció sajátértékei valósak.*

2. Ferdén önadjungált lineáris transzformáció nem 0 *sajátértékei tisztán képzetesek.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{T}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Ha $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$, akkor

$$\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{T}\,\mathbf{v}\,\rangle = \langle\, \mathbf{v}, \lambda\,\mathbf{v}\,\rangle = \lambda\,\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{v}\,\rangle\,.$$

Másrészt az önadjungáltság miatt

$$\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{T}\,\mathbf{v}\,\rangle = \langle\, \mathbf{T}\,\mathbf{v}, \mathbf{v}\,\rangle = \langle\, \lambda\,\mathbf{v}, \mathbf{v}\,\rangle = \overline{\lambda}\,\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{v}\,\rangle\,.$$

Ezek összehasonlítsával azt kapjuk, hogy $\overline{\lambda} = \lambda$, vagyis a sajátérték valós.
Ha $\mathbf{T}^* = -\,\mathbf{T}$, akkor most is fennáll, hogy

$$\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{T}\,\mathbf{v}\,\rangle = \langle\, \mathbf{v}, \lambda\,\mathbf{v}\,\rangle = \lambda\,\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{v}\,\rangle\,.$$

Másrészt a ferdén önadjungáltság miatt

$$\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{T}\,\mathbf{v}\,\rangle = \langle\, -\,\mathbf{T}\,\mathbf{v}, \mathbf{v}\,\rangle = \langle\, -\lambda\,\mathbf{v}, \mathbf{v}\,\rangle = -\overline{\lambda}\,\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{v}\,\rangle\,.$$

Ezek összehasonlítsával azt kapjuk, hogy $\overline{\lambda} = -\lambda$, ami csak úgy lehetséges, ha $\lambda = 0$ vagy tisztán képzetes. □

Önadjungált mátrixok sajátvektorairól a következő mondható el.

Tétel. *Legyen* $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$ *önadjungált mátrix,* $\mathbf{v}$ *és* $\mathbf{w}$ *sajátvektorral, azaz* $\mathbf{T}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ *és* $\mathbf{T}\,\mathbf{w} = \mu\,\mathbf{w}$*. Ha* $\lambda \neq \mu$*, akkor* $\mathbf{v}$ *és* $\mathbf{w}$ *ortogonálisak. Más szavakkal, önadjungált mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai merőlegesek egymásra.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{T}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ és $\mathbf{T}\,\mathbf{w} = \mu\,\mathbf{w}$. Ekkor

$$\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{T}\,\mathbf{w}\,\rangle = \langle\, \mathbf{v}, \mu\,\mathbf{w}\,\rangle = \mu\,\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{w}\,\rangle\,.$$

Másrészt, mivel önadjungált mátrixok sajátértéke valós,

$$\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{T}\,\mathbf{w}\,\rangle = \langle\, \mathbf{T}\,\mathbf{v}, \mathbf{w}\,\rangle = \langle\, \lambda\,\mathbf{v}, \mathbf{w}\,\rangle = \lambda\,\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{w}\,\rangle\,.$$

A két egyenlet különbségét véve,

$$0 = (\mu - \lambda)\,\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{w}\,\rangle,$$

s mivel a feltételeink szerint, $\mu \neq \lambda$, ez csak úgy lehetséges, ha $\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{w}\,\rangle = 0$, azaz a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ ortogonálisak. □

A későbbi tanulmányaink során szükség lesz az önadjungált mátrixok további osztályozására. Egy ilyen osztályozást ad meg a következő

Definíció. *Legyen* $T : V \to V$ *egy önadjungált leképezés. Ekkor* T

- ***pozitív definit****, ha* $\langle\, \mathbf{v}, T\,\mathbf{v}\,\rangle > 0$*, minden* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$*,* $\mathbf{v} \in V$ *esetén,*
- ***pozitív szemidefinit****, ha* $\langle\, \mathbf{v}, T\,\mathbf{v}\,\rangle \geq 0$*, minden* $\mathbf{v} \in V$ *esetén,*

- ***negatív definit****, ha* $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle < 0$*, minden* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$*,* $\mathbf{v} \in V$ *esetén,*
- ***negatív szemidefinit****, ha* $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle \leq 0$*, minden* $\mathbf{v} \in V$ *esetén.*

Azokat az önadjungát mátrixokat, amelyek egyik fenti kategóriába sem tartoznak, ***indefinit*** *mátrixoknak hívjuk.*

A sajátértékek ismeretében könnyen eldönthetjük egy önadjungált mátrixról, hogy milyen definit. Igaz ugyanis a következő tétel.

Tétel. *Legyen* $T : V \to V$ *egy önadjungált leképezés. Ekkor* T *pontosan akkor*

- *pozitív definit, ha minden sajátértéke szigorúan pozitív,*
- *pozitív szemidefinit, ha minden sajátértéke nemnegatív,*
- *negatív definit, ha minden sajátértéke negatív,*
- *negatív szemidefinit, ha minden sajátértéke nempozitív.*

A definitség meghatározásánál hasznos lesz a következő, úgynevezett **főminor teszt**. Legyen $\mathbf{T}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az első k oszlopa és első k sora által meghatározott bal felső $k \times k$-s részmátrixot k**-dik főminormátrixnak** hívjuk és $\mathbf{T}_k$-val jelöljük. Ezek determinánsának vizsgálatával a következő módon dönthetünk a $\mathbf{T}$ mátrix definitségéről.

Tétel. *Az* $\mathbf{T}$ *mátrix pontosan akkor*

1. *pozitív definit, ha* $\det \mathbf{T}_k > 0$*, minden* $k = 1, 2, \ldots, n$ *esetén,*
2. *negatív definit, ha* $(-1)^k \det \mathbf{T}_k > 0$*, minden* $k = 1, 2, \ldots, n$ *esetén. (Vagyis az összes párosrendű főminor determinánsa pozitív, míg az összes páratlan rendűé negatív.)*

Ha egy $\mathbb{C}$ feletti vektortérben egy önadjungált mátrix valamelyik sajátértéke többszörös multiplicitású (komplex térben az algebrai és a geometriai multiplicitások megegyeznek), akkor a hozzá tartozó altéren mindig felvehető egy ortogonális bázis. Ezzel azt kapjuk, hogy egy komplex Euklideszi térben mindig van a $\mathbf{T}$ önadjungált mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázis. Ebben a sajátbázisban a tanultaknak megfelően $\mathbf{T}$ diagonális, a főátlóban a valós sajátértékekkel. Ezt fogalmazza meg a következő tétel:

Tétel. *Ha V egy véges dimenziós komplex Euklideszi tér és $T : V \to V$ egy önadjungált lineáris transzformáció, akkor V-ben van T sajátvektoraiból álló ortonormált bázis. Ebben a bázisban T mátrixa diagonális, a diagonális elemek T valós sajátértékei. Más szavakkal, létezik $\mathbf{T}$ sajátvektorait oszlopként tartalmazó $\mathbf{U}$ mátrix, mellyel*

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}\,\mathbf{D}\,\mathbf{U}^{-1},$$

ahol $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ a $\mathbf{T}$ sajátértékeit tartalmazó diagonális mátrix.

A tételben szereplő $\mathbf{U}$ báziscserét leíró mátrix fontos tulajdonsággal bír. Tegyük fel, hogy $\mathbf{T}\,\mathbf{v}_i = \lambda_i\,\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ahol a tételünk szerint a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sajátvektorok ortonormált bázist alkotnak, azaz

$$\langle\, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \,\rangle = \delta_{ij}.$$

Az $\mathbf{U}$ mátrix ekkor

$$\mathbf{U} = \left(\ \mathbf{v}_1 \ \ \middle|\ \ \mathbf{v}_2 \ \ \middle|\ \ \ldots \ \ \middle|\ \ \mathbf{v}_n\ \right),$$

mellyel

$$\mathbf{U}^*\,\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \end{pmatrix} \left(\ \mathbf{v}_1 \ \ \middle|\ \ \mathbf{v}_2 \ \ \middle|\ \ \ldots \ \ \middle|\ \ \mathbf{v}_n\ \right) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}\,.$$

Az ilyen tulajdonságú mátrixokkal foglalkozunk a következő fejezetben.

3. Izometriák és unitér transzformációk

Legyen $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ két normált tér. Azt mondjuk, hogy az $U : X \to Y$ leképezés **izometria**, ha megőrzi a normát, azaz

$$\|\,\mathbf{U}\,\mathbf{x}\,\|_Y = \|\,\mathbf{x}\,\|_X, \quad \text{bármely } \mathbf{x} \in X \text{ esetén.}$$

Abban az esetben, ha $X = V$, $Y = W$ Euklideszi terek, rendre az $\langle\, ., . \,\rangle_V$ illetve $\langle\, ., . \,\rangle_W$ skalárszorzattal, akkor a fenti egyenlet azt jelenti, hogy

$$\langle\, U\,\mathbf{x}, U\,\mathbf{x} \,\rangle_W = \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle_V, \quad \text{minden } \mathbf{x} \in V \text{ esetén.}$$

Kiderül, hogy ebben az esetben több is igaz, bizonyítható ugyanis a következő

Tétel. *Az Euklideszi terek között ható $U : V \to W$ leképezés pontosan akkor izometria, ha*

$$\langle\, U\,\mathbf{x}, U\,\mathbf{y} \,\rangle_W = \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle_V, \quad \textit{minden } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \textit{ esetén.}$$

A fenti tétel következményeként írhatjuk, hogy

$$\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y}\rangle_W = \langle U^*U\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_V, \quad \text{minden } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \text{ esetén},$$

ami csak úgy lehetséges, ha $U^*U = \mathbf{I}$. Mivel $U^*U = \mathbf{I}$ esetén

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle U^*U\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle U\mathbf{x}, U\mathbf{x}\rangle$$

is fennáll, minden $\mathbf{x} \in V$ esetén, ezért ez elégséges is, hogy U izometria legyen. Bizonyítottuk tehát a következőt.

Tétel. *Az Euklideszi terek között ható $U : V \to W$ leképezés pontosan akkor izometria, ha*

$$U^*U = \mathbf{I}\,.$$

Az előző fejezet végén található számolás mintájára megmutatható, hogy U pontosan akkor izometria, ha az oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak. Az $U^*U = \mathbf{I}$ kifejezést úgyis mondhatjuk, hogy U pontosan akkor izometria, ha létezik baloldali inverze (vagyis olyan mátrix, amivel balról szorozva az identitást kapjuk). Még jobb a helyzet, ha maga az inverz is létezik.

Definíció. *Az $U : V \to W$ izometriát* ***unitér leképezésnek*** *(a mátixát* ***unitér mátrixnak****) hívjuk, ha invertálható.*

A fenti definíciónak egyszerű következménye, hogy az $U : V \to W$ izometria akkor és csak akkor lehet unitér, ha $\dim U = \dim V$.

Ekkor tehát $U^{-1} = U^*$. Legyen most $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ egy ortonormált bázis V-ben, azaz $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \delta_{ij}$. Ekkor

$$\langle U\mathbf{v}_i, U\mathbf{v}_j\rangle = \langle \underbrace{U^*U}_{=\mathbf{I}}\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \delta_{ij},$$

vagyis az $U\mathbf{v}_1, U\mathbf{v}_2, \ldots, U\mathbf{v}_n$ vektorok szintén ortonormált bázist alkotnak W-ben: egy unitér transzformáció ortonormált bázist ortonormált bázisba visz. A következő tételben összefoglaljuk az eddigi megfigyeléseinket.

Tétel. *Legyen V egy véges dimenziós komplex Euklideszi tér, $U : V \to V$ egy lineáris transzformáció. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *U unitér lineáris transzformáció.*
2. *U izometria (ugyanaz az indulási és az érkezési tér!).*
3. *$\|U\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, minden $\mathbf{v} \in V$ esetén.*

4. U minden V-beli ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

5. Lézezik V-ben olyan ortonormált bázis, amit U ortonormált bázisba visz.

6. $U^* = U^{-1}$.

Ha $V = \mathbb{R}^n$ valós Euklideszi tér, akkor $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^T$, vagyis az, hogy $\mathbf{U} : V \to V$ unitér, most az $\mathbf{U}^T\,\mathbf{U} = \mathbf{I}$ alakban írható. Ezekben az esetekben az unitér kifejezés helyett inkább az **ortogonális** kifejezést szokás használni, vagyis az $\mathbf{U} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mátrix **ortogonális mátrix**, ha $\mathbf{U}^T\,\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Ha $\mathbf{U}$ izometria, akkor láttuk, hogy az $\mathbf{U}^*\,\mathbf{U} = \mathbf{I}$ azt jelenti, hogy $\mathbf{U}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak. Ha $\mathbf{U}$ unitér is, akkor az oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak, sőt miután ekkor $\mathbf{U}^*$ is unitér (gondoljuk meg miért!), így $\mathbf{U}$ sorvektorai is ortonormált bázis alkotnak. Ezek alapján könnyű ellenőrizni egy mátrixról, hogy unitér-e.

Példa 2. Legyen $\mathbf{U}$ a síkbeli α szögű forgatás mátrixa, azaz

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Azt, hogy $\mathbf{U}$ izometria, megmutathatjuk az $\mathbf{U}^*\,\mathbf{U} = \mathbf{I}$ ellenőrzésével, ahonnan mivel $\mathbf{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, vagyis az indulási és az érkezési tér azonos, az unitérség már következik (vagyis mivel valós téren vagyunk, $\mathbf{U}$ ortogonális). Persze van könnyebb út, hiszen egyből látszik, hogy $\mathbf{U}$ oszlopvektorai (és sorvektorai) ortonormáltak $\mathbb{R}^2$-ben, így ONB-t alkotnak, vagyis $\mathbf{U}$ unitér. Érdekességként megjegyezzük, hogy ha $U : V \to V$ valós V Euklideszi terek között ható unitér leképezés, akkor mindig létezik olyan ortonormált bázis V-ben, amiben U mátrixa blokkdiagonális mátrix, pontosabban olyan mátrix, melynek főátlójában vagy a ± 1 számok, vagy (1) alakú 2×2-es mátrixok állnak. Ennek az a geometriai tartalma, hogy egy valós Euklideszi téren ható unitér leképezés bizonyos altereken identitásként, bizonyos altereken tükrözésként, míg bizonyos síkokon forgatásként hat.

A következőkben megvizsgáljuk, hogy mit mondhatunk unitér mátrixok sajátértékeiről.

Tétel. *Legyen $\mathbf{U}$ egy unitér mátrix. Ekkor*

1. Ha λ az $\mathbf{U}$ sajátértéke, akkor $|\lambda| = 1$.

2. $|\det \mathbf{U}\,| = 1$. Ha speciálisan $\mathbf{U}$ ortogonális, akkor $\det \mathbf{U} = \pm 1$.

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy $\mathbf{U}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$. Ekkor

$$\|\,\mathbf{U}\,\mathbf{v}\,\| = \|\lambda\,\mathbf{v}\,\| = |\lambda| \cdot \|\,\mathbf{v}\,\| = \|\,\mathbf{v}\,\|$$

miatt $|\lambda| = 1$.

2. Legyen $\det \mathbf{U} = z$. Kihasználva, hogy $\det \mathbf{U}^* = \overline{\det \mathbf{U}} = \overline{z}$, a determinánsra vonatkozó szorzattétel miatt

$$\det(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) = \det \mathbf{U}^* \det \mathbf{U} = \overline{z}z = |z|^2 = \det \mathbf{I} = 1,$$

ahonnan $|z| = 1$, ahogy állítottuk. Ha $\mathbf{U}$ ortogonális, akkor z valós, így $z^2 = 1$, ahonnan $z = \pm 1$. $\square$

Megjegyzés 3. Tanultuk, hogy Euler-tétele értelmében bármely $z \in \mathbb{C}$ szám felírható

$$z = re^{i\varphi}$$

alakban, ahol $r > 0$ a sugár, φ pedig egy valós szám. φ-t néha érdemes megszorítani a $(-\pi, \pi]$ intervallumra, ekkor φ egyértelmű. Az $e^{i\varphi}$ faktort fázisnak szokás hívni, és nevezetes tulajdonsága, hogy 1 abszolútértékű: $|e^{i\varphi}| = 1$. Belátható a következő szép analógia: bármely $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrixhoz egyértelműen létezik egy $\mathbf{P}$ pozitív definit mátrix és egy $\mathbf{U}$ unitér mátrix, mellyel

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{U}\,.$$

Ezt az $\mathbf{A}$ mátrix **poláris felbontásának** hívjuk. Hogy jobban lássuk az analógiát, emlékeztetünk rá, hogy $\mathbf{P}$ pozitív definitsége azt jelenti, hogy $\mathbf{P}$ önadjungált és az összes sajátértéke pozitív, míg $\mathbf{U}$ unitérségéből következik, hogy az összes sajátértéke 1 abszolút értékű, azaz a komplex számsík origó középpontú egységkörén helyezkedik el. Ilyen értelemben tehát, a poláris felbontás megfelel a komplex számok Euler-alakjának: az r sugár szerepét $\mathbf{P}$, az $e^{i\varphi}$ fázis szerepét $\mathbf{U}$ veszi át. Valóban, ha $n = 1$, azaz 1×1-es komplex mátrixokat, azaz komplex számokat tekintünk, akkor a poláris felbontás egybeesik az Euler-alakkal.

Emlékezzünk, hogy $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$, azaz az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok hasonlóak, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{S}$ mátrix, amivel $\mathbf{B} = \mathbf{S}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}^{-1}$. A hasonlóság fontos speciális esete, amikor $\mathbf{S}$ unitér.

Definíció. *Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok **unitér ekvivalensek**, ha létezik $\mathbf{U}$ unitér mátrix, amivel*

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}^*\,.$$

Mivel unitér mátrixok esetén $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$, ezért ez valóban egy hasonlósági relációt jelent, ráadásul mutatja is az előnyét: nem kell a transzformációs mátrix invertálásával vesződni, elég adjungálnunk azt. Bizonyítás nélkül közöljük az unitér ekvivalencia egy szükséges és elégséges feltételét. Az eddigiek alapján bárki megpróbálkozhat a bizonyításával.

Tétel. *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix akkor és csak akkor unitér ekvivalens egy diagonális mátrixszal, ha van a sajátvektoraiból álló ortonormált bázis.*

Végül nézzünk egy példát.

Példa 4. Tudjuk, hogy az $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázisban a z tengely körüli $\phi > 0$ szögű forgatás mátrixa

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Szeretnénk az origón átmenő, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ irányvektorú egyenes, mint tengely körüli ϕ szögű forgatásának mátrixát felírni az $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázisra vonatkozóan. Az ötlet a következő: forgassuk el úgy a koordinátarendszerünket, hogy az eredeti z tengely a $\mathbf{v}$ vektor irányába essék. Ebben a bázisban, nyílvánvalóan a fenti mátrix lesz az elforgatás mátrixa. Ezt kell tehát majd visszatranszformálnunk. Az elforgatással kapott bázis vektorait jelölje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, melyeknek tehát jobbsodrású ortonormált bázist kell alkotniuk, azzal a feltétellel, hogy $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{v}$. Ez utóbbi miatt teljesülnie kell, hogy

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{e}_1$ vektort egységnyi hosszúságúnak és $\mathbf{e}_3$-ra merőlegesnek kell választanunk. Ezt kontinuum módon tehetjük meg, szabadon választhatunk egy megfelelőt (érdemes minél több 0-t beletennünk). Legyen például

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennyi szabadság után a hiányzó $\mathbf{e}_2$ vektort már csak egyféleképpen választhatjuk, hiszen abból, hogy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ jobbsodrású ortonormált rendszert kell, hogy alkosson, következik, hogy

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Az $\alpha = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ortonormált bázisra vonatkozólag tehát a $\mathbf{e}_3$ tengelye körüli ϕ szögű forgatás mátrixa

$$\mathbf{F}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A célunk, hogy áttérjünk az $\alpha' = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázisra. Az $\alpha \to \alpha'$ báziscserét leíró transzformációs mátrixot úgy kaphatjuk meg, hogy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ α'-ban felírt vektorait oszlopként beírjuk a mátrixba:

$$[I]_\alpha^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \mathbf{U}\,.$$

Jogosan éltünk az $\mathbf{U}$ jelöléssel, hiszen a fenti mátrix unitér. Ez látszódik onnan, hogy például az oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak, vagy onnan, hogy tudjuk, hogy ONB-t ONB-ba visz. Ez azért nagyon finom, mert $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$, így a keresett α bázisban felírt mátrix:

$$\mathbf{F}_{\alpha'} = \mathbf{U}\,\mathbf{F}_\alpha\,\mathbf{U}^*,$$

aminek kiszámításától most nagyvonalúan eltekintünk.