Kibővített előadásjegyzet a VIK A2 Matematika tárgyhoz

Pitrik József

9. oktatási hét

Ez a oktatási segédlet az A2 előadásaim kommentekkel ellátott, szerkesztett változata, ami azzal a céllal íródott, hogy a távoktatás keretein belül elősegítse a Koronavírus járvány miatt sajnálatosan elmaradt előadások pótlását. Mivel sietve készült, ezért számos hibát, elírást tartalmazhat és a nyelvi megfogalmazások is inkább közelebb állnak a beszélt nyelvhez, mint a szokásos jegyzeteké. Kiegészítésképpen a jegyzetek végén ajánlott irodalom található, mely a további elmélyedést segítheti. Bármilyen észrevételt szívesen fogadok a pitrik@math.bme.hu címre. A subjectbe legyenek szívesek beírni, hogy „A2 jegyzet”. Mindenkinek jó egészséget, türelmet, kitartást és sikeres felkészülést kívánok! A mihamarabbi viszontlátás reményében, üdvözlettel: PJ.

1. Euklideszi terek

Az eddigiek során, mikor egy V vektorteret tekintettünk valamilyen $\mathbb{K}$ számtest felett, akkor nagyon szerény elvárásokat támasztottunk a V térrel szemben: legyen zárt a vektorok összeadására, valamint egy $\mathbb{K}$-beli skalárral való szorzásra nézve. A következőkben további struktúrákat vezetünk be V-n, ezáltal jelentősen bővül a megoldható problémák köre. Motivációul a sík- és a térvektorokról tanultak, azaz $\mathbb{R}^2$, illetve $\mathbb{R}^3$ vektorainál jól bevált fogalmak szolgálnak. Emlékezzünk rá, hogy például $\mathbb{R}^3$-ben mindig automatikuasan felvettünk egy derékszögű Descartes-féle koordinátarendszert. Ekkor nem csináltunk mást, mint rögzítettük a standard $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázist és végig ebben a bázisban dolgoztunk. Ekkor tehát tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektort kifejtve ebben a bázisban.

$$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{b} = b_1\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j} + b_3\,\mathbf{k},$$

azaz ebben a bázisban

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Elemi geometriai megfontolások alapján (Pithagorasz-tétel) értelmeztük ezen vektorok hosszát, mégpedig a következőképpen

$$|\,\mathbf{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \text{illetve} \quad |\,\mathbf{b}\,| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

sőt, miután két vektor mindig egy síkban fekszik, értelmezhetjük a **a** és **b** által bezárt szöget. Ha az általuk bezárt szög θ, akkor beszélhetünk **a** és **b** vektorok skaláris szorzatáról, amit a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}\,| \cos\theta$$

képlettel definiáltunk. Könnyű ellenőrizni, hogy az így értelmezett skalárszorzatra igazak a következők:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (szimmetrikus),
- $(c\,\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (c\,\mathbf{b}) = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, minden $c \in \mathbb{R}$ esetén (homogén),
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ minden $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén (additív),
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$, minden $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ esetén és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, pontosan akkor, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Némi geometriai megfontolás után láttuk, hogy a skalárszorzatot a vektorok koordinátáival is ki tudjuk fejezni:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}\,| \cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

amiből egyrész egyből látszik, hogy egy vektor hossza hogyan számolható ki a skalárszorzattal:

$$|\,\mathbf{a}\,| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}},$$

másrészt, hogyan lehet két vektor által bezárt szög koszinuszát a skalárszorzattal kiszámolni:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\,\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}\,|}.$$

Speciális esetként látjuk, hogy két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha a skalárszorzatuk zérus:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Látjuk tehát, hogy a skaláris szorzat értelmezésével, meg tudjuk mondani egy vektor hosszát és két vektor által bezárt szöget is. Ezen megfigyeléseinket szeretnénk kiterjeszteni $\mathbb{R}^3$-ről tetszőleges $\mathbb{K}$ feletti V vektortérre. Az ötlet az, hogy az $\mathbb{R}^3$-beli skalárszorzat fenti tulajdonságaival fogjuk (kis módosítás után) a skalárszorzatot definiálni az általános esetben. Az általánosítás kifejezésére a jelöléseinket is kicsit megváltoztatjuk.

Definíció. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ számtest feletti vektortér. Ekkor minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ vektor és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén értelmezzük az alábbi*

$$\langle\, .,. \,\rangle : V \times V \to \mathbb{K}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle$$

kétváltozós leképezést a következőképpen.

1. $\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle = \overline{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{x} \,\rangle}$,

2. $\langle\, \mathbf{x}, \lambda\, \mathbf{y} \,\rangle = \lambda \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle$,

3. $\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \,\rangle = \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle + \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{z} \,\rangle$,

4. $\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle \geq 0$, *és* $\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A fenti módon definiált $\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle$ kifejezést a $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok ***skaláris*** *vagy* ***belső szorzatának*** *hívjuk.*

Tegyünk néhány megjegyzést a fenti definícióval kapcsolatban.

Megjegyzés 1.

1. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor mivel valós számok konjugáltja önmaga, a definíció 1. pontja szerint
$$\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle = \overline{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{x} \,\rangle} = \langle\, \mathbf{y}, \mathbf{x} \,\rangle,$$
vagyis a skaláris szorzat szimmetrikus.

2. Felmerül, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén miért van szükség a konjugálásra az 1. pontban. Erre az ellentmondásmentesség miatt van szükség, ugyanis, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, akkor a 4. pont értelmében, csak a szimmetrikusságot feltéve:
$$0 < \langle\, i\,\mathbf{x}, i\,\mathbf{x} \,\rangle = i \langle\, i\,\mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle = i \langle\, \mathbf{x}, i\,\mathbf{x} \,\rangle = i^2 \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle = - \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle < 0$$
ellentmondásra jutnánk.

3. A 2. pont értelmében a második tényezőből a skalárt simán kiemelhetjük a skalárszorzat elé. Az első változóból azonban a skalár konjugáltját kell kiemelni, ugyanis
$$\langle\, \lambda\,\mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle = \overline{\langle\, \mathbf{y}, \lambda\,\mathbf{x} \,\rangle} = \overline{\lambda \langle\, \mathbf{y}, \mathbf{x} \,\rangle} = \overline{\lambda} \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle\,.$$

Definíció. *Legyen V egy véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ számtest felett. Ha V-n a fenti módon értelmezünk egy $\langle\, .,. \,\rangle$ skaláris szorzatot, akkor a V teret* ***Euklideszi*** *vagy* ***skalárszorzatos térnek*** *hívjuk és $(V, \langle\, .,. \,\rangle)$-vel jelöljük.*

A definícióban véges dimenziós tereket említettünk, mert mi ezekkel foglalkozunk. Ugyanígy lehet definiálni a skaláris szorzatot végtelen dimenziós esetben is, ekkor általában Hilbert-terekről beszélünk (ha még felteszünk egy plussz tulajdonságot, miszerint a tér teljes erre a skalárszorzatra nézve). Nézzünk néhány fontos példát Euklideszi terekre.

Példa 2. A bevezetés alapján világos, hogy $V = \mathbb{R}^2$, illetve $V = \mathbb{R}^3$ esetén az

$$\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b}\,\rangle \equiv \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}\,|\cos\theta$$

módon definiált skaláris szorzattal V Euklideszi tér.

Példa 3. Legyen $V = \mathbb{K}^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, melyek tehát

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Értelmezzük ezek skaláris szorzatát a következőképpen:

$$\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y}\,\rangle := \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \ldots & \overline{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^*\,\mathbf{y}, \tag{1}$$

ahol $\mathbf{x}^*$ az $\mathbf{x}$ vektor adjungáltja, vagyis a transzponáltjának a konjugáltja : $\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{x}^T}$.

Könnyű ellenőrizni, hogy ez tényleg teljesíti a skalárszorzattól megkövetelt összes tulajdonságot. Vegyük észre, hogy a $V = \mathbb{R}^n$ speciális esetben nem kell konjugálnunk, azaz ekkor

$$\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y}\,\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T\,\mathbf{y},$$

és $n = 3$ esetén visszakapjuk a szokásos $\mathbb{R}^3$-beli skaláris szorzatot.

Példa 4. Legyen most $V = \mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú valós együtthatós polinomok tere (tudjuk, hogy ez egy vektortér $\mathbb{R}$ felett). Legyen $p, q \in V$ két polinom és értelmezzük ezek skaláris szorzatát a következőképpen:

$$\langle\, p, q\,\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\;\mathrm{d}\,x.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ez valóban skaláris szorzatot definiál. Szintén skalárszorzatot kapuk, ha a $[0,1]$ intervallum helyett egy tetszőleges $[a,b]$ intervallumon integrálunk, ez mutatja, hogy egy vektortéren többféle képpen is értelmezhetünk skalárszorzatot.

A skaláris szorzat egyik leggyakrabban használt tulajdonsága az úgynevezett Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség.

Tétel. ***(Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség.)***
Legyen $(V, \langle\, .,. \,\rangle)$ *egy Euklideszi tér, és* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$*. Ekkor*

$$|\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle| \leq \sqrt{\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle}\sqrt{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle}. \tag{2}$$

Továbbá, egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{y}$ *lineárisan összefüggő, azaz valamely* c *skalárra* $\mathbf{x} = c\,\mathbf{y}$*.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan összefüggő, azaz valamely c skalárra $\mathbf{x} = c\,\mathbf{y}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle \langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle &= \langle\, c\,\mathbf{y}, c\,\mathbf{y} \,\rangle \langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle = |c|^2(\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle)^2 \\ &= |c\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle|^2 = |\langle\, \mathbf{y}, c\,\mathbf{y} \,\rangle|^2 = |\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{x} \,\rangle|^2 = |\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle|^2, \end{aligned}$$

vagyis tényleg egyenlőség teljesül. Most tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan függetlenek. Mivel $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, ezért bármely $c \in \mathbb{K}$ skalárra $\mathbf{x} - c\,\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ szintén fenn áll, így

$$\begin{aligned} 0 < \langle\, \mathbf{x} - c\,\mathbf{y}, \mathbf{x} - c\,\mathbf{y} \,\rangle &= \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle - \bar{c}\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{x} \,\rangle - c\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle + |c|^2\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle \\ &= \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle - 2\Re(c\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle) + |c|^2\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle, \end{aligned}$$

ahol $\Re z$ jelöli egy z komplex szám valós részét. A fenti egyenlőtlenség minden c skalárra fennáll, így élhetünk speciálisan a

$$c = \frac{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{x} \,\rangle}{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle}$$

választással. Ekkor

$$\Re(c\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle) = \Re\left(\frac{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{x} \,\rangle}{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle}\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle\right) = \Re\left(\frac{|\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle|^2}{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle}\right) = \frac{|\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle|^2}{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle},$$

hiszen ez utóbbi valós szám. Ezen megfigyelésünket visszaírva a fenti egyenlőtlenségbe, azt kapjuk, hogy

$$0 < \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle - 2\frac{|\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle|^2}{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle} + \underbrace{\left|\frac{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{x} \,\rangle}{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle}\right|^2 \langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle}_{\frac{|\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle|^2}{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle}} = \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle - \frac{|\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle|^2}{\langle\, \mathbf{y}, \mathbf{y} \,\rangle},$$

melyet átrendezve megkapjuk a vágyott Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget. $\square$

Következény 5. ***(Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.)***
Ha speciálisan $\mathbb{R}^n$-ben vagyunk az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ skalárszorzattal, akkor a következő nevezetes egyenlőtlenséghez jutunk:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2). \tag{3}$$

Láttuk, hogy $\mathbb{R}^3$-ben a skaláris szorzat segítségével hogyan adhatjuk meg egy vektor hosszát. Mielőtt ezt megtennénk egy absztrakt V vektortérben, gondoljuk meg, hogy milyen elvárásaink vannak egy vektor hosszával kapcsolatban. Ezeket az elvárásokat gyűjtöttük egybe az alábbi definícióban. Az absztrakcióra utalva hossz helyett a norma szót szoktuk használni.

Definíció. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ számtest feletti vektortér, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ tetszőleges vektorok, $c \in \mathbb{K}$ egy tetszőleges skalár. Ekkor definiáljuk a következő*

$$\|.\| : V \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$$

függvényt a következő tulajdonságokkal:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, *és* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $\|c\,\mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|$,
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(háromszög-egyenlőtlenség).*

Ha a fentiek teljesülnek, akkor $\|\mathbf{x}\|$-t az $\mathbf{x}$ vektor ***normájának*** *hívjuk. Ha a V vektortéren értelmeztünk egy normát, akkor V-t* ***normált térnek*** *hívjuk és $(V, \|.\|)$-vel jelöljük.*

Most az $\mathbb{R}^3$-ben tapasztaltaktól indíttatva megmutatjuk, hogy egy $(V, \langle .,. \rangle)$ Euklideszi térben az

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

kifejezés valóban normát definiál. Az $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ feltétel triviálisan teljesül, minthogy az is, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. A 2. tulajdonság

$$\|c\,\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle c\,\mathbf{x}, c\,\mathbf{x} \rangle} = \sqrt{c\bar{c}\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{|c|^2\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

alapján szintén teljesül. Már csak a háromszög egyenlőtlenség teljesülését kell ellenőriznünk:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}_{2\Re(\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle) \leq 2|\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle|} \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépésben felhasználtuk a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget. Ezek alapján élhetünk a következő definícióval.

Definíció. *A $(V, \langle\, .,. \rangle)$ Euklideszi téren az*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle} \tag{4}$$

kifejezéssel definiált normát ***Euklideszi normának*** *vagy a $\langle\, .,. \rangle$* ***skalárszorzat által indukált normának*** *hívjuk.*

Vegyük észre, hogy ezzel a normával a **Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség** a következő alakot ölti:

$$|\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle| \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \tag{5}$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a fent bizonyított tételek tetszőleges skalárszorzatos térben igazak. Szemléltessük ezt az alábbi egyszerű példán.

Példa 6. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ és definiáljuk most a síkon a következő skalárszorzatot. Tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T, \mathbf{w} = (w_1, w_2)^T \in V$ esetén legyen

$$\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\rangle = v_1 w_1 + 3 v_2 w_2.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez tényleg skaláris szorzatot definiál V-n. Legyen most

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizzük, hogy fennáll a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség!

$$|\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\rangle| = |2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 4| = 22,$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{v} \,\rangle} = \sqrt{2^2 + 3 \cdot (-2)^2} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\langle\, \mathbf{w}, \mathbf{w} \,\rangle} = \sqrt{(-1)^2 + 3 \cdot 4^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Látható, hogy

$$22 = |\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\rangle| < \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| = 28$$

valóban teljesül.

Az (5) Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ esetben átrendezhetjük:

$$\frac{|\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \le 1,$$

vagyis

$$-1 \le \frac{\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \le 1.$$

Ez mutatja, hogy a közrezárt kifejezés tényleg felfogható egy szög koszinuszaként, tehát ismét az $\mathbb{R}^3$ mintájára egy Euklideszi térben értelmezhetjük két vektor által bezárt szöget.

Definíció. *Legyen* $(V, \langle\, .,. \,\rangle)$ *egy Euklideszi tér. Ekkor* V *két* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ *vektora által bezárt* θ *szöget a következő kifejezéssel értelmezzük:*

$$\cos\theta = \frac{\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\, \mathbf{x} \,\| \cdot \|\, \mathbf{y} \,\|}.$$

Ha $\langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle = 0$*, akkor azt mondjuk, hogy* $\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{y}$ ***ortogonálisak****, (jelben* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$*). Ha a* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ *vektorrendszer tagjai páronként ortogonálisak, azaz* $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$*, ha* $i \neq j$*, akkor a vektorrendszert* ***ortogonális vektorrendszernek*** *hívjuk. Ha ezen felül még az is teljesül, hogy mindegyik vektor egységnyi normájú (normált), azaz* $\|\, \mathbf{v}_i \,\| = 1$ *minden* $i = 1, 2 \ldots, n$ *esetén, akkor az* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ *vektorrendszer* ***ortonormált (ON) vektorrendszer****.*

Példa 7. Legyen $V = \mathcal{P}_2$ a legfeljebb másodfokú polinomok tere a

$$\langle\, p, q \,\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ \mathrm{d}\,x$$

skaláris szorzattal. Legyen

$$S = \{1, x, 3x^2 - 1\} \subset \mathcal{P}_2$$

egy vektorrendszer. Mutassuk meg, hogy S ortogonális, de nem ortonormált vektorrendszer! Ki kell számolnunk az egyes vektorok skaláris szorzatát.

$$\langle\, 1, x \,\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\ \mathrm{d}\,x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0,$$

$$\langle\, 1, 3x^2 - 1 \,\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot (3x^2 - 1)\ \mathrm{d}\,x = \left[x^3 - x\right]_{-1}^{1} = 0,$$

$$\langle\, x, 3x^2 - 1 \,\rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot (3x^2 - 1)\ \mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} (3x^3 - x)\ \mathrm{d}\,x = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0,$$

vagyis a vektoraink páronként ortogonálisak, vagyis a vektorrendszer ortogonális. Számoljuk ki valamelyik vektor normáját, pl

$$\|1\| = \sqrt{\langle\, 1, 1 \,\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\ \mathrm{d}\,x} = \sqrt{2} \neq 1,$$

vagyis az 1 vektor nem egység normájú, vagyis a vektorrendszer nem ortonormált.

A következő fejezetben megvizsgáljuk, hogy milyen messzemenő következményei vannak az ortogonalitás bevezetésének. De mindezek előtt még kiaknázzuk azt a lehetőséget, hogy ha tudjuk értelmezni egy vektortérben egy vektor hosszát, akkor tudjuk értelmezni két vektor távolságát is. Először ismét megfontoljuk, hogy milyen tulajdonságokat várunk el a távolság fogalmától, majd ezeket az elvárásokat definícióként fogalmazzuk meg. Erre a távolság fogalomra ezentúl metrikaként fogunk hivatkozni, de a jelölésben megemlékezünk a távolságról (distance = távolság, angolul).

Definíció. *Legyen V egy vektortér. Minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ vektor esetén értelmezzük a következő*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

kétváltozós függvényt az alábbi tulajdonságokkal:

1. *$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, és $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,*
2. *$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (szimmetria),*
3. *$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, (háromszög egyenlőtlenség).*

A fenti d függvényt ***metrikának*** *hívjuk. Ha a V vektortéren értelmeztünk egy metrikát, akkor V-t* ***metrikus térnek*** *hívjuk és (V, d)-vel jelöljük.*

Könnyű ellenőrizni, hogy egy $(V, \|.\|)$ normált tér automatikusan metrikus tér, ha a metrikát a

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \tag{6}$$

kifejezéssel definiáljuk. A fenti metrikát a $\|.\|$ **norm által indukált metrikának hívjuk**. Ezen megfontolás alapján minden Euklideszi tér metrikus tér is a

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}$$

indukált metrikával. Ezt szokás **Euklideszi metrikának** is hívni.

Példa 8. Legyen $V = \mathcal{P}_2$ a

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) \, \mathrm{d}\, x$$

skalárszorzattal. Számoljuk ki a $p = x$ és a $q = x^2$ polinomok távolságát az indukált metrikában!

$$d(x, x^2) = \sqrt{\langle x - x^2, x - x^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x - x^2)^2 \, \mathrm{d}\, x} = \frac{1}{30}.$$

2. Ortogonális rendszerek

Legyen $(V, \langle\, .\,, .\, \rangle)$ egy Euklideszi tér. Emlékezzünk, hogy azt mondjuk, hogy $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ortogonálisak (jelben: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$), ha $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Megmutatjuk, hogy a nevezetes **Pithagorasz-tétel** ilyen általános esetben is fennáll. Legyen $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Ekkor

$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2.$$

Gondoljuk meg, hogy ha $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, akkor ez éppen a Pithagorasz-tétellel egyenértékű állítás. A bizonyítás egyszerű számolás:

$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2,$$

hiszen $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$, mivel ortogonálisak.

Definíció. *Legyen $E \subset V$ altér a V Euklideszi térben. A $\mathbf{v} \in V$ vektor* ***ortogonális az E altérre****, ha annak minden vektorára ortogonális, azaz $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ minden $\mathbf{w} \in E$ esetén. Ezt $\mathbf{v} \perp E$-vel jelöljük. Legyen $E, F \subset V$ két altér V-ben. Azt mondjuk, hogy E és F* ***ortogonális alterek*** *(jelben: $E \perp F$), ha E minden vektora ortogonális F-re.*

Abban az esetben, ha tudjuk, hogy milyen vektorok generálják az E alteret, akkor azt, hogy valamilyen $\mathbf{v}$ vektor ortogonális-e az E altérre, anélkül a lehetetlen küldetés nélkül is megállapíthatjuk, hogy ellenőriznénk E összes vektorának merőlegességét $\mathbf{v}$-re. Igaz ugyanis a következő

Tétel. *Legyen $E = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Ekkor $\mathbf{v} \perp E$ akkor és csak akkor, ha*

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_i, \quad \textit{minden } i = 1, 2, \ldots, k \textit{ esetén.}$$

Bizonyítás. Ha $\mathbf{v} \perp E$, akkor definíció szerint E minden vektora merőleges $\mathbf{v}$-re, így speciálisan a generáló vektorok is, így ez az irány triviális. Másfelől. ha $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_i$, minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén, akkor mivel bármely $\mathbf{w} \in E$ felírható $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i$ alakban, ezért

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = 0,$$

vagyis $\mathbf{v} \perp E$, ahogy állítottuk. □

Emlékezzünk, hogy az $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszerről azt mondtuk, hogy **ortogonális rendszer (OR)**, ha a vektorrendszer elemei páronként ortogonálisak, azaz $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$, valahányszor $i \neq j$. Megmutatjuk, hogy egy ortogonális rendszerre általánosítható a Pithagorasz-tétel.

Tétel. ***(Általánosított Pithagorasz-tétel.)***
Legyen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ egy ortogonális rendszer. Ekkor

$$\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k \|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \| \mathbf{v}_k \|^2,$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tetszőleges skalárok.

Bizonyítás.

$$\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k \|^2 = \langle \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_k} \alpha_j \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle .$$

Mivel az ortogonalitás miatt $\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, ha $k \neq j$, ezért a fenti két szummában csak a $k = j$ tagokat kell megtartanunk:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_k} \alpha_j^2 \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \alpha_k \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \| \mathbf{v}_k \|^2.$$

Az általános Pithagorasz-tétel segítségével könnyen meggondolhatjuk, hogy egy ortogonális rendszer automatikusan lineárisan független is. Valóban, tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Ekkor a fenti tétel miatt,

$$0 = \| \, \mathbf{0} \, \|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \| \, \mathbf{v}_k \, \|^2.$$

Mivel $\| \, \mathbf{v}_k \, \| \neq 0$, ha $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$, ezért a fenti egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $\alpha_k = 0$ minden lehetséges k-ra, vagyis az ortogonális rendszer tagjai lineárisan függetlenek.

Definíció. *A* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *rendezett vektorrendszert amennyiben ortogonális rendszer és bázis* V *Euklideszi térben,* ***ortogonális bázisnak (OB)****, ha ortonormált és bázis* V*-ben,* ***ortonormált bázisnak (ONB)*** *hívjuk.*

Amennyiben $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ egy ortonormált bázis, egyszerre kell teljesülni a két következő dolognak:

1. $\langle \, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \, \rangle = 0$, ha $i \neq j$,
2. $\| \, \mathbf{v}_i \, \|^2 = \langle \, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \, \rangle = 1$, minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

Vegyük észre, hogy ezt a két feltételt be tudjuk sűríteni egyetlen feltételbe. Valóban, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ pontosan akkor ortonormált bázis, ha

$$\langle \, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \, \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

A fenti egyenletben szereplő δ_{ij} kifejezést **Kronecker-deltának** hívjuk, és nagyban megkönnyíti a számolásokat. Mi az előnye annak, ha ortonormált bázist használunk? Tegyük fel, hogy $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ egy ortogonális bázis V-ben. Ekkor egy tetszőleges $\mathbf{x} \in V$ vektort megadhatunk ebben a bázisban:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \, \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \, \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \, \mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \mathbf{v}_j \, .$$

Vegyük $\mathbf{x}$-nek $\mathbf{v}_1$-gyel vett skalárszorzatát!

$$\langle \, \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \, \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle \, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j \, \rangle}_{0,\text{ha } j \neq 1} = \alpha_1 \, \langle \, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \, \rangle = \alpha_1 \| \, \mathbf{v}_1 \, \|^2,$$

ahonnan

$$\alpha_1 = \frac{\langle \, \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \, \rangle}{\| \, \mathbf{v}_1 \, \|^2}.$$

Teljesen hasonlóan, bármely $\mathbf{v}_k$ bázisvektorral véve a skaláris szorzatot:

$$\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle}_{0,\text{ha } j \neq k} = \alpha_k \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \alpha_k \| \mathbf{v}_k \|^2,$$

ahonnan

$$\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{x} \rangle}{\| \mathbf{v}_k \|^2}, \quad \text{ha } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Azt kapjuk tehát, hogy ortogonális bázist véve, egy vektor koordinátáinak kiszámításához nem szükséges egy lineáris egyenletrendszert megoldanunk, elég a (7) képlettel számolnunk, vagyis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortogonális bázis esetén bármely $\mathbf{x} \in V$-re:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{x} \rangle}{\| \mathbf{v}_k \|^2} \mathbf{v}_k\,. \tag{8}$$

Tovább egyszerűsödik a helyzet, ha a bázis ortonormált. Ekkor ugyanis $\| \mathbf{v}_k \| = 1$ minden k-ra és

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{v}_k\,. \tag{9}$$

A (8) illetve (9) kifejezéseket szokás az $\mathbf{x}$ vektor $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ bázis szerint **Fourier-felbontásának** hívni, a benne szereplő kifejtési együtthatókat pedig **Fourier-együtthatóknak**.

Példa 9. Legyen $V = \mathbb{R}^3$, legyen $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k})$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{k})$ és $\mathbf{e}_3 = \mathbf{j}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ONB V-ben. Legyen $\mathbf{x} = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Adjuk meg $\mathbf{x}$-et az $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ bázisban! Elég (9) alapján dolgoznunk:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1) = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{x} \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}((-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{x} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -1,$$

így

$$\mathbf{x} = \frac{3}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\,.$$

A következő példára későbbi tanulmányaink során még sokszor fogunk hivatkozni.

Példa 10. Tekintsük a $(-\pi, \pi)$ intervallumon az

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt \tag{10}$$

függvényrendszert. Ezen függvényeknek egy

$$p(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

lineáris kombinációját n**-edrendű trigonometrikus polinomnak** hívjuk. Az n-edrendű trigonometrikus polinomok vektorteret $2n+1$ dimenziós vektorteret alkotnak a valós számok teste felett a pontonkénti összeadással. Ezt a vektorteret jelöljük $\mathcal{T}_{2n+1}$-gyel. Ez a vektortér Euklideszi térré tehető a

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(t) q(t) \, \mathrm{d}\, t$$

skaláris szorzattal. Könnyen ellenőrizhető (például parciális integrálással), hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos lt \, \mathrm{d}\, t = 0, \quad \text{ha } k \neq l,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \sin lt \, \mathrm{d}\, t = 0, \quad \text{ha } k \neq l,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin lt \, \mathrm{d}\, t = 0, \quad \text{bármely } k, l \text{ esetén.}$$

Ez azt jelenti, hogy a (10) függvényrendszer ortogonális bázis $\mathcal{T}_{2n+1}$-ben. Mivel

$$\| \cos kt \|^2 = \langle \cos kt, \cos kt \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \, \mathrm{d}\, t = \pi,$$

$$\| \sin kt \|^2 = \langle \sin kt, \sin kt \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt \, \mathrm{d}\, t = \pi,$$

$$\| 1 \|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, \mathrm{d}\, t = 2\pi,$$

ezért az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt \tag{11}$$

rendszer ortonormált bázis $\mathcal{T}_{2n+1}$-ben.

3. Ortogonális projekciók és a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás

Térgeometriai alkalmazások során tanultuk, hogyan lehet egy vektor síkra való vetületét kiszámolnunk. Ezt szeretnénk általánosítani tetszőleges V Euklideszi tér esetén.

Definíció. *Legyen $E \subset V$ egy altér a V Euklideszi térben. Bármely $\mathbf{v} \in V$ vektor E* ***altérre vett ortogonális vetülete*** *$\mathbf{w}$, ha*

1. $\mathbf{w} \in E$,
2. $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp E$.

Az E altérre való vetületre a $\mathbf{w} = P_E\,\mathbf{v}$ jelölést fogjuk használni.

Gondoljuk meg, hogy $\mathbb{R}^3$ esetén egy síkra való vetület teljesíti ezen kívánalmakat. A következő tétel megmutatja, hogy egy vektor altérre vett vetülete miért játszik majd kitüntetett szerepet számításainkban.

Tétel. *A $\mathbf{w} = P_E\,\mathbf{v}$ ortogonális vetület minimalizálja $\mathbf{v}$-nek az E altértől vett távolságát, azaz bármely $\mathbf{x} \in E$ esetén*

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\, \mathbf{v} - \mathbf{w} \,\| \leq d(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \|\, \mathbf{v} - \mathbf{x} \,\|.$$

Továbbá, a merőleges vetület egyértelmű, azaz, ha valamely $\mathbf{x} \in E$ esetén

$$\|\, \mathbf{v} - \mathbf{w} \,\| = \|\, \mathbf{v} - \mathbf{x} \,\|,$$

akkor $\mathbf{x} = \mathbf{w}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x} \in E$ tetszőleges és legyen $\mathbf{y} = \mathbf{w} - \mathbf{x}$. Ekkor

$$\mathbf{v} - \mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{w} + \mathbf{w} - \mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{w} + \mathbf{y}\,.$$

Mivel $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp E$, ezért $\mathbf{y} \perp \mathbf{v} - \mathbf{w}$ (hiszen $\mathbf{y} \in E$) és a Pithagorasz-tétel alapján

$$\|\, \mathbf{v} - \mathbf{x} \,\|^2 = \|\, \mathbf{v} - \mathbf{w} \,\|^2 + \|\, \mathbf{y} \,\|^2 \geq \|\, \mathbf{v} - \mathbf{w} \,\|^2.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{x} = \mathbf{w}$. $\square$

Amennyiben az E altéren ismerünk egy ortogonális bázist, könnyen megadhatjuk egy tetszőleges vektor E altérre való vetületét. Erről szól a következő

Tétel. *Legyen* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ *egy ortogonális bázis az* E *altéren. Ekkor egy tetszőleges* $\mathbf{v} \in V$ *vektor* E *altérre való vetülete*

$$P_E\,\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\,\mathbf{v}_k, \quad \textit{ahol } \alpha_k = \frac{\langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\,\rangle}{\|\,\mathbf{v}_k\,\|^2}.$$

Más szavakkal

$$P_E\,\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\,\rangle}{\|\,\mathbf{v}_k\,\|^2}\,\mathbf{v}_k\,. \tag{12}$$

Bizonyítás. Legyen

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\,\mathbf{v}_k, \quad \text{ahol } \alpha_k = \frac{\langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\,\rangle}{\|\,\mathbf{v}_k\,\|^2}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp E$. Az 2 Tétel alapján ehhez elég a $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{v}_k$ relációt ellenőriznünk minden k-ra.

$$\begin{aligned}
\langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v} - \mathbf{w}\,\rangle &= \langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\,\rangle - \langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}\,\rangle = \langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\,\rangle - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \underbrace{\langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j\,\rangle}_{0, \text{ ha } j \neq k} \\
&= \langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\,\rangle - \alpha_k \langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k\,\rangle = \langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\,\rangle - \frac{\langle\, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\,\rangle}{\|\,\mathbf{v}_k\,\|^2}\|\,\mathbf{v}_k\,\|^2 = 0.
\end{aligned}$$
□

Abban az esetben, ha E a $V = \mathbb{K}^n$ tér egy altere, akkor az (12) formulából könnyen leolvasható, hogy hogyan lehet megadnunk az E altérre való vetítés transzformációját:

$$P_E = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\|\,\mathbf{v}_k\,\|^2}\,\mathbf{v}_k\,\mathbf{v}_k^*\,.$$

Ahhoz, hogy a fenti tételt alkalmazni tudjuk, szükségünk van egy ortogonális bázisra az E altérben. Ismertetjük az úgynevezett **Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárást**, amelynek segítségével ezt a bázist megtalálhatjuk. Legyen $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ egy lineárisan független generátorrendszer (azaz bázis) E-ben. A célunk legyártani ennek segítségével egy $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortogonális bázist E-ben. Ekkor tehát

$$E = \operatorname{Span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \operatorname{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

A következő algoritmussal dolgozunk:

1. Legyen $\mathbf{v}_1 := \mathbf{x}_1$. Jelölje $E_1 = \operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1\}$.

2. Definiáljuk $\mathbf{v}_2$-t a következőképpen:

$$\mathbf{v}_2 := \mathbf{x}_2 - P_{E_1}\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\langle\, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2\,\rangle}{\|\,\mathbf{v}_1\,\|^2}\,\mathbf{v}_1\,.$$

   Legyen $E_2 = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Vegyük észre, hogy $E_2 = \operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$.

3. Definiáljuk $\mathbf{v}_3$-t a következőképpen:

$$\mathbf{v}_3 := \mathbf{x}_3 - P_{E_2}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_3 \rangle}{\| \mathbf{v}_1 \|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x}_3 \rangle}{\| \mathbf{v}_2 \|^2}\mathbf{v}_2 .$$

   Legyen $E_3 = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Vegyük észre, hogy $E_3 = \mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$.

4. Tegyük fel, hogy az algoritmus első r lépését már elvégeztük, vagyis legyártottuk $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ ortogonális rendszert és $E_r = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$. Definiáljuk $\mathbf{v}_{r+1}$-t a következőképpen:

$$\mathbf{v}_{r+1} := \mathbf{x}_{r+1} - P_{E_r}\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_{r+1} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{x}_{r+1} \rangle}{\| \mathbf{v}_k \|^2}\mathbf{v}_k .$$

5. Folytatva az algoritmust legyárthatjuk a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorokat. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így kapott vektorrendszer valóban ortogonális bázis E-ben.

Példa 11. Legyen

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Végezzünk Gram-Schmidt ortogonalizációt!

$$\mathbf{v}_1 := \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{v}_2 := \mathbf{x}_2 - P_{E_1}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{\| \mathbf{v}_1 \|^2}\mathbf{v}_1 .$$

Mivel

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 3, \quad \| \mathbf{v}_1 \|^2 = 3,$$

ezért

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Végül, mivel

$$\mathbf{v}_3 := \mathbf{x}_3 - P_{E_2}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_3 \rangle}{\| \mathbf{v}_1 \|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x}_3 \rangle}{\| \mathbf{v}_2 \|^2}\mathbf{v}_2,$$

valamint

$$\langle\, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_3 \,\rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 3 \quad \|\, \mathbf{v}_1 \,\|^2 = 3,$$

és

$$\langle\, \mathbf{v}_2, \mathbf{x}_3 \,\rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 1 \quad \|\, \mathbf{v}_2 \,\|^2 = 2,$$

ezért

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Definíció. *Legyen $E \subset V$ egy altér. E* ***ortogonális kiegészítőjét (komplemensét)*** *az*

$$E^{\perp} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \perp E\}$$

vektorok alkotják.

Könnyen belátható, hogy $E^{\perp}$ szintén altér. Bármely $\mathbf{v} \in V$ vektor egyértelműen felbontható egy E-beli és egy $E^{\perp}$-beli vektor összegeként:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 \in E, \quad \mathbf{v}_2 \in E^{\perp},$$

ahol $\mathbf{v}_1 = P_E\,\mathbf{v}$. Ezt a megállapítást jelben így szokás jelölni:

$$V = E \oplus E^{\perp},$$

és azt mondjuk, hogy V az E és az $E^{\perp}$ alterek **direkt összege**. Világos, hogy $(E^{\perp})^{\perp} = E$. A következőkben egy fontos alkalmazást tekintünk át.

4. A legkisebb négyzetek módszere

Korábban alaposan kitárgyaltuk, hogy egy

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mátrixegyenletnek (lineáris egyenletrendszernek) akkor és csak akkor van megoldása, ha $\mathbf{b} \in \operatorname{Im}\mathbf{A}$, vagyis $\mathbf{b}$ az $\mathbf{A}$ mátrix képterébe esik. Az életben gyakran előfordul, hogy a fenti egyenletet (pontosabban az abban szereplő együtthatókat) mérésekből tudjuk meg. Ilyenkor, előfordulhat, hogy a mért adatokból felírt $\mathbf{b}$ nem esik $\mathbf{A}$ képterébe, így nem lesz megoldásunk $\mathbf{x}$-re, amire pedig szükségünk lenne. Az ötlet ilyenkor az, hogy keressünk olyan $\mathbf{x}$ vektort, ami „majdnem ” megoldása a fenti egyenletnek, olyan értelemben, hogy az

$$\| \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b} \|$$

hibát minimalizáljuk. Vegyük észre, hogy ha $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ teljesül, akkor a fenti kifejezés értéke 0. Ha nincs ilyen $\mathbf{x}$, akkor megpróbáljuk megkeresni azt az $\mathbf{x}$-et, melyre $\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ a legközelebb van $\mathbf{b}$-hez. Vegyük észre, hogy $\| \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b} \|$ pontosan akkor minimális, ha $\| \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b} \|^2$ minimális, ezért hívják ezt a módszert **legkisebb négyzetek módszerének**. Ha az összes $\mathbf{x}$ vektor esetén kiszámoljuk $\mathbf{A}\,\mathbf{x}$-et, akkor éppen $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ vektorait kapjuk meg, igy az $\| \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b} \|$ kifejezés éppen $\mathbf{b}$-nek az $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ altértől való távolságát jelenti. Ez a távolság viszont megegyezik $\mathbf{b}$-nek az $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ altérre való vetületétől vett távolsággal. Vagyis $\| \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b} \|$ pontosan akkor minimális, ha

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = P_{\operatorname{Im}\mathbf{A}}\,\mathbf{b}\,.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} \perp \operatorname{Im}\mathbf{A}\,. \tag{13}$$

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ oszlopvektorai $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Mivel $\operatorname{Im}\mathbf{A} = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, ezért az (13) egyenlet

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} \perp \mathbf{a}_k, \quad k = 1, 2 \ldots, n$$

teljesül. Mivel most $\mathbb{K}^n$-ben vagyunk, az itt szokásos skalárszorzattal ez a feltétel az

$$\langle\, \mathbf{a}_k, \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}\,\rangle = \mathbf{a}_k^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

alakot ölti. Vegyük észre, hogy ezt az n darab egyenletet összevonhatjuk egyetlen mátrixegyenletbe az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A}^*$ adjungáltjának a segítségével:

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

amit rendezve

$$\mathbf{A}^*\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^*\,\mathbf{b}\,. \tag{14}$$

Ezt az egyenletet a probléma **normál egyenletének** hívják, ennek megoldása adja az $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenlet legkisebb négyzetek módszerével adódó megoldását. Abban az esetben, ha A^*A invertálható, a keresett megoldás:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^*\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^*\,\mathbf{b}\,. \tag{15}$$

Mivel $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = P_{\operatorname{Im}\mathbf{A}}\,\mathbf{b}$, ezért

$$P_{\operatorname{Im}\mathbf{A}}\,\mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^*\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^*\,\mathbf{b}$$

minden $\mathbf{b}$-re, ahonnan megkaphatjuk $\mathbf{A}$ képterére való vetítés megkapható

$$P_{\operatorname{Im}\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^*\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^*$$

alakban. Szemléltetésképpen nézzünk néhány példát!

Példa 12. **Egyenes illesztés.**
Tegyük fel, hogy valamilyen kisérletet n-szer elvégzünk és méréseinkkel (x_k, y_k) pontpárokhoz jutunk $k = 1, 2, \ldots, n$. Elméletileg tudjuk, hogy ezen pontoknak az $y = a + bx$ egyenesre kellene esniük, de ez mivel adataink méréseken alapulnak, közel sincs így. Az egyenletrendszerünk ekkor

$$\begin{aligned} a + bx_1 &= y_1 \\ a + bx_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ a + bx_n &= y_n, \end{aligned}$$

ahonnan az a, b együtthatókra vagyunk kiváncsiak úgy, hogy a

$$\sum_{k=1}^{n} |a + bx_k - y_k|^2$$

hiba minimális legyen. Mátrixos alakba írva az egyenletrendszert

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

ahonnan tehát

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Példaként tegyük fel, hogy a következő pontpárjaink vannak a mérésből:

$$(-2, 4), (-1, 2), (0, 1), (2, 1), (3, 1).$$

A legkisebb négyzetek módszerével megoldandó egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{A}^*\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 18 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^*\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

A normál egyenlet ekkor tehát

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 18 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 18 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix},$$

ahonnan

$$a = 2, b = -\frac{1}{2}.$$

A legkisebb négyzetek módszere alapján a pontokra legjobban illeszkedő egyenes:

$$y = 2 - \frac{1}{2}x.$$

Példa 13. **Görbeillesztés.**
Tegyük fel, hogy most azt tudjuk, hogy a mért pontjaink nem egy egyenesre, hanem az

$$y = a + bx + cx^2$$

parabolára kellene, hogy illeszkedjenek. Ekkor tehát a következő egyenletrendszerrel van dolgunk:

$$\begin{aligned} a + bx_1 + cx_1^2 &= y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 &= y_2 \\ &\vdots \\ a + bx_n + cx_n^2 &= y_n, \end{aligned}$$

vagy mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

vagyis ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Keressük meg az előző feladat pontjaira illeszkedő legjobb parabolát. Ekkor a legkisebb négyzetek módszerével megoldandó egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 18 \\ 2 & 18 & 26 \\ 18 & 26 & 114 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

A normál egyenlet most

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 18 \\ 2 & 18 & 26 \\ 18 & 26 & 114 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 31 \end{pmatrix},$$

amit megoldva

$$a = 86/77, b = -62/77, c = 43/154.$$

Az adatainkra legjobban illeszkedő parabola egyenlete:

$$y = 86/77 - 62x/77 + 43x^2/154.$$

Világos, hogy a módszer tetszőleges fokszámú polinommal működik.