

Kalkulus 1

1. Feladatsor

2022/23. I.félév

I. Logikai feladatok

Az alábbi feladatokban a \wedge jelöli az „ÉS”, \vee a „VAGY”, \neg a „negálás” műveletét.

1. Igazoljuk a következő azonosságokat!

(a) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

(b) $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

(c) $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)]$

(d) $[\neg p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p \equiv 1$

(e) $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$

(f) $\neg[(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

2. Az alábbi szöveges feladatoknál formalizáljuk az állításokat logikai műveletek és kvantorok segítségével, majd tagadjuk az állításokat formálisan és szövegesen is!

(a) Minden medve szereti a mézet.

(b) Van olyan méz, amit nem minden medve szeret.

(c) A házban van ablak, ami nyitva van.

(d) A házban van emelet, ahol minden ablak nyitva van.

(e) Minden emeleten minden ablak nyitva van.

(f) A villamos kar bármely szak minden évfolyamán van lány hallgató.

(g) „Minden asszony életében van egy pillanat,
Mikor olyat akar tenni, amit nem szabad.”

- (h) Van olyan a , hogy minden b -hez egyetlen x tartozik, melyre $a + x = b$.
- (i) Minden tengerész ismer olyan kikötőt, ahol van olyan kocsmá, ahol még nem járt.
3. Egy udvarban kecskék és bolhák vannak. Azt, hogy egy bolha megcsípett egy kecskét, a $\Phi(B, K)$ formulával jelöljük. Írjuk le a következő állítások tagadását formulával és szöveggel is!
- (a) $(\forall K)(\exists B)\Phi(B, K)$
- (b) $(\exists K)(\forall B)\Phi(B, K)$
- (c) $(\exists B)(\forall K)\Phi(B, K)$
- (d) $(\forall K)(\forall B)\Phi(B, K)$
- (e) $(\exists K)(\exists B)\Phi(B, K)$
- (f) $(\forall B)(\exists K)\Phi(B, K)$.

II. Bizonyítási módszerek (direkt, indirekt, teljes indukció)

1. Az előadáson tanult módszerrel adjunk zárt formulát a következő kifejezésekre!

(a) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$

(b) $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$

2. Hozzuk zárt alakra az alábbi kifejezéseket!

(a)

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1)^2 = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2$$

(*Útmutatás:* Használja fel az $1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2$ összegre vonatkozó formulát!)

(b)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)},$$

(c)

$$\sum_{k=1}^n k(k+1),$$

(d)

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2).$$

3. Adott x_1, x_2, \dots, x_n valós számok esetén, jelölje $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ az x_1, x_2, \dots, x_n közül a legnagyobbat, $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pedig a legkisebbet! Mutassuk meg, hogy

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

Adjunk formulát $\max(x, y, z)$ -re illetve $\min(x, y, z)$ -re!

4. Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak!

(a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{\sqrt{2}+1+3}{4} + 5$.

5. Bizonyítsuk be teljes indukcióval a következő azonosságokat illetve egyenlőtlenségeket ($n \in \mathbb{N}$)!

(a) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}, (n \geq 1),$

(b) $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1, (n \geq 1),$

(c) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < n, (n \geq 2),$

(d) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}, (n \geq 2),$

(e) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}},$ ahol a bal oldalon n darab gyökjel van és $n \geq 1,$

(f) $3^n > 2^n + 7n,$ ha $n \geq 4$

(g) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},$ ha $x \neq 1.$

6. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a nevezetes Fibonacci-sorozat, azaz $a_0 = 0, a_1 = 1,$ és $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n,$ valahányszor $n > 1.$ Bizonyítsuk be, hogy

(a) a_n és a_{n+1} relatív prímek.

(b) $\frac{1,6^n}{3} < a_n < 1,7^n,$ ha $n > 0.$

7. Legyen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy függvény, melyre teljesül, hogy $f(xy) = f(x) + f(y)$ minden $x, y \in \mathbb{N}$ esetén. Mutassuk meg, hogy $f(a^n) = n f(a),$ minden a, n természetes számra.

II. Egyenlőtlenségek

1. Emlékeztetünk a harmonikus, mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenségre. Ha $n \geq 2$ természetes szám és a_1, a_2, \dots, a_n pozitív valós számok, akkor

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket! Mikor van egyenlőség?

- (a) $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$, $n \in \mathbb{N}^+$
- (b) $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$
- (c) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$, ($n = 2, 3, \dots$)
- (d) $n \in \mathbb{N}^+$, a_1, a_2, \dots, a_n pozitív valósak,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

- (e) $n \in \mathbb{N}^+$, a_1, a_2, \dots, a_n pozitív valósak,

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n}$$

2. A Bernouilli-egyenlőtlenség alapján bizonyítsuk be, hogy van olyan n pozitív egész szám, melyre

- (a) $0, 9^n < \frac{1}{100}$,
- (b) $\sqrt[n]{2} < 1, 01$,
- (c) $\sqrt[n]{0,1} > 0, 9$.

3. Igazoljuk az alábbiakat!

- (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- (b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- (c) $|a| \leq |a + b| + |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$.