Kalkulus 1
3. Feladatsor

2022/23 I. félév

I. Halmazok függvény általi képe, ősképe

1. Adjunk példát olyan $f : X \to Y$ függvényre, valamint $A, B \subset X$ részhalmazra, melyre $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

2. Mutassuk meg, hogy egy $f : X \to Y$ függvényre az alábbi állítások ekvivalensek.

   (a) f injektív.

   (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ fennáll minden $A, B \subset X$ esetén.

   (c) Bármely, $A, B \subset X$ diszjunkt esetén $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

3. Legyen $f : X \to Y$ egy függvény. Mutassuk meg, hogy minden $A \subset X$ esetén $A \subset f^{-1}(f(A))$, valamint $B \subset Y$ esetén $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

4. Mutassuk meg, hogy egy $f : X \to Y$ függvény pontosan akkor szürjektív, ha minden $B \subset Y$ esetén $f(f^{-1}(B)) = B$.

5. Legyen $f : X \to Y$ egy függvény. Tekintsük a következő R relációt X-en: $x_1 R x_2$ pontosan akkor, ha $f(x_1) = f(x_2)$. Mutassuk meg, hogy R ekvivalenciareláció.

6. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x - x^2$, és $A = \{0\}$. Írja fel $f(A)$ illetve $f^{-1}(A)$ halmazokat! Milyen $B \subset \mathbb{R}$ halmazokra lesz $f(B)$ illetve $f^{-1}(B)$ halmaz egyelemű?

7. Legyen $f : X \to Y$ adott függvény és $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$. Mutassuk meg, hogy

   (a) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$. Mikor teljesül $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$ minden $A, B \subset X$ esetén?

   (b) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

   (c) $A \subset f^{-1}(f(A))$. Mikor áll fenn egyenlőség?

(d) $f(f^{-1}(C)) \subset C$. Mikor áll fenn egyenlőség?

8. Legyen $f : X \to Y$ invertálható függvény. Mutassuk meg, hogy minden $A \subset \mathcal{R}_F$ esetén az A halmaz f általi ősképe, azaz $\{x \in X : f(x) \in A\}$ megegyezik az A halmaz f^{-1} inverz függvény általi képével, azaz a $\{f^{-1}(y) \in X : y \in A\}$ halmazzal.

9. Legyen $f : X \to Y$ egy függvény. Tegyük fel, hogy $X_1, X_2 \subset X$ nem üres diszjunkt halmazok, melyekre $X_1 \cup X_2 = X$, és $f|_{X_1}$ illetve $f|_{X_2}$ (f megszorításai X_1 illetve X_2-re) invertálhatóak. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor invertálható, ha $f(X_1) \cap f(X_2) = \emptyset$.

II. Supremum, infimum

1. Korlátosak-e alulról illetve felülről az alábbi halmazok? Amennyiben igen, határozzuk meg infimumukat illetve supremumukat! Van-e a halmazoknak minimuma illetve maximuma?

   (a) $H = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

   (b) $H = \{\frac{(-1)^n}{n} + 1 : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

   (c) $H = \{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} : m, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

   (d) $H = \{\frac{x^2+1}{3x^2+2} : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$.

   (e) $H = \{\frac{2x+3}{3x+1} : x \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$.

   (f) $H = \{\frac{x}{y} : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \subset \mathbb{R}$.

   (g) $H = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, p^2 < q^2\} \subset \mathbb{R}$.

   (h) $H = \{r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$.

2. Legyen $\omega \in \mathbb{R}$ egy pozitív irracionális szám. Legyen

$$A = \{m + n\omega : m + n\omega > 0, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

   Mutassuk meg, hogy $\inf A = 0$.

3. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ egy nem üres felülről korlátos halmaz. Mutassuk meg, hogy a $B = \{-a : a \in A\}$ halmaz alulról korlátos és $\inf B = -\sup A$.

4. Igazoljuk, hogy bármely $A, B \subset \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmaz esetén

   (a) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

   (b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

   (c) ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.

   (d) ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

   (e) ha $A \subset B$, akkor $\inf A \geq \inf B$ és $\sup A \leq \sup B$.