

Kalkulus 1

5. Feladatsor

2022/23. I.félév

I. Halmazok számossága

1. Legyen \mathcal{A} egy adott halmazrendszer (elemei halmazok), $f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, és AfB pontosan akkor, ha $A \sim B$. Mutassuk meg, hogy f ekvivalenciareláció.
2. Bizonyítsuk be, hogy egy megszámlálható halmaz minden részhalmaza megszámlálható.
3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, azaz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B nem üres halmazok, és van olyan $f : A \rightarrow B$ függvény, melynek értékkészlete B , akkor $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$.
5. Legyen A egy megszámlálható, B pedig egy végtelen halmaz. Bizonyítsuk be, hogy $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(B)$.
6. Legyen A egy nem megszámlálható, B pedig egy megszámlálható halmaz. Bizonyítsa be, hogy $A \setminus B$ számossága megegyezik A számosságával!
7. A végtelen sok pontot tartalmazó H halmaz elemei egyetlen síkon helyezkednek el úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1. Mekkora H számossága?
8. A H halmaz elemeit az x és y betűkből álló véges és végtelen hosszúságú „szavak” alkotják. Mekkora H számossága? Mekkora H számossága, ha elhagyjuk mindazon szavakat, amelyek végtelen sok y -t tartalmaznak?
9. A H halmaz azokból az $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots$ végtelen valós számsorozatokból áll, amelyekben két egymás után következő elem hányadosa 2 vagy $1/2$. Mekkora H számossága?

10. Lefedhető-e megszámlálhatóan sok egyenessel az $x^2 + y^2 = 1$ körvonalnak azon pontjai, melyekre $x > 0$ és $y > 0$?
11. A H halmazt azok a $[0, 1]$ intervallumbeli valós számok alkotják, amelyek végtelen tizedestört alakjában minden második tizedesjegy 0. Mekkora H számossága?
12. Létezik-e minden t pozitív valós számhoz olyan térbeli háromszög, melynek területe t , csúcsainak koordinátái pedig racionális számok?

II. Valós számok topológiája

1. Határozzuk meg az alábbi halmazok belső, torlódási, határ és izolált pontjait. Vizsgáljuk meg a halmazokat nyíltság, zártság, korlátosság és kompaktság szempontjából! Adjuk meg a lezártjukat és a belsejüket!
 - (a) $H = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.
 - (b) $H = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.
 - (c) $H = (-2, -1) \cup [2, 5] \cup \{7\} \cup [8, \infty) \subset \mathbb{R}$.
 - (d) $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. Bizonyítsuk be, hogy \mathbb{Z} zárt és nem nyílt, míg \mathbb{Q} nem nyílt és nem zárt \mathbb{R} -ben.
3. Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy
 - (a) H belső pontjainak halmaza nyílt.
 - (b) H határpontjainak halmaza zárt.
 - (c) H torlódási pontjainak halmaza zárt.
4. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz belsejét jelöljük A° -vel. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy
 - (a) Ha $A \subseteq B$, akkor $A^\circ \subseteq B^\circ$.
 - (b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
 - (c) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. Mutassunk példát, mikor nincs egyenlőség.
5. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz lezárását jelöljük \overline{A} -vel. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy
 - (a) Ha $A \subseteq B$, akkor $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
 - (b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Mutassunk példát, mikor nincs egyenlőség.
 - (c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

6. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz deriválthalmazát (torlódási pontjainak halmazát) jelöljük A' -vel. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

(a) Ha $A \subseteq B$, akkor $A' \subseteq B'$.

(b) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$. Mutassunk példát, mikor nincs egyenlőség.

(c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

7. Adjunk meg a valós számok halmazában végtelen sok olyan nyílt halmazt, amelyek metszete nem nyílt.

8. Adjunk meg a valós számok halmazában végtelen sok olyan zárt halmazt, amelyek uniója nem zárt.

9. Definíció alapján bizonyítsuk be, hogy a

$$H = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

halmaz kompakt.

10. Adjuk meg a $(0, 1)$ intervallumnak egy olyan nyílt lefedését, amiből nem választható ki $(0, 1)$ -nek egy véges fedése.

11. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén valós számoknak a következő halmazát

$$H_n = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+k} : k = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

és legyen

$$H = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_n \right) \cup \{0\}.$$

Adjuk meg H torlódási pontjainak halmazát! Mutassuk meg, hogy H kompakt.

12. Lássuk el a racionális számok \mathbb{Q} halmazát a valós számokból örökölt metrikával, azaz bármely $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén $d(p, q) = |p - q|$ és tekintsük a következő halmazt:

$$K = \{p \in \mathbb{Q} : 2 < p^2 < 3\} \subset \mathbb{Q}.$$

Mutassuk meg, hogy K korlátos és zárt \mathbb{Q} -ban, de nem kompakt!