Kalkulus 1
9. feladatsor

2022/23. I. félév

Numerikus sorok

1. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjuk meg a határértéküket!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

   (f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}}$

   (g) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2}-(-2)^{k+2}}{5^k}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (def alapján!)

2. Majoráns és minoráns kritérium.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^6+2n^2-\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5+n^3+1}{n^8-n^2+3}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^7+n^2-n+3}$

(j) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

3. Konvergensek-e az alábbi sorok?

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1}\right)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$

(f) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{ha } n = 2k-1 \\ \frac{1}{3^n}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$

4. Alternáló sorok, Leibniz kritérium. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjunk közelítést a sorösszegre, legfeljebb 0.1-es pontossággal!

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\lg n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n}{n^2-1}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-n}{n+1}\right)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1000}$

5. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét legfeljebb 10^{-3} hibával, amennyiben konvergensek!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^n$

   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!-n!}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n+10^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$

6. Mekkora hibát követümk el, ha a sorösszeget a 10. részletösszeggel közelítjük?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+\sqrt{2}}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3^n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}+n^2+3}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{n^2+n}$

7. Abszolút illetve feltételesen konvergensek-e?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+4)}{n^2+4}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-3n+8}$

   (d) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} - \ldots$

   (e) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \cdots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \ldots$