Kalkulus 1.
MATEMATIKA BSc

1. MINTA ZÁRTHELYI

Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név:

Neptun kód: | | | | | | |

1.	2.	3.	4.	5.	6*.	$\sum$

1. (**4+4 pont**)
   (a) Legyen A, B és C tetszőleges halmazok. Mutassa meg, hogy
   $$(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) = A \setminus B.$$
   (b) Legyen $f : A \to B$ invertálható függvény. Mutassa meg, hogy minden $D \subset \mathcal{R}_f$ esetén a D halmaz f általi ősképe, azaz az $\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in D\}$ halmaz megegyezik a D halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képével, azaz az $\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} : y \in D\}$ halmazzal.

2. (**8+4 pont**)
   (a) Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy H torlódási pontjainak halmaza zárt.
   (b) Határozza meg az $A = (-3, -1] \cup \{\frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\} \cup [5, 6] \subset \mathbb{R}$ halmaz belső pontjainak, külső pontjainak, határpontjainak, torlódási pontjainak illetve izolált pontjainak a halmazát!

3. (**5+5 pont**)
   (a) Tekintsük az
   $$a_n = \frac{n^3 - 12n + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2}$$
   sorozatot! Mi a sorozat határértéke, amennyiben létezik? Adjon meg egy N küszöbindexet, amitől kezdve a sorozat tagjai a határértéket 10^{-3}-nál jobban megközelítik!
   (b)
   $$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n) =?$$

4. (**5+5 pont**)
Határozza meg az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok határértékét, ahol

(a)

$$a_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-4}\right)^{4n^2-2} \sqrt[3n^2]{n^2-3n+6},$$

(b)

$$a_n = \left(1-\frac{2}{n!}\right)^{(n-1)!}.$$

5. (**10 pont**)
Bizonyítsa be, hogy ha $\alpha \in [0,1]$, akkor az

$$a_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+\alpha}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét!

6. (**5+5 pont - BÓNUSZ**) Határozza meg az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok határértékét, ahol

(a)

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2},$$

(b)

$$a_n = \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n.$$