Analízis 2 Mértékelmélet, 8. Gyakorló feladatsor

Integrálás 3.

1. Legyen $f_{n,k}$ nem-negatív, mérhető függvény $\mathbb{R}$-en, minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén, és tegyük fel, hogy $\int_{\mathbb{R}} f_{n,k} \,\mathrm{d}\,\lambda \leq 1/n^2$. Mutassuk meg, hogy

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{k\to\infty} f_{n,k} \in L^1(\mathbb{R}).$$

2. Legyen f_n nem-negatív folytonos függvény $\mathbb{R}$-en minden $n \in \mathbb{N}$-re, melyekre $\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\,\lambda < 1/n^3$. Legyen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Mutassuk meg, hogy f integrálható $\mathbb{R}$-en.

3. Legyen f_n a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett egyszerű függvény: $f_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$, ahol $[x]$ jelöli x egész részét! Bizonyítsuk be, hogy (f_n) Cauchy-sorozat, de nincs határértéke az integrálható, egyszerű függvények terében a $d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g|$ metrikára nézve.

4. Milyen α és β paraméterek esetén lesz az $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$ függvény a $(0, 1]$ intervallumon
   (a) Lebesgue-integrálható?
   (b) improprius értelemben Riemann-integrálható?

5. Legyen

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ \frac{1}{|x|^\alpha + |x|^{1/\alpha}}, & \text{ha } x \neq 0, \end{cases}$$

   és $g_\alpha(y) = \int_0^\infty f_\alpha(x) \cos(xy) \,\mathrm{d}\,x$. Mely $\alpha > 0$ értékekre lesz
   (a) $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$?
   (b) $x f_\alpha(x) \in L^1(\mathbb{R})$?

(c) $g_\alpha \in C^1(\mathbb{R})$?

6. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy valószínűségi mértéktér és legyenek f, g, h nem-negatív integrálható függvények, melyek X-en vett integrálja 1 (ezeket hívják sűrűségfüggvényeknek). Mutassuk meg, hogy

   (a) $\mu(\{f, g \leq 5\}) \geq 3/5$.

   (b) $\mu(\{f, g, h \leq 5\}) \geq 1/5$.

7. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f \in L^1(X)$. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén, létezik A mérhető halmaz, melyre $\mu(A) < \infty$, $\sup_{x \in A} |f(x)| < \infty$ és $\int_{A^c} |f| \, \mathrm{d}\,\mu \leq \varepsilon$.

8. Legyen $f \in L^1([0,1])$, $\int_{[0,1]} f(x) \, \mathrm{d}\,x = L$. Mutassuk meg, hogy létezik $A \subset [0,1]$, melyre $\lambda(A) = 1/2$ és $\int_A f(x) \, \mathrm{d}\,x = L/2$.

$\mathbf{L^p}$ terek 1.

1. Legyen $p \in [1, \infty)$. Tegyük fel, hogy az $f_n \in L^p([0,1])$ sorozat m.m. konvergál $f \in L^p([0,1])$-hez. Mutassuk meg, hogy f_n pontosan akkor fog f-hez konvergálni az $L^p([0,1])$ térben, ha $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

2. Legyen $f_n \in L^1(0,1) \cap L^2(0,1)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Mutassuk meg, hogy ha $\|f_n\|_2 \to 0$, akkor $\|f_n\|_1 \to 0$. Mutassunk ellenpéldát rá, hogy a megfordítás nem igaz.

3. Legyen f pozitív mérhető függvény a mérhető A halmazon, melyre $\mu(A) < \infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\int_A f \, \mathrm{d}\,\mu \right) \left(\int_A \frac{1}{f} \, \mathrm{d}\,\mu \right) \geq [\mu(A)]^2.$$

4. Legyen f mérhető függvény $[0,1]$-en és legyen minden $p \in [1, \infty)$ esetén

$$g(p) = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}\,x \right)^{1/p}.$$

   Mutassuk meg, hogy g nem-csökkenő $[1, \infty)$-n. Tegyük fel továbbá, hogy $f \notin L^\infty(0,1)$. Mutassuk meg, hogy $\lim_{p \to \infty} g(p) = \infty$.