Analízis 2 Mértékelmélet,
9. Gyakorló feladatsor

$\mathbf{L}^{\mathbf{p}}$ terek 2.

1. Mutassuk meg, hogy ha $f.g \in L^1(\mu)$, akkor $|f^2 + g^2|^{1/2} \in L^1(\mu)$.

2. Mutassuk meg, hogy ha $a > 0$, akkor

   (a) $\ln \frac{1}{x} \in L^p(0, a)$, ha $p \in (0, \infty)$

   (b) $e^{1/x} \notin L^p(0, a)$, ha $p \in (0, \infty]$.

3. Mutassuk meg, hogy $x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^p(0, \infty)$, ha $p = 2$, de egyéb p esetén nem.

4. Mutassunk példát olyan $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvényre, mely $f \notin L^p(\mathbb{R})$, ha $p > 1$.
   (Pl: $f = \chi_{(0,1)}/(x \ln^2 x)$.)

5. Mutassunk példát olyan $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $g \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre, hogy $f + g \notin L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.
   (Pl: $f = \chi_{(0,1)}/\sqrt{x}$, $g = \chi_{(1,\infty)}/x$.)

6. Legyen
$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{, ha } x \in (0, 1] \\ 1/x, & \text{ha } x \in (1, \infty). \end{cases}$$
   Mutassuk meg, hogy $f \in L^p(0, \infty)$ akkor és csak akkor, ha $1 < p < 2$.

7. Bizonyítsuk be, hogy az L^1-beli konvergenciából következik a mértékbeli konvergencia. Mutassunk példát, hogy a megfordítás nem igaz.

8. Legyen $f \in L^2(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} f = 0$.

9. Legyen $f \geq 0$ Lebesgue-mérhető $[0,1]$-en és

$$\int_{[0,1]} f^2 = \int_{[0,1]} f^3 = \int_{[0,1]} f^4 < \infty.$$

Mutassuk meg, hogy $f = f^2$ m.m.

10. Legyen $p > 1$ és $f \in L^p([-1,1])$. Mutassuk meg, hogy
    (a) $f \in L^1([-1,1])$.
    (b) Legyen $I_n = (-1/n, 1/n)$ és $\gamma = (p-1)/p$. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma \int_{I_n} |f| = 0.$$

11. Legyen $f_n \in L^2(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $f \in L^2(a,b)$, ahol $\lim_n \|f_n - f\| = 0$. Mutassuk meg, hogy
    (a) $\int_a^b f^2 = \lim_n \int_a^b f_n$.
    (b) $\int_a^t f = \lim_n \int_a^t f_n$, $a \leq t \leq b$.

12. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket!
    (a) $\int_0^\pi x^{-1/4} \sin x \,\mathrm{d}\, x| \leq \pi^{3/4}$.
    (b) $\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2} \,\mathrm{d}\, x < \sqrt[3]{6}$.
    (c) $\left(\int_0^1 \frac{x^3}{(1-x)^{1/5}} \,\mathrm{d}\, x\right)^5 \leq \frac{16}{81}$.
    (d) $\int_0^1 \sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} \,\mathrm{d}\, x \leq \frac{2\sqrt{10}}{3}$.
    (e) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{x \sin x} \,\mathrm{d}\, x < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

13. Mutassuk meg, hogy ha $f \in L^2(0,\pi)$, akkor az

$$\int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2 \,\mathrm{d}\, x \leq \frac{4}{9}, \quad \int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 \,\mathrm{d}\, x \leq \frac{1}{9}$$

egyenletek nem állhatnak fenn egyszerre (inkonzisztensek).